CONJUNTOS ESPECIALES DE NÚMEROS REALES

ALHELÍ FLORES FERRER, FERNANDO HERNÁNDEZ-HERNÁNDEZ, CELIA MARTÍNEZ LÁZARO, LUIS A. MARTÍNEZ PÉREZ, AND ALEJANDRO TORRES AYALA

1. Introducción

La motivación principal de este trabajo es difundir la diversidad de conjuntos de números reales que sin lugar a dudas uno puede calificar como "extraños". Otro de nuestros objetivos es explorar la riqueza topológica de la recta real y presentar construcciones usando inducción transfinita. A lo largo del contenido de este artículo definiremos conjuntos como los llamados de Bernstein, de Luzin, de Sierpiński y mágicos, entre otros. Históricamente, fue F. Bernstein, en 1908, el primero en construir uno de estos conjuntos "extraños" usando inducción transfinita. Él construyó un conjunto no numerable de números reales que intersecta a todos los subconjuntos cerrados y no numerables de $\mathbb{R}$ pero que no contiene alguno de ellos. Después de ésta, muchas otras construcciones fueron hechas. Quizás el primer lugar donde aparece un compendio de conjuntos especiales de números reales es en el libro de Kuratowski, *Topologie I, Espaces Métrisables, Espaces Complets* de 1933. Por supuesto que no es nuestra intención presentar un recuento exhaustivo de ellos. En lo que sigue exploraremos algunos de los conjuntos que por una u otra razón nos llamaron la atención. Más información sobre conjuntos especiales de números reales puede consultarse en los artículos de A. Miller [Mil84] y [Mil93].

Empezaremos con una sección de preliminares donde introduciremos muchos de los conceptos básicos que serán empleados en el desarrollo de esta nota. En la sección 3, nuestro hilo conductor serán los conjuntos "pequeños"de números reales. En la sección 4 estudiaremos conjuntos que tienen medida fuertemente cero y de dicho estudio los conjuntos de Luzin y Sierpiński aparecerán de manera casi natural. Hemos tratado de explotar las similitudes y diferencias entre la teoría de la medida y la teoría de categoría. En la sección 5 vamos a presentar lo que se conoce como conjuntos mágicos. Ellos tienen la peculiaridad de determinar una amplia clase de funciones continuas con una simple condición de contención; es decir, si M es uno de tales conjuntos mágicos, f y g son

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54G05, 54A35, 03E17, 06E15.

Key words and phrases. Conjuntos especiales, conjunto de medida cero, hipótesis del continuo, conjunto de Luzin, conjunto de Sierpiński, conjuntos de medida fuertemente cero, conjunto mágico.

La realización de este artículo fue patrocinada en el año de 2005 por el proyecto PAPIME-UNAM, EN-100304, durante el taller "Aprendiendo a Investigar en Morelia".

funciones continuas que no son constantes sobre ningún intervalo abierto, entonces $f[M] \subseteq g[M]$ implica $f = g$. Este tipo de conjuntos los construiremos asumiendo la Hipótesis del Continuo. La construcción que presentamos se debe a A. Berarducci y D. Dikranjan [BD93]. K. Ciesielski y S. Shelah [CS99] demostraron que algún axioma adicional debe usarse para obtener un conjunto mágico. En la sección 6, presentaremos un teorema de A. Miller [Mil83] en que, también usando la Hipótesis del Continuo, se establece la existencia de un conjunto no numerable de números reales tal que $\mathbb{R}$ es imagen continua de cualquiera de sus subconjuntos no numerables. A. Miller demuestra en [Mil83] que este tipo de conjuntos también requieren de axiomas adicionales tales como CH.

Al final de algunas de las secciones ponemos un apartado con comentarios que quizás no sean en principio accesibles a todos los lectores. No obstante, creemos que dichos comentarios son importantes para que los lectores con un poco de más experiencia puedan apreciar la importancia de los conjuntos que presentamos.

2. Preliminares

Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales, por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales y por ω o $\mathbb{N}$ al conjunto de los números enteros positivos junto con el 0. Para nosotros un número natural n es el conjunto de todos los números naturales más pequeños y $0 = \emptyset$. Un conjunto X se llama *numerable* si existe una función $f : \mathbb{N} \to X$ sobreyectiva. Dados A, B conjuntos, decimos que A y B tienen la misma cardinalidad, i.e. $|A| = |B|$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$. El conjunto de funciones de X en Y es denotado por Y^X; por ejemplo, 2^ω es el conjunto de todas las funciones $f : \omega \to \{0, 1\}$. Por $\omega^{<\omega}$ denotamos al conjunto de todas las sucesiones finitas $s : n \to \omega$. Si $s \in \omega^{<\omega}$ tiene dominio $n \in \omega$ e $i \in \omega$, por $s^\frown i$ denotamos la sucesión con dominio $n + 1$ que extiende a s y tal que $s^\frown i(n) = i$.

Denotemos por $\aleph_0$ al cardinal de ω y por ω_1 al conjunto formado por todos los números ordinales numerables; este también es el primer cardinal no numerable que a veces denotamos indistintamente por $\aleph_1$. La *cardinalidad del continuo*, es decir, la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es denotada por $\mathfrak{c}$. Visto como conjunto, $\mathfrak{c}$ es un conjunto bien ordenado tal que cada segmento inicial de $\mathfrak{c}$ tiene cardinalidad estrictamente menor que $\mathfrak{c}$.

La *Hipótesis del Continuo* (CH) establece que no existen conjuntos A para los cuales $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$. Otra forma de enunciar la Hipótesis del Continuo es con la afirmación: $\mathfrak{c} = \omega_1$. Es bien conocido que CH es tanto consistente como independiente de la usual axiomática para la teoría de conjuntos, la axiomática de Zermelo-Fraenkel con Elección, ZFC. Otra afirmación consistente e independiente de ZFC es el popular *Axioma de Martin*, MA, que es común usar en conjunción con la negación de CH. En este trabajo no usaremos MA salvo para los comentarios al final de cada sección. Puesto que la formulación de MA no es elemental, preferimos dejarlo sin definir y lo mencionamos únicamente para quienes estén más familiarizados con este tipo de matemáticas.

Sea X un conjunto no vacío. Se dice que una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica sobre X si para cada $x, y, z \in X$ se satisface lo siguiente: $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ y $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Si X es un conjunto y d es una métrica sobre X, entonces al par (X, d) se le llama *espacio métrico*. En un espacio métrico arbitrario definimos, para toda $x \in X$ y $\epsilon > 0$, la *bola abierta con centro en* x *y radio* ϵ como:

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Por ejemplo, en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_u)$, en donde $d_u(x, y) = |x - y|$, las bolas son de la forma: $B(x, \epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. A esta métrica se le conoce como *métrica usual o euclidiana*. Un subconjunto U de X es *abierto* en (X, d) si es unión de bolas abiertas y un subconjunto C de X es un subconjunto *cerrado* en (X, d) si y sólo si su complemento es abierto. La cerradura $\overline{A}$ de un subconjunto A de X es el $\subseteq$-mínimo subconjunto cerrado en (X, d) que contiene a A y es también el conjunto de todos los puntos de acumulación de A; o sea, el conjunto de todos los $x \in X$ tales que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$. Un subconjunto $D \subseteq X$ se llama *denso en* X si cada bola $B(x, \epsilon)$ intersecta a D. Decimos que $N \subseteq X$ es *nada denso* en (X, d) si $X \backslash \overline{N}$ es denso en X. Un espacio métrico se llama *separable* si contiene un subconjunto denso numerable y se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente. Un subconjunto A de un espacio métrico X se llama *perfecto* si todos sus puntos son puntos de acumulación. Denotaremos por $C(X) = C(X, d)$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$. Muchos de los resultados aquí presentados son válidos para espacios topológicos, pero para hacer más accesible el material nos restringiremos a espacios métricos. La teoría de espacios métricos puede consultarse en [Iri87].

Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{C}$ es una cubierta de X si $X \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ está formada por conjuntos abiertos decimos que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta. Usando estas definiciones podemos definir el concepto de compacidad:

Definición 2.1. Un espacio métrico X se llama *compacto* si para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe una subfamilia finita $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ que es cubierta de X.

Es fácil demostrar que todo espacio métrico compacto es completo (ver [Iri87, p. 117]). En el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_u)$ existe una equivalencia de compacidad muy útil e importante presentada en el siguiente famoso teorema. Para una demostración consúltese [Rud53, p.40].

Teorema 2.2 (Heine - Borel)**.** *En el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_u)$, un subconjunto K de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Durante el transcurso de este trabajo vamos a usar el conjunto de Cantor, que es uno de los conjuntos más interesantes e importantes dentro de las matemáticas. Para definir el conjunto de

Cantor, sea A_0 el intervalo cerrado $[0,1]$, $A_1 = A_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Definimos A_n como: $A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} (\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n})$. La intersección

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

se llama el *Conjunto de Cantor*. Entre algunas de sus propiedades tenemos que C es compacto, es totalmente disconexo, tiene medida cero (ver Definición 3.1) y tiene la cardinalidad del continuo.

En 2^ω definimos los conjuntos abiertos básicos de la forma $\langle s \rangle = \{g \in 2^\omega : s \subseteq g\}$, donde $s = f \restriction n$ para alguna $f \in 2^\omega$ y $n \in \omega$. [1] Otra propiedad interesante del conjunto de Cantor es que este es homeomorfo a 2^ω. Para ver esto observe que la función $\varphi : 2^\omega \to C$ definida por

$$\varphi(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f(k)}{3^{k+1}},$$

para cada $f \in 2^\omega$, es una función biyectiva, continua y tiene inversa continua. Para mayor información sobre este conjunto ver [Rud53, p.41], [GO03, p.85].

Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es de *primera categoría*[2] si está contenido en alguna unión numerable de subconjuntos cerrados nada densos de X. Si A no es de primera categoría, se dice que A es de *segunda categoría*. Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría es de primera categoría y que la unión numerable de conjuntos de primera categoría es de primera categoría.

Otro de los teoremas importantes que utilizaremos en lo sucesivo es el siguiente, conocido como el Teorema de Categoría de Baire. La demostración puede consultarse en [Mun75] y [Roy88].

Teorema 2.3 (Baire)**.** *Todo espacio métrico completo (X, d) es de segunda categoría.*

Como cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es completamente metrizable, se sigue que todo subconjunto abierto U de $\mathbb{R}$ es de segunda categoría. También 2^ω es de segunda categoría en sí mismo por ser un espacio métrico compacto.

3. Conjuntos pequeños

Comencemos la búsqueda de subconjuntos interesantes de $\mathbb{R}$ tratando de averiguar primero qué conjuntos podemos considerar como conjuntos pequeños.

¿Qué significa ser un "conjunto pequeño" en $\mathbb{R}$? Descartando el caso de los conjuntos finitos podemos centrar nuestra atención en subconjuntos numerables. Uno de los prototipos de subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$. Si bien los números racionales forman un conjunto numerable, ellos también integran el subconjunto denso por excelencia de $\mathbb{R}$.

---

[1] Obsérvese que 2^ω es realmente el producto topológico de ω-copias del espacio discreto $2 = \{0, 1\}$.

[2] Algunos autores prefieren el término *magro* para referirse a los conjuntos de primera categoría.

Intuitivamente los subconjuntos densos los pensamos como conjuntos bien distribuídos y por ende topológicamente no serían considerados "pequeños".

Topológicamente, un concepto de "pequeñez" está dado en términos de conjuntos nada densos. Note que en la recta real, un conjunto A es nada denso, si dado cualquier intervalo abierto es posible encontrar un subintervalo del primero que ya no contiene puntos de A. Un ejemplo clásico de un subconjunto nada denso es el conjunto de Cantor. Así el conjunto de Cantor, C, debería ser considerado pequeño. No obstante, C tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$. Luego, C debería ser considerado como conjunto grande en términos de cardinalidad. Veamos que la densidad como concepto de "ser grande" es también muy engañosa.

¿Será cierto que si ponemos un intervalo abierto alrededor de cada $q \in \mathbb{Q}$ entonces podemos cubrir a $\mathbb{R}$? La respuesta a esta pregunta es negativa por la siguiente razón: si $I = (a, b)$ es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, la *longitud de* I es $\mu(I) = b - a$. Consideremos el conjunto $\mathbb{Q}$ y tomemos una enumeración $\{q_n : n \in \omega\}$ de este conjunto. Entonces alrededor de cada q_n elijamos un intervalo I_n tal que $\mu(I_n) \leq \frac{1}{2^n}$. Ello implica que, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(I_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. Por lo tanto, $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} I_n \neq \emptyset$. Dejamos al lector que verifique que de hecho este conjunto es no numerable.

El razonamiento anterior nos muestra que conjuntos como $\mathbb{Q}$ (es decir, numerables) tienen medida cero.

Definición 3.1. Un subconjunto X de $\mathbb{R}$ tiene *medida cero* si dado $\epsilon > 0$ existe una sucesión $\langle I_n : n \in \omega\rangle$ de intervalos abiertos tales que $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(I_n) < \epsilon$.

Al parecer podemos concluir que emplear la cardinalidad y la densidad de un conjunto como parámetro de decisión sobre su pequeñez no es buena. ¿Será posible emplear los conceptos de medida o categoría para decidir quién es "pequeño" en $\mathbb{R}$? Veamos a continuación que esa posibilidad tampoco es viable.

Queremos escribir al intervalo unitario $[0, 1]$ como la unión ajena de dos subconjuntos A y B que sean densos, que tengan la misma cardinalidad y que A sea de primera categoría y no tenga medida cero, mientras que B sea un conjunto de segunda categoría y tenga medida cero.

Dado $\epsilon > 0$, podemos elegir una sucesión de intervalos $\langle J_n : n \in \omega\rangle$ tales que $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{n\in\omega} J_n$ y además $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(J_n) < \epsilon$. Definamos $A(\epsilon) = [0, 1] \setminus \bigcup_{n\in\omega} J_n$. Entonces $A(\epsilon)$ es un subconjunto cerrado, no numerable y nada denso. De estas propiedades el ser nada denso es la menos evidente. Para ver que $A(\epsilon)$ es nada denso procedamos por contradicción. Supongamos que existe un intervalo $(a, b) \subseteq [0, 1]$ tal que $A(\epsilon)$ es denso en (a, b). Entonces $[a, b] \subseteq A(\epsilon)$ y, por lo tanto, $\mathbb{Q} \cap [a, b] \subseteq A(\epsilon)$, lo cual es una contradicción.

Pongamos $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} A(\frac{1}{n})$, entonces A es de primera categoría. Sea $B = [0, 1] \setminus A$. Puesto que $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq B$, entonces B es denso y B es de segunda categoría; pues en caso contrario, $A \cup B = [0, 1]$ sería de primera categoría, lo cual contradice el Teorema de Categoría de Baire.

Notemos ahora que, $\mu(A(\frac{1}{n})) > 1 - \frac{1}{n}$ y por lo tanto, $\mu(A) = 1$ ya que $\frac{1}{n} \to 0$. Lo anterior implica que $\mu(B) = 0$; pues $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = [0, 1]$. De aquí también se sigue que A es denso, pues en caso contrario B contendría algún intervalo no vacío.

Una aplicación interesante del conjunto $A(\epsilon)$ definido anteriormente es la que nos permite afirmar que existe un subconjunto no numerable de $\mathbb{R}$ que es compacto y que no contiene números racionales. Esto se debe a que $A(\epsilon)$ es un subconjunto cerrado, acotado y no numerable de $\mathbb{R}$ en el que todos sus elementos son números irracionales.

4. Conjuntos de medida fuertemente cero

Definición 4.1. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene *medida fuertemente cero* (m.f.c.) si dada cualquier sucesión de reales positivos $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$ existe una sucesión $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ de intervalos abiertos tales que:

1. $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$,
2. para cada $n \in \omega$ se tiene que $\mu(I_n) < \epsilon_n$.

Observemos que si X tiene medida fuertemente cero, entonces X tiene medida cero. Es fácil ver que todo conjunto numerable tiene medida fuertemente cero. Además, si $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$, cada uno con medida fuertemente cero, entonces $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ también tiene medida fuertemente cero. Para probar esta afirmación hagamos $X = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ y sea $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de reales positivos. Escribamos $\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$, donde cada N_n es infinito y $N_n \cap N_m = \emptyset$ si $n \neq m$.[3] Dada $n \in \omega$, como N_n es infinito, podemos usar sus elementos para elegir intervalos que cubran a A_n; es decir, existe una sucesión de intervalos $\langle I_m : m \in A_n \rangle$ tales que $\mu(I_m) < \epsilon_m$ para cada $m \in N_n$ y $A_n \subseteq \bigcup_{m\in N_n} I_m$. Juntando todas esas sucesiones de intervalos tendremos una cubierta de X; es decir, $X \subseteq \bigcup_{k\in\omega} I_k$. Esta última propiedad de la familia de conjuntos de medida fuertemente cero nos permite restringir nuestra atención a los subconjuntos de medida fuertemente cero del intervalo $[0, 1]$. Esto se debe a que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+1]$ y la familia de subconjuntos de medida fuertemente cero del intervalo $[0, 1]$ corresponde de manera natural a la familia de subconjuntos de medida fuertemente cero de cualquier otro intervalo cerrado, $[a, b]$.

Si comparamos a los conjuntos de medida cero con los conjuntos de medida fuertemente cero, vemos que ellos tienen propiedades muy similares. De hecho uno estaría tentado a conjeturar que los conceptos de medida cero y medida fuertemente cero son equivalentes. Veamos que no es así.

Teorema 4.2. *Supongamos que $X \subseteq [0, 1]$ tiene medida fuertemente cero. Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es continua, entonces $f[X]$ también tiene medida fuertemente cero.*

[3]Para convencerse de que esto es posible uno puede emplear, por ejemplo, el hecho de que ω y $\omega \times \omega$ son equipotentes.

Demostración. Sea $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de reales positivos. Como f es una función continua definida en un compacto, entonces f es uniformemente continua[4]. Así, a cada ϵ_n le corresponde un $\delta_n > 0$ con respecto a la continuidad uniforme de f. Elijamos intervalos I_{2n} para cada $n \in \omega$ con la propiedad de que $\mu(I_{2n}) < \delta_{2n}$ y tal que $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_{2n}$. Esto implica que, $f[X] \subseteq \bigcup_{n\in\omega} f[I_{2n}]$ y además, por la continuidad, $f[I_{2n}]$ son intervalos tales que $\mu(f[I_{2n}]) < \epsilon_{2n}$.

Sin embargo, los intervalos $f[I_{2n}]$ no son necesariamente abiertos. Al tomar J_{2n} como el interior del intervalo $f[I_{2n}]$, tenemos que $f[X] \setminus \bigcup_{n\in\omega} J_{2n}$ es a lo más numerable. Entonces elijamos apropiadamente intervalos J_{2n+1} con $\mu(J_{2n+1}) < \epsilon_{2n+1}$ tales que cubran ese posible subconjunto numerable de $f[X]$ que los intervalos J_{2n} no cubren. Así, $f[X] \subseteq \bigcup_{n\in\omega} J_n$ y $f[X]$ tiene medida fuertemente cero. ❑

Del teorema anterior obtenemos que hay conjuntos de medida cero que no tienen medida fuertemente cero.

Corolario 4.3. *El conjunto de Cantor no tiene medida fuertemente cero.*

Demostración. Basta con mostrar que el intervalo $[0,1]$ es imagen continua del conjunto de Cantor. La manera de ver esto no es difícil. Sabemos que el conjunto de Cantor es homeomorfo a 2^ω. Por otro lado, la función $\phi : 2^\omega \to [0,1]$ definida por $\phi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^{n+1}}$ es una función sobreyectiva y continua. Además, ϕ tiene una extensión continua a todo el intervalo $[0,1]$. ❑

De hecho puede demostrarse que ningún conjunto perfecto al contener una copia del conjunto de Cantor tiene medida fuertemente cero (ver [Kec95]).

Para iniciar nuestra búsqueda de un conjunto no numerable de números reales con medida fuertemente cero haremos una pausa y vamos a abstraer un poco para generalizar nuestra definición de medida fuertemente cero al ámbito de los espacios métricos. La experiencia nos ha enseñado que en muchas ocasiones la abstracción es el camino para buscar objetos concretos.

Recordemos que el diámetro de un subconjunto A de un espacio métrico (X,d) se define por $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$.

Definición 4.4. Un espacio métrico (X,d) tiene *medida fuertemente cero* si para toda sucesión $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$ de números positivos existe una sucesión $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ de subconjuntos de X tales que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ y $\mathrm{diam}(X_n) < \epsilon_n$, para todo $n \in \omega$.

Observemos primeramente que si un espacio métrico tiene medida fuertemente cero, entonces es separable. En efecto, si X tiene medida fuertemente cero, entonces para cada $n \in \omega$ existe una cubierta numerable de X por conjuntos con diámetro menor que $\frac{1}{n}$. Así tomando un punto,

[4]Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, para cada $x, y \in [0,1]$.

digamos $x_{n,m}$, de cada uno de esos conjuntos obtenemos un subconjunto $\{x_{n,m} : m, n \in \omega\}$ que es denso. El siguiente teorema nos dice que los espacios métricos con medida fuertemente cero son muy disconexos.

Definición 4.5. Un espacio métrico (X, d) es de dimensión cero si dado cualquier $x \in X$ y cualquier $\epsilon > 0$ existe un conjunto abierto y cerrado U tal que $x \in U \subseteq B(x, \epsilon)$.

Sin mucha dificultad puede establecerse que los espacios de dimensión cero son totalmente disconexos; es decir, que los únicos subconjuntos conexos son los que constan de sólo un punto.

Teorema 4.6 (Kuratowski). *Si (X, d) es un espacio métrico que tiene medida fuertemente cero entonces (X, d) es de dimensión cero.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Buscamos un subconjunto abierto y cerrado de la bola abierta $B(x, \epsilon)$ que contenga a x. Para esto, definamos $f : X \to \mathbb{R}$ como $f(y) = d(x, y)$, para toda $y \in X$. Tenemos entonces que f es uniformemente continua. Como en el caso del Teorema 4.2, podemos ver que $f[X]$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tiene medida fuertemente cero. Por lo tanto, $f[X]$ no puede contener ningún intervalo. Así, existe un r que satisface $0 < r < \epsilon$ y tal que $r \notin f[X]$. Definamos $U = f^{-1}([0, r))$. Entonces $U \subseteq B(x, \epsilon)$ y observemos que U es cerrado y abierto al mismo tiempo. ❑

La intención del siguiente teorema es ayudarnos en nuestra búsqueda de un subconjunto no numerable de números reales que tenga medida fuertemente cero. Además de eso, su demostración nos pareció interesante y quisimos incluirla aquí.

Teorema 4.7 (Carlson). *Si existe un espacio métrico no numerable y con medida fuertemente cero, entonces existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que es no numerable y tiene medida fuertemente cero.*

Para demostrar este teorema nos apoyaremos en el siguiente lema.

Lema 4.8. *Supóngase que (X, d) es un espacio métrico separable de cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$. Entonces existe un encaje $h : X \to \mathbb{R}$ y una constante M tal que*

$$| h(x) - h(x') | \leq M \cdot d(x, x'),$$

para todo $x, x' \in X$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la métrica de X es acotada. Sea $D = \{x_n : n \in \omega\}$ un subconjunto denso en X. Para cada $x \in X$ sea $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(x, x_n)}{n!} z^n$$

para $z \in \mathbb{R}$. Observemos que h_x es una función analítica. Tomemos en cuenta que $x \neq x'$ implica $h_x \neq h'_x$. Además, como h_x y h'_x son funciones analíticas, ellas pueden coincidir en a lo más una cantidad numerable de puntos.[5] Como la cardinalidad de X es estrictamente menor que la de $\mathbb{R}$, debe existir un $r \in \mathbb{R}$ de manera que $h_x(r) \neq h_{x'}(r)$ para todo $x, x' \in X$.

Definamos $h : X \to \mathbb{R}$ por $h(x) = h_x(r)$, para todo $x \in X$. Entonces para todo $x, x' \in X$ tenemos que:

$$\left|h(x) - h(x')\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|d(x, x_n) - d(x', x_n)|}{n!} r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(x, x')}{n!} r^n = d(x, x') \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}.$$

Pero $e^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$. Entonces tomando $M = e^r$ tenemos la constante buscada.

Dejamos al lector terminar los detalles de que h es un encaje topológico. ❐

Ahora iniciaremos la demostración del teorema que quedó pendiente.

Demostración del Teorema 4.7. Observemos que la demostración se remite a dos casos:

Caso 1. La Hipótesis del Continuo es falsa. En este caso $\aleph_0 < \aleph_1 < \mathfrak{c}$ y por hipótesis sabemos que existe un espacio métrico X que es no numerable y que tiene medida fuertemente cero. Como cualquier subespacio de un espacio métrico que tiene medida fuertemente cero también tiene medida fuertemente cero, sin pérdida de generalidad, supongamos que $|X| = \aleph_1$. Por el Lema 4.8, tenemos que existe un $h : X \to \mathbb{R}$ encaje que además es uniformemente continuo. Finalmente $h[X] \subseteq \mathbb{R}$ es no numerable y tiene medida fuertemente cero.

Caso 2. La Hipótesis del Continuo se cumple. En este caso lamentablemente vamos a tener que posponer la demostración. Esta parte se sigue directamente de los Teoremas 4.14 y 4.15. ❐

Comúnmente, el principal uso que se le da a la noción de categoría es en las demostraciones de existencia. El Teorema de Categoría de Baire (Teorema 2.3) nos da la posibilidad de mostrar la existencia de objetos matemáticos que serían difíciles de observar de otro modo. Pero el estudio de categoría sirve también para otro propósito. Desarrollar las teorías de medida y de categoría simultáneamente y poner atención tanto en sus similitudes como en sus diferencias nos conduce a ver cómo las dos teorías se iluminan una a la otra. Dado que la teoría de la medida es más extensa e importante, la utilidad de la teoría de categoría es, principalmente, dar luz a la teoría de la medida. En el siguiente teorema vemos cómo la categoría nos ayuda a caracterizar los conjuntos de medida fuertemente cero.

Recuerde que si queremos trabajar en el intervalo $[0, 1]$, entonces para $x, y \in [0, 1]$, por $x + y$ queremos decir $x + y$ si $x + y \leq 1$ y $x + y - 1$ en cualquier otro caso.

[5] Si g y f son funciones analíticas y si $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ tiene un punto de acumulación entonces $f = g$. Ver [Rud53, Theorem 8.5].

Lema 4.9. *Supóngase que $F \subseteq [0,1]$ es un subconjunto cerrado y nada denso y J es un subintervalo cerrado de $[0,1]$. Entonces, existe una familia finita $\mathcal{A}$ de subintervalos de J y $\epsilon > 0$ tal que para cada intervalo $I \subseteq [0,1]$ con $\mu(I) < \epsilon$ existe $J' \in \mathcal{A}$ tal que $(I + J') \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Como F es cerrado y nada denso, para cada $x \in [0,1]$ existe un intervalo abierto I_x con $x \in I_x$ y un intervalo cerrado $J_x \subseteq J$ tal que $(I_x + J_x) \cap F = \emptyset$.

Por la compacidad de $[0,1]$, existe conjunto finito $\{x_j : j \leq n\}$ tal que $\bigcup_{j \leq n} I_{x_j} = [0,1]$. Sea $\epsilon = \text{mín}\{\mu(I_{x_i} \cap I_{x_j}) : I_{x_i} \cap I_{x_j} \neq \emptyset\}$, y sea $\mathcal{A} = \{J_{x_j} : j \leq n\}$.

Si $I \subseteq [0,1]$ tiene longitud menor que ϵ, entonces existe $j \leq n$ de modo que $I \subseteq I_{x_j}$ y $I + J_{x_j} \subseteq I_{x_j} + J_{x_j} \subseteq [0,1] \setminus F$. ❑

Teorema 4.10 (Galvin et. al. y Miller)**.** *Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es de medida fuertemente cero si y sólo si para cada conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ de primera categoría se tiene que $M + X \neq \mathbb{R}$.*

Demostración. Notemos que $X + M \neq \mathbb{R}$ si y sólo si existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $(y + X) \cap M = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Supongamos que para todo conjunto cerrado y nada denso F, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $(y + X) \cap M = \emptyset$. Sea $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de reales positivos. Enumeremos a los números racionales como $\langle q_n : n \in \omega \rangle$ y sea $F = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \omega}(q_n - \epsilon_n, q_n + \epsilon_n)$.

Como F es cerrado y nada denso, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $(y + X) \cap F = \emptyset$, es decir $(y + X) \subseteq \bigcup_{n \in \omega}(q_n - \epsilon_n, q_n + \epsilon_n)$. Esto muestra que X tiene medida fuertemente cero.

($\Rightarrow$) Ahora supongamos que X tiene medida fuertemente cero y sea M un conjunto de primera categoría. Sea $\{F_n : n \in \omega\}$ una familia creciente de conjuntos cerrados nada densos de modo que $M \subseteq \bigcup_{n \in \omega} F_n$. Utilicemos el Lema 4.9 para definir inductivamente $T \subseteq \omega^{<\omega}$, una familia de intervalos cerrados $\{J_s : s \in T\}$ y un conjunto de reales $\{\epsilon_s : s \in T\}$ tales que:

1. Para cada $s, t \in T$, si $s \subseteq t$, entonces J_t es un subintervalo cerrado de J_s, y
2. para cada $s \in T$, si $I \subseteq [0,1]$ y $\mu(I) < \epsilon_s$, entonces existe $i \in \omega$ tal que si $t = s^\frown i$ y $t \in T$, entonces $(I + J_t) \cap F_{|s|} = \emptyset$.

Mostremos que podemos construir por inducción dicho subconjunto T: Supongamos que hemos construido s para $s \in T \cap \omega^k$ que satisface las dos condiciones de arriba. Si $s \in T$ y $|s| = k$, entonces aplicamos el Lema 4.9 a J_s y a $F_{|s|}$. Así obtenemos una familia $\mathcal{A}$ de subintervalos de J_s y un $\epsilon_s > 0$. Enumeremos $\mathcal{A}$ como $\{J_{s^\frown i} : i \in k_s\}$ para algún $k_s \in \omega$.

Para cada $n \in \omega$ definamos $\delta_n = \text{mín}\{\epsilon_s : s \in T \cap \omega^n\}$. Sea $\{I_n : n \in \omega\}$ una sucesión de intervalos tales que $\mu(I_n) < \delta_n$ y $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n$.

Por inducción es posible definir $f \in \omega^\omega$ tal que $f \restriction n \in T$ y f satisface que $(J_{f \restriction (n+1)} + I_n) \cap F_n = \emptyset$, para toda $n \in \omega$. Si $x \in \bigcap_{n \in \omega} J_{f \restriction n}$, entonces $(x + \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{n > m} I_n) \cap \bigcup_{n \in \omega} F_n = \emptyset$. Con esto terminamos la demostración. ❑

Para contar con un conjunto no numerable de números reales que sí tiene medida fuertemente cero necesitaremos hacer una construcción por Inducción Transfinita. Dado que quizá este método de construcción sea ajeno a muchos de nuestros lectores, vamos a pausar un poco nuestro estudio de los conjuntos de medida fuertemente cero para introducir las ideas principales del método. El método consiste primeramente en tener un conjunto bien ordenado en el cual la inducción se va a llevar a cabo. La importancia de contar con un buen orden para un conjunto es que, siguiendo el ejemplo de $\mathbb{N}$, podemos disponer de un esquema que nos proporciona el mínimo elemento que cumple una determinada propiedad. El principio de inducción asociado a un conjunto bien ordenado arbitrario es el *Principio de Inducción Transfinita*:

Teorema 4.11. *Sea $(W,<)$ un conjunto bien ordenado y sea P una propiedad legítima*[6] *de los elementos de W. Supongamos que para cada $w \in W$, si para todo $x < w$, $P(x)$ se cumple, entonces $P(w)$ se cumple. Entonces $P(w)$ se cumple para cada $w \in W$.*

Demostración. Procedamos por contradicción; es decir, supongamos que la conclusión es falsa. Sea $X = \{w \in W : \neg P(w)\}$. Por nuestro supuesto, este conjunto X no es vacío. Puesto que $(W, \leq)$ es un conjunto bien ordenado existe w_0 elemento mínimo de X. Sabemos que $x \notin X$ para cada $x < w_0$; es decir, para cada $x < w_0$, $P(x)$ se cumple y así por hipótesis inductiva, $P(w_0)$ se cumple también. Lo cual es una contradicción. ❏

Para ilustrar el uso de este método antes de usarlo para nuestros propósitos veremos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4.12. Es posible, para cada número real x, encontrar una sucesión estrictamente creciente $s(x)$ tal que $s(x)$ converge a x y de tal suerte que si $x \neq x'$ entonces $s(x)$ y $s(x')$ no tienen términos en común.

Demostración. Podemos listar todos los elementos de $\mathbb{R}$ como $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. La propiedad $P(\alpha)$ a emplear es: "$s(x_\alpha)$ es estrictamente creciente, converge a x_α y para cualesquiera $\gamma < \beta \leq \alpha$, $s(x_\beta)$ y $s(x_\gamma)$ no tienen términos en común", para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.

Para mostrar que $P(\alpha)$ se cumple para toda $\alpha < \mathfrak{c}$, basta ver que se verifica la hipótesis inductiva. Para probar nuestra hipótesis inductiva, necesitamos mostrar que si suponemos que hemos elegido sucesiones $s(x_\beta)$ tales que $P(\beta)$ se cumple para toda $\beta < \alpha$, entonces podemos elegir la sucesión $s(x_\alpha)$ con la propiedad de no compartir términos con las sucesiones hasta ahora elegidas para $\beta < \alpha$.

[6] Es decir, P es una proposición abierta sobre el conjunto W que no es del tipo: "Sea n un número natural que pueda ser expresado en menos de 40 palabras".

El peor caso que podría ocurrir en la elección de $s(x_\alpha)$ es que hayamos tomado todos los elementos de un intervalo $(x_\alpha - \delta, x_\alpha)$, para algún $\delta > 0$. Pero esto no es posible porque cualquier segmento inicial de $\mathfrak{c}$ tiene cardinalidad estrictamente menor que $\mathfrak{c}$. Si $\kappa = |\{\beta \in \mathfrak{c} : \beta < \alpha\}|$ entonces sólo hemos elegido $\kappa \cdot \aleph_0 = \kappa < \mathfrak{c}$, elementos de $\mathbb{R}$. Entonces podemos elegir una sucesión que converja a x_α que no comparta términos con las ya definidas hasta la etapa α. ❏

Con la Inducción Transfinita en nuestro poder, procedamos a construir el conjunto no numerable de medida fuertemente cero. Para esto introduzcamos los siguientes dos tipos de conjuntos que pueden considerarse duales.

Definición 4.13. Sea X un subconjunto no numerable de números reales. X es un *conjunto de Luzin* si para cada conjunto M de primera categoría se tiene que $M \cap X$ es a lo más numerable. X es un *conjunto de Sierpiński* si para cada conjunto N de medida cero se tiene que $N \cap X$ es a lo más numerable.

Teorema 4.14. *Si X es un conjunto de Luzin, entonces X tiene medida fuertemente cero.*

Demostración. Sea $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de reales positivos. Deseamos encontrar una sucesión de intervalos abiertos $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ que cubren a X y que tienen la propiedad de que $\mu(I_n) < \epsilon_n$ para cada $n \in \omega$.

Enumeremos a los números racionales como $\{q_n : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$, sea I_n un intervalo abierto tal que $q_n \in I_n$ y que además $\mu(I_n) < \epsilon_{2n}$. Notemos que $M = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \omega} I_n$ es cerrado y nada denso. Por lo tanto, M es de primera categoría. Como X es un conjunto de Luzin, entonces $X \cap M$ es a lo más numerable, digamos $X \cap M = \{x_n : n \in \omega\}$. Sean J_n intervalos tales que $x_n \in J_n$ y $\mu(J_n) < \epsilon_{2n+1}$, para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, $X \subseteq (\bigcup_{n \in \omega} I_n) \cup (\bigcup_{n \in \omega} J_n)$. ❏

Finalmente mostremos cómo construir un conjunto de Luzin. Esta construcción data de 1914 y fue hecha por el matemático ruso N. Luzin en un artículo titulado *Théorie des fonctions*. Aunque se dice que P. Mahlo ya había publicado en 1913 la misma construcción.

Teorema 4.15. *CH implica que existe un conjunto de Luzin.*

Demostración. Notemos que en $\mathbb{R}$ existen tantos subconjuntos abiertos como números reales y, por lo tanto, también existen $\mathfrak{c}$ subconjuntos cerrados. Sea $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una enumeración de todos los conjuntos cerrados y nada densos de $\mathbb{R}$ (aquí estamos usando CH). Vamos a construir por inducción a nuestro conjunto de Luzin. Supongamos que hemos elegido x_β para $\beta < \alpha$ de tal manera que para cualesquiera $\beta < \gamma < \alpha$ tenemos que $x_\beta \notin F_\gamma$. Ahora queremos elegir un nuevo elemento x_α para el que será nuestro conjunto de Luzin.

Lo peor que podría suceder es que no tengamos nuevos números reales para elegir; es decir, que $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup_{\beta \leq \alpha} F_\beta = \mathbb{R}$. Sin embargo, esto no es posible porque la unión de los conjuntos del lado izquierdo es de primera categoría y por el Teorema de Categoría de Baire tenemos que el conjunto de los números reales es de segunda categoría. Por lo tanto, podemos elegir un elemento

$$x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup_{\beta \leq \alpha} F_\beta).$$

Es claro que nuestra hipótesis inductiva va a ser preservada de este modo.

Finalmente, sea $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Veamos que en realidad X es un conjunto de Luzin. En efecto, sea $M = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, donde A_n es cerrado y nada denso. Nótese que para ver que $X \cap M$ es a lo más numerable basta con demostrar que $X \cap A_n$ lo es, para cada $n \in \omega$.

Sea $n \in \omega$. Como $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una enumeración de todos los subconjuntos cerrados y nada densos de $\mathbb{R}$, debe existir un $\alpha < \omega_1$ tal que $A_n = F_\alpha$. Por construcción sabemos que $X \cap F_\alpha \subseteq \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Esto establece que $X \cap F_\alpha$ es numerable. ❏

La Hipótesis del Continuo también implica que existe un conjunto de Sierpiński, esto lo dejamos como un ejercicio para el lector. Creemos que es valioso comentar que asimismo es consistente con la negación de la Hipótesis del Continuo que existen conjuntos de Luzin y de Sierpiński. Así que cabe la posibilidad que no todo conjunto de Luzin o de Sierpiński tenga cardinalidad ω_1. Esto y otras propiedades de este tipo de conjuntos puede consultarse en [BJ95]. Fue un hecho notable que ya en 1938 F. Rothberger demostró que cardinalidad ω_1 es lo más que uno puede obtener si existen simultaneamente conjuntos de Luzin y conjuntos de Sierpiński.

Para demostrar lo anterior primero observemos que si X es subconjunto de $\mathbb{R}$ de segunda categoría y $|X| = \kappa$, entonces $\mathbb{R}$ puede escribirse como unión de κ conjuntos de medida cero, es decir $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha<\kappa} N_\alpha$ tales que $\mu(N_\alpha) = 0$. Puesto $|X| = \kappa$ y X es de segunda categoría, existe un conjunto B que tiene medida cero y tal que $\mathbb{R} \setminus B$ es de primera categoría.[7] Tomemos $\{x + B : x \in X\}$, esta es una familia de κ conjuntos de medida cero. Mostremos que $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in X}(x + B)$. Procedamos por contradicción. Supóngase que $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{x\in X}(x + B) \neq \emptyset$. Entonces existe $z \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{x\in X}(x + B)$, o equivalentemente: $(z - B) \cap X = \emptyset$. Por lo tanto, $X \subseteq \mathbb{R} \setminus (z - B)$ y así obtenemos que X es de primera categoría, lo cual es una contradicción.

Teorema 4.16 (Rothberger)**.** *Si X es un conjunto de Luzin y Y es un conjunto de Sierpiński, entonces $|X| = |Y| = \omega_1$.*

Demostración. Como X es un conjunto de Luzin, entonces X no es de primera categoría. Como subconjuntos de conjuntos de Luzin son también conjuntos de Luzin, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|X| = \omega_1$. Por nuestra observación precedente a este teorema, existen conjuntos $\{N_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de medida cero tales que $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} N_\alpha$. Puesto que Y es un conjunto de Sierpiński, entonces $|Y \cap N_\alpha| \leq \omega$ para cada $\alpha < \omega_1$. Por lo tanto, $|Y| = \omega_1$.

[7]Vease la construcción del conjunto B al final de la tercera sección.

La demostración de que cualquier conjunto de Luzin debe tener cardinalidad ω_1 es similar y la dejamos para el lector. $\square$

Ahora veamos el comportamiento de las funciones continuas sobre conjuntos de Luzin. Le pedimos al lector que contraste el siguiente resultado con el que presentaremos en la última sección, Teorema 6.2.

Teorema 4.17. *Sea X conjunto de Luzin y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f[X]$ tiene medida cero.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $\{x_n : n \in \omega\} \subset X$ denso en X. Considere una familia de intervalos abiertos $\{I_n : n \in \omega\}$ tales que, para cada $n \in \omega$, $f(x_n) \in I_n$ y que además $\sum_{n\in\omega} \mu(I_n) < \epsilon$.

Afirmación 4.18. $|f[X] \setminus \bigcup_{n\in\omega} I_n| \leq \aleph_0$.

Procedamos por contradición. Supóngase que $|X \setminus \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(I_n)| > \aleph_0$. Puesto que $\bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(I_n)$ es un subconjunto abierto en X, entonces existe un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}$ tal que $U \cap X = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(I_n)$.

Por otra parte tenemos que,

$$X \setminus U = X \cap (\mathbb{R} \setminus U) = X \cap (\mathbb{R} \setminus (U \cap X)) \subseteq X \cap [\mathbb{R} \setminus (U \cup \mathbb{R} \setminus \overline{X})].$$

Basta demostrar que $[\mathbb{R} \setminus (U \cup \mathbb{R} \setminus \overline{X})]$ es de primera categoría. Dado que $U \cup \mathbb{R} \setminus \overline{X}$ es abierto, es suficiente demostrar que $(U \cup \mathbb{R} \setminus \overline{X})$ es denso en $\mathbb{R}$. Lo cual es cierto porque $U \cap X$ es denso en X.

Por lo tanto, $X \setminus U$ es a lo más numerable, lo cual es una contradicción. $\square$

Aunque nosotros hemos presentado un conjunto no numerable de números reales que tiene medida fuertemente cero, nos hemos valido de una hipótesis muy fuerte: CH. En 1919 E. Borel intentó clasificar todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida cero. En su trabajo él introdujo la clase de conjuntos de medida fuertemente cero y enunció su famosa conjetura:

Conjetura de Borel: Todo conjunto de medida fuertemente cero es numerable.

Un conjunto de números reales X *está concentrado* sobre un conjunto D si y sólo si para cualquier conjunto abierto U, si $D \subseteq U$, entonces $X \setminus U$ es numerable. Sierpiński demostró que cada conjunto concentrado sobre un conjunto numerable tiene medida fuertemente cero, Luzin demuestra que es posible que existan conjuntos no numerables de medida fuertemente cero.

Por otra parte F. Hausdorff demostró que existen conjuntos no numerables que tienen medida universalmente cero. Un subconjunto X de $[0,1]$ *tiene medida universalmente cero* si para todo homeomorfismo $f : [0,1] \to [0,1]$ se tiene que $f[X]$ tiene medida cero. Esto se acercaba a establecer la Conjetura de Borel porque ya era bien conocido que si X tiene medida fuertemente cero, entonces X tiene medida universalmente cero, y si X tiene medida universalmente cero, entonces X tiene medida cero. Sin embargo, tuvieron que pasar los años para que hasta 1977, R. Laver publicara su famoso resultado. Una demostración moderna puede hayarse en [BJ95]; sin embargo, la original que aparece en el artículo original de Laver [Lav76] también sigue siendo interesante.

Teorema 4.19 (Laver)**.** *Es consistente con ZFC que cada conjunto de medida fuertemente cero es numerable.*

Para terminar esta sección vamos a introducir un nuevo tipo de conjuntos especiales. Estos conjuntos fueron los primeros conjuntos especiales de números reales que se conocieron. Fueron introducidos a principios del siglo XX por el matemático alemán F. Bernstein.

Definición 4.20. Un conjunto B de números reales se llama de *Bernstein* si B es no numerable y para cada subconjunto cerrado y no numerable F de $\mathbb{R}$ se tiene que $B \cap F \neq \emptyset$ y además $F \nsubseteq B$.

Recordemos que la familia de todos los subconjuntos cerrados y no numerables tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Además, si E es un subconjunto no numerable del tipo G_δ, entonces E contiene un cerrado no numerable que es homeomorfo al conjunto de Cantor (ver [Oxt80, Lemma 5.1]). Por lo tanto, E tiene la cardinalidad del continuo. De aquí se sigue que cualquier subconjunto cerrado no numerable de números reales tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Teorema 4.21. *Existe $B \subseteq \mathbb{R}$ que es de Bernstein.*

Demostración. Construyamos $B = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ conjunto de Bernstein usando inducción. Sea $\{F_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados y no numerables de $\mathbb{R}$. Supóngase que ya hemos construído x_β y y_β, para cada $\beta < \alpha$ tales que:

1. $x_\beta \in F_\beta$,
2. $y_\beta \in F_\beta$,
3. $x_\beta \neq x_\gamma$ para todo $\gamma < \beta$.

Para terminar la demostración hay que escoger a x_α y ver que se preservan las hipótesis. Fijémonos en $F_\alpha \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Queremos asegurarnos que este conjunto es no vacío. En efecto, él no es vacío porque F_α tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ por los comentarios antes del teorema. Entonces podemos elegir con mucha libertad

$$x_\alpha, y_\alpha \in F \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$$

con $x_\alpha \neq y_\alpha$. No es difícil ver que las hipótesis inductivas se preservan.

Ahora vamos a verificar que nuestro conjunto es de Bernstein. Sea F un cerrado no numerable. Entonces existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $F = F_\alpha$. Claramente se satisfacen $x_\alpha \in F_\alpha \cap B \neq \emptyset$ y $y_\alpha \in F_\alpha \setminus B$. Por lo tanto B sí es un conjunto de Bernstein. ❑

Como una aplicación sencilla de este tipo de conjuntos, veamos que cualquier conjunto de Bernstein no es medible según Lebesgue. Recordemos que $X \subseteq \mathbb{R}$ es medible según Lebesgue si $X = F \cup N$ donde F es un subconjunto de Borel y N es un conjunto de medida cero.

Teorema 4.22. *Si B es un conjunto de Bernstein, entonces B no es medible.*

Demostración. Nótese en primer lugar que según la construcción de B, su complemento es también un conjunto de Bernstein. Supóngase que B es medible, entonces vamos a ver que la medida de B es cero. Si B no tiene medida cero, entonces existe K subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ tal que K no tiene medida cero y $K \subseteq B$. Pero entonces K no puede ser numerable y esto contradice que B es un conjunto de Bernstein.

El mismo razonamiento muestra que $\mathbb{R} \setminus B$ también debe tener medida cero, lo cual es imposible. Por lo tanto, B no es medible. ❑

Sin el Axioma de Elección es posible que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ sean medibles; es decir, si quitamos el axioma de elección no es posible demostrar que existan conjuntos no medibles. Este es un viejo teorema de Solovay que extrañamente tiene relación con los llamados cardinales grandes.

Comentarios de la sección. Los siguientes comentarios pueden consultarse con mayor amplitud en [Mil84] y en [BJ95].

$\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$ implica que no existen conjuntos de Luzin y que no existen conjuntos de Sierpiński. MA implica que cualquier conjunto de cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$ tiene medida fuertemente cero, y $\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$ implica que existe un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que tiene medida fuertemente cero. La suposición de que $\mathfrak{b} = \omega_1$ también implica que existe un conjunto no numerable de números reales que tiene medida fuertemente cero. Es consistente con ZFC que existan subconjuntos no numerables de $\mathbb{R}$ que tienen medida fuertemente cero pero que ningún subconjunto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ tiene medida fuertemente cero.

5. El conjunto mágico

Si D es un subconjunto denso en un espacio métrico X y f y g son funciones continuas que coinciden sobre D, es un ejercicio común demostrar que las funciones son iguales.[8] Podríamos preguntarnos si reemplazando la condición de que las funciones coincidan sobre D por la condición

[8] De aquí se sigue, por ejemplo que si X es un espacio métrico separable, entonces $|C(X)| = \mathfrak{c}$.

$f[D] = g[D]$ también obtenemos que $f = g$. Hay un ejemplo fácil que nos muestra que esto no es así: Tome $D = \mathbb{Q}$ y considere sobre $\mathbb{R}$ a la función identidad y g dada por $g(x) = x + 1$.

Nuestra siguiente pregunta será entonces: ¿Podremos encontrar un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ que sea lo suficientemente complicado tal que si $f[M] = g[M]$ entonces $f = g$ para todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$? Lamentablemente esto no es posible, como fue establecido por M. Burke y K. Ciesielski en [BC97]. Sin embargo, si uno se restringe a las funciones que no son constantes sobre ningún intervalo, entonces es posible que tal conjunto M exista. El objetivo de esta sección es mostrar la construcción de uno de tales conjuntos asumiendo la Hipótesis del Continuo.

Definición 5.1. Sea X un espacio métrico y sean $f, g \in C(X)$. Decimos que g es una *truncación* de f si g es constante sobre cada componente conexa de $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$.

Recordemos que dados dos espacios métricos X, Y y una función continua $f : X \to Y$ las fibras de f son los conjuntos de la forma $f^{-1}(y)$ con $y \in Y$.

Teorema 5.2 (Berarducci y Dikranjan)**.** *Sea X un espacio métrico separable. Entonces existe $M \subseteq X$ tal que para cada $f, g \in C(X)$, si f tiene fibras numerables y $g(M) \subseteq f(M)$, entonces g es una truncación de f. Más aún, si $H \subseteq X$ es numerable, podemos elegir M tal que $M \cap H = \emptyset$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{(f, g) \in C(X) \times C(X) : f$ tiene fibras numerables y g no es truncación de $f\}$. Como X es separable tenemos que, $|C(X)| = \mathfrak{c}$ y por lo tanto, $|\mathcal{C}| \leq \mathfrak{c}$; notemos además que si fijamos f y variamos g sobre todas las funciones constantes obtenemos que $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$. Esto nos da la posibilidad de que enumeremos $\mathcal{C} = \{(f_\alpha, g_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$. A continuación mostraremos que existe $M \subseteq X$ tal que para cada $(f, g) \in \mathcal{C}$ se cumple que $g(M) \nsubseteq f(M)$; una vez mostrado esto podemos concluir la demostración, puesto que al tomar dos funciones cualesquiera $f, g \in C(X)$ tales que $g(M) \subseteq f(M)$ obtenemos que, $(f, g) \notin \mathcal{C}$ y por lo tanto, g es truncación de f.
Construyamos M por pasos mediante recursión transfinita. Supongamos que hemos elegido correctamente m_β para cada $\beta < \alpha < \mathfrak{c}$, ahora necesitamos encontrar m_α. Consideremos la función g_α de nuestra enumeración. Como g_α no es truncación de f_α, existe una componente conexa U_α de $\{x \in X : f_\alpha(x) \neq g_\alpha(x)\}$ tal que g_α es no constante sobre U_α. Elijamos m_α de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

1. $m_\alpha \in U_\alpha$;
2. $m_\alpha \notin H$;
3. $m_\alpha \notin \bigcup_{\gamma<\alpha} f_\gamma^{-1}(g_\gamma(m_\gamma))$;
4. $g_\alpha(m_\alpha) \notin \{f_\alpha(m_\gamma) : \gamma < \alpha\}$.

Esto es posible porque $|U_\alpha| = \mathfrak{c}$, H es un conjunto numerable, $|\alpha| < \mathfrak{c}$ y además las fibras de las f_γ son numerables; por lo tanto,

$$\left| U_\alpha \setminus \left(\{m_\gamma : \gamma < \alpha\} \cup H \cup \bigcup_{\gamma<\alpha} f_\gamma^{-1}(g_\gamma(m_\gamma)) \right) \right| = \mathfrak{c}.$$

Por otro lado, dado que g es continua y U_α es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, se tiene que $g(U_\alpha)$ es conexo y en consecuencia $|g(U_\alpha)| = \mathfrak{c}$. Así, basta tomar como m_α a cualquier elemento m de $U_\alpha \setminus (\{m_\gamma : \gamma < \alpha\} \cup \bigcup_{\gamma<\alpha} f_\gamma^{-1}(g_\gamma(m_\gamma)) \cup H)$ tal que $g(m) \notin \{f_\alpha(m_\gamma) : \gamma < \alpha\}$.

Sea $M = \{m_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Claramente este conjunto es disjunto de H. Para terminar la demostración es suficiente con mostrar que $g_\alpha(m_\alpha) \notin f_\alpha(M)$. Procedamos por contradicción, es decir supongamos que $g_\alpha(m_\alpha) \in f_\alpha(M)$. Entonces existe al menos un $\gamma < \mathfrak{c}$ tal que

$$g_\alpha(m_\alpha) = f_\alpha(m_\gamma). \tag{5.1}$$

Entonces existen tres posibles casos:

1. Si $\alpha = \gamma$, entonces $g_\alpha(m_\alpha) = f_\alpha(m_\alpha)$; lo cual contradice el hecho de que $m_\alpha \in U_\alpha$.
2. Si $\alpha < \gamma$, entonces usando (5.1) tenemos que, $m_\gamma \in f_\alpha^{-1}(g_\alpha(m_\alpha))$ contradiciendo la tercera condición.
3. Si $\alpha > \gamma$, entonces por (5.1) obtenemos que, $g_\alpha(m_\alpha) = f_\alpha(m_\gamma)$, lo cual contradice la cuarta condición.

Con esto se termina la demostración. ❑

En esta prueba fue fundamental usar el hecho de que las fibras son numerables. Ahora usando el procedimiento del Teorema 5.2 mostraremos una variación del mismo usando que las fibras son nada densas y asumiendo la Hipótesis del Continuo CH.

Teorema 5.3 (Berarducci y Dikranjan)**.** *CH implica que existe un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ tal que para cada $f, g \in C(\mathbb{R})$ no constantes sobre cada conjunto abierto, si $g(M) \subseteq f(M)$, entonces $f = g$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{(f,g) \in C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) : f \text{ y } g \text{ tienen fibras nada densas y } f \neq g\}.$$

Este conjunto lo podemos enumerar como $\{(f_\alpha, g_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Obsérvese que el hecho de que f tiene fibras nada densas es equivalente a decir que la función no toma valores constantes sobre cada conjunto abierto. Tomemos $U_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f_\alpha(x) \neq g_\alpha(x)\}$ y mostremos que es abierto en $\mathbb{R}$: Sea $x \in U_\alpha$, entonces $f_\alpha(x) \neq g_\alpha(x)$ y como f_α, g_α son continuas existe una vecindad V de x tal que $f_\alpha(V) \cap g_\alpha(V) = \emptyset$. Esto implica que, $V \subseteq U_\alpha$ y por lo tanto, U_α es abierto. Por hipótesis obtenemos que g_α es no constante sobre U_α. Puesto que U_α es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, U_α no puede ser numerable. Ello implica que, $|U_\alpha| = \omega_1$. Por lo tanto, podemos definir $M = \{m_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de forma tal que m_α satisface lo siguiente:

1. $m_\alpha \in U_\alpha$;
2. $m_\alpha \notin \bigcup_{\gamma<\alpha} f_\gamma^{-1}(g_\gamma(m_\gamma))$;
3. $g_\alpha(m_\alpha) \notin \{f_\alpha(m_\gamma) : \gamma < \alpha\}$.

La primera condición se cumple porque U_α es no numerable. Para la segunda condición usemos que $|\alpha| = \omega$, que $f_\gamma^{-1}(g_\gamma(m_\alpha))$ es nada denso y que la unión numerable de conjuntos nada densos es de primera categoría. Lo anterior implica que podemos elegir $m_\alpha \in \mathbb{R}\setminus \bigcup_{\gamma<\alpha} f^{-1}(g_\gamma(m_\gamma))$ tal que $g_\alpha(m_\alpha) \notin \{f_\alpha(m_\gamma) : \gamma < \alpha\}$ puesto que $\mathbb{R}\setminus \bigcup_{\gamma<\alpha} f^{-1}(g_\gamma(m_\gamma))$ es de segunda categoría y, por lo tanto, de cardinalidad ω_1. Es importante hacer notar que en esta parte hemos usado la Hipótesis del Continuo. ❏

Definición 5.4. Al conjunto M construido en el Teorema 5.3 se le conoce como *conjunto mágico.*

Un conjunto mágico debe ser denso. En efecto, si ocurriera que M es un conjunto mágico que no intersecta un intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ entonces tomando otro intervalo (c, d) ajeno al primero, podríamos definir una función f que sea idénticamente cero fuera de (c, d) y nunca constante en algún subintervalo de (c, d). De manera similar se define una función g con las mismas características pero cambiando al intervalo (a, b) en lugar del (c, d). Entonces $g[M] \subseteq f[M]$ pero $f \neq g$. Por lo tanto M debe ser denso.

Por razones de espacio vamos a incluir sin demostración el siguiente teorema que habla más de la estructura topológica de un conjunto mágico. La demostración de este resultado y más información puede consultarse en [BC97].

Teorema 5.5. *Si M es un conjunto mágico y U es cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, entonces $M \cap U$ no es de primera categoría.*

Comentarios de la sección. M. Burke y K. Ciesielski demostraron que para la familia de funciones diferenciables no es necesario usar axiomas adicionales para establecer la existencia de un conjunto mágico respecto de esa clase de funciones. Puede examinarse la demostración del Teorema 5.3 y observar que la propiedad verdaderamente importante que se usó es que $\mathbb{R}$ no puede cubrirse con menos de $\mathfrak{c}$ conjuntos de primera categoría. Así en la demostración, CH puede substituirse por MA. Por otra parte, es consistente con ZFC que no existan conjuntos mágicos; esto fue establecido por K. Ciesielski y S. Shelah en [CS99].

6. $\mathbb{R}$ puede ser imagen continua de todos los subconjuntos no numerables de uno de sus subconjuntos

El siguiente es un viejo resultado de Sierpiński. El resultado lo emplearemos para construir el conjunto que da título a esta última sección. La demostración que presentamos a continuación es una modificación de una que aparece en [BS54].

Teorema 6.1 (Sierpiński)**.** *CH implica que para cada $n \in \omega$ existe una función f_n tal que para cada $Y \subseteq \omega_1$ no numerable existe $n_0 \in \omega$ tal que para todo $n > n_0$ se tiene que $f_n[Y] = \omega_1$.*

Demostración. Obsérvese que la cardinalidad de todas las sucesiones en ω_1 es $\mathfrak{c}$.[9] CH implica que $|\omega_1^\omega| = \omega_1$. Así, podemos enumerar todas las sucesiones en ω_1 como

$$\omega_1^\omega = \{t^\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Para cada $\alpha < \omega_1$, enumeramos la sucesión t^α como

$$t^\alpha = \{t_0^\alpha, t_1^\alpha, \dots, t_n^\alpha, \dots\}.$$

Asimismo, usando CH podemos listar todas las sucesiones crecientes de números naturales por

$$\omega^\omega = \{s_\beta : \beta < \omega_1\}.$$

Para cada $\omega \leq \alpha < \omega_1$, definamos la sucesión infinita de números ordinales $\xi^\alpha = \langle \xi_0^\alpha, \xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \dots\rangle$ de la siguiente manera. Dado que $\alpha < \omega_1$ podemos escribir

$$\alpha = \{\rho_0(\alpha), \rho_1(\alpha), \rho_2(\alpha), \dots\}.$$

De manera análoga se puede reenumerar el conjunto $\{s_\beta : \beta < \alpha\}$ como $\{z_i(\alpha) : i \in \omega\}$, en donde $z_i(\alpha) = \langle m_0^i(\alpha), m_1^i(\alpha), \dots, m_k^i(\alpha), \dots\rangle$. Ahora consideremos una sucesión doble $\langle r_j^i(\alpha) : i, j \in \omega\rangle$ tal que $r_j^i(\alpha) \neq r_{j'}^{i'}(\alpha)$ si $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ y además, para cada $i < \omega$, $r_j^i(\alpha) = m_k^i(\alpha)$ para algún $k < \omega$.[10] Entonces definamos

$$\xi_n^\alpha = \begin{cases} \rho_i(\alpha), & \text{si } n = r_j^i(\alpha)\ ; \\ 0, & n \neq r_j^i;\ i, j \in \omega. \end{cases}$$

Finalmente, definamos las funciones deseadas. Para cada $k \in \omega$ definamos $f_k : \omega_1 \to \omega_1$ por $f_k(\alpha) = t_k^{\xi_k^\alpha}$, para cada $\alpha < \omega_1$. Afirmamos que la familia de funciones $\{f_k : k \in \omega\}$ satisface las condiciones del teorema.

[9] Esto se debe a que $2 < \aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ implica que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_1^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \mathfrak{c}$.

[10] Para construir la sucesión doble se puede usar inducción finita. La idea principal es que a cierta etapa de la construcción hemos elegido una cantidad finita de distintos $r_j^i(\alpha)$ y tenemos a nuestra disposición infinitos elementos para elegir los siguientes r_j^i's.

Probemos esta afirmación por contradicción. Supóngase que para algún conjunto no numerable N de ω_1 hay una cantidad infinita de funciones f_k tales que $f_k[N] \neq \omega_1$. Esto implica que existe una sucesión creciente $\langle m_0, m_1, m_2, \ldots \rangle \in \omega^\omega$ y una sucesión $\langle y_i : i \in \omega \rangle \in \omega_1^\omega$ tales que: Para cada $k \in \omega$, existe $\alpha_k \in N$ con la propiedad de que $f_{m_k}(\beta) \neq y_k$ para cada $\beta \in N \backslash \alpha_k$.

Para estas sucesiones existen $\beta, \mu < \omega_1$ tales que $s_\beta = \langle m_i : i \in \omega \rangle$ y $t^\mu = \langle y_i : i \in \omega \rangle$. Sea $\alpha > \text{máx}\{\omega, \alpha_k, \beta, \mu\}$. Puesto que $\mu < \alpha$ y $\alpha = \{\rho_0(\alpha), \rho_1(\alpha), \ldots\}$, existe $j < \omega$ tal que $\mu = \rho_j(\alpha)$. También se tiene que existe $i < \omega$ tal que $s_\beta = z_i(\alpha)$, porque $s_\beta \in \{z_l(\alpha) : l < \alpha\}$. La sucesión $\langle r_0^i(\alpha), r_1^i(\alpha), r_2^i(\alpha), \ldots \rangle$ tiene la propiedad de que, para algún $k < \omega$, $r_j^i(\alpha) = m_k^i(\alpha)$ y dado que $z_i(\alpha) = \langle m_l^i(\alpha) : l < \omega \rangle$ es estrictamente creciente obtenemos que, $m_k^i(\alpha) = m_k$. Esto implica que $\xi_n^\alpha = \xi_{r_j^i}^\alpha = \rho_j(\alpha) = \mu$. Por lo tanto, $f_{m_k}(\alpha) = t_{m_k}^{\xi_{m_k}^\alpha} = t_{m_k}^\mu = y_k$. Puesto que esto es válido para cada $\alpha > \text{máx}\{\omega, \alpha_k, \beta, \mu\}$ y k sólo depende de α, entonces tales α no pueden pertenecer a N. Es decir, $N \subseteq \alpha_k$ y así N es numerable, lo cual es una contradicción. ❏

Pasemos a presentar el principal teorema de la sección. Es trivial darse cuenta que $\mathbb{R}$ no puede ser imagen continua de muchos de sus subconjuntos. Por ejemplo, del Teorema 4.17 se sigue que $\mathbb{R}$ no puede ser imagen continua de un conjunto de Luzin.

Teorema 6.2 (Miller)**.** *CH implica que existe un conjunto no numerable de números reales X tal que para todo $Y \subseteq X$ no numerable se tiene que existe una función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ con $f[Y] = \mathbb{R}$.*

Demostración. Por el Teorema de Sierpiński (Teorema 6.1) tenemos que existe una sucesión de funciones $f_n : \omega_1 \to \omega_1$ tales que siempre que $Z \subseteq \omega_1$ es no numerable se tiene que existe $n_0 \in \omega$ tal que $f_n[Z] = \omega_1$, para todo $n \geq n_0$. Usando CH podemos listar todos los elementos de $\mathbb{R}$ como $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. Denotemos por $\mathcal{I}$ a la familia de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ con extremos racionales. Entonces $\mathcal{I}$ es numerable. Sea $\mathcal{E} = \{E_m : m \in \omega\}$ una enumeración de la familia de todos los posibles $\{\alpha < \omega_1 : x_{f_n(\alpha)} \in I\}$ para $n \in \omega$ y $I \in \mathcal{I}$.

Definimos una función $f : \omega_1 \to 2^\omega$ por $f(\alpha) = f_\alpha$, para todo $\alpha < \omega_1$, donde para todo $m \in \omega$, $f_\alpha(m) = 0$ si y sólo si $\alpha \in E_m$. Sea $X = f[\omega_1]$. Obsérvese que X es no numerable.

Afirmación 6.3. X es el conjunto que buscamos.

Para ver esto, consideremos un subconjunto $Y \subseteq X$ no numerable. Entonces $Y = \{f_\alpha : \alpha \in Z\}$, en donde Z es un subconjunto no numerable de ω_1. Existe un $n \in \omega$ tal que $f_n[Z] = \omega_1$. Por lo tanto, definamos $g : Y \to \mathbb{R}$ como $g(f_\alpha) = x_{f_n(\alpha)}$. Veamos que g es una función sobreyectiva. Sea $x \in \mathbb{R}$, de acuerdo con la enumeración que dimos de $\mathbb{R}$, existe un $\beta \in \omega_1$ tal que $x = x_\beta$ y se sigue que existe un $\alpha \in Z$ tal que $f_n(\alpha) = \beta$. De donde tenemos que $g(f_\alpha) = x_{f_n(\alpha)} = x_\beta$. Esto prueba que g es sobreyectiva.

Ahora demostraremos que g es continua. Sean $f_\alpha \in Y$ tal que $g(f_\alpha) \in I$ para algún intervalo abierto, I, con extremos racionales. Mostremos que existe un $m \in \omega$ tal que si hacemos $s = f_\alpha \restriction m+1$, entonces $g[\langle s \rangle] \subseteq I$.

Como $\mathcal{E}$ contiene a $\{\gamma : x_{f_n(\gamma)} \in I\}$, existe un $m \in \omega$ para el cual $E_m = \{\gamma : x_{f_n(\gamma)} \in I\}$. Probemos que este m es el que estamos buscando; es decir, probemos que $g[\langle f_\alpha \restriction m+1\rangle \cap Y] \subseteq I$. Sea $h \in \langle f_\alpha \restriction m+1\rangle \cap Y$, la cual podemos escribir como $h = f_\beta$ para algún $\beta \in Z$. Por otra parte, tenemos que $g(f_\beta) = x_{f_n(\beta)}$, pero $x_{f_n(\beta)} \in I$ siempre que $\beta \in E_m$, lo cual ocurre si y sólo si $f_\beta(m) = 0$. Por lo tanto, terminamos la demostración si mostramos que $f_\beta(m) = 0$. Como $f_\beta \in \langle s \rangle \cap Y$ tenemos que $f_\beta(m) = s(m) = f_\alpha(m)$, pero $f_\alpha(m) = 0$ ya que $\alpha \in E_m$. ❑

Comentarios de la sección. A. Miller demostró que es consistente con ZFC que no existe un conjunto X como en la conclusión del Teorema 6.2. Ver [Mil83] para más detalles.

Agradecimientos. El segundo autor agradece a Rita Zuazua Vega y a Florian Luca por haberlo invitado en el 2005 a participar en el taller "Aprendiendo a Investigar en Morelia", proyecto PAPIME EN-100304, que patrocinó la realización de este trabajo. También agradece a todos los alumnos que asistieron a la VI Escuela de Verano en la Unidad Morelia del Instituto de Matemáticas, UNAM, donde parte de este trabajo fue presentado, y a sus coautores por participar en el taller.

Asimismo, mucha gratitud tenemos hacia los revisores de este trabajo puesto que sus valiosas observaciones mejoraron el contenido.

Referencias

[BC97] Maxim R. Burke and Krzysztof Ciesielski, *Sets on which measurable functions are determined by their range*, Canad. J. Math. **49** (1997), no. 6, 1089–1116.

[BD93] Alessandro Berarducci and Dikran Dikranjan, *Uniformly approachable functions and spaces*, Proceedings of the Eleventh International Conference of Topology (Trieste, 1993), vol. 25, 1993, pp. 23–55 (1994).

[BJ95] Tomek Bartoszyński and Haim Judah, *Set theory: On the structure of the real line*, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[BS54] F. Bagemihl and H. D. Sprinkle, *On a proposition of Sierpiński's which is equivalent to the continuum hypothesis*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 726–728.

[CS99] Krzysztof Ciesielski and Saharon Shelah, *A model with no magic set*, J. Symbolic Logic **64** (1999), no. 4, 1467–1490.

[GO03] Bernard R. Gelbaum and John M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2003, Corrected reprint of the second (1965) edition.

[Iri87] Ignacio L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, primera ed., Lumusa, Caracas, 1987.

[Kec95] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Lav76] Richard Laver, *On the consistency of Borel's conjecture*, Acta Math. **137** (1976), no. 3-4, 151–169.

[Mil83] Arnold W. Miller, *Mapping a set of reals onto the reals*, J. Symbolic Logic **48** (1983), no. 3, 575–584.

[Mil84] ______, *Special subsets of the real line*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 201–233.

[Mil93] ______, *Special sets of reals*, Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991), Israel Math. Conf. Proc., vol. 6, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993, pp. 415–431.

[Mun75] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[Oxt80] John C. Oxtoby, *Measure and category*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1980, A survey of the analogies between topological and measure spaces.

[Roy88] H. L. Royden, *Real analysis*, third ed., Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[Rud53] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas, IPN, Distrito Federal, México.

E-mail address: `alheli@Gina.esfm.ipn.mx`

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México, 58060.

E-mail address: `fernando@matmor.unam.mx`

Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero, México.

E-mail address: `ailec840@hotmail.com`

Instituto de Matemáticas, UNAM (Morelia), Apartado postal 61-3 (Xangari), Morelia Michoacán, México, 58089.

E-mail address: `lamp@matmor.unam.mx`

Instituto de Matemáticas, UNAM (Morelia), Apartado postal 61-3 (Xangari), Morelia Michoacán, México, 58089.

E-mail address: `atorres@matmor.unam.mx`