

Carlos Ivorra Castillo

**PRUEBAS DE
CONSISTENCIA**

C'est du mystère seul que l'on a peur. Il faut qu'il n'y a plus de mystère. Il faut que des hommes soient descendus dans ce puits sombre, et en remontent, et disent qu'ils n'ont rien rencontré.

ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY

Índice General

Introducción	ix
1 Teoría básica y aplicaciones	1
Capítulo I: Modelos de la teoría de conjuntos	3
1.1 Elementos de la teoría de modelos	4
1.2 Modelos de ZFC	13
1.3 El teorema de reflexión	19
1.4 Modelos transitivos	24
1.5 Los números reales	36
Capítulo II: El axioma de regularidad	39
2.1 La consistencia del axioma de regularidad	39
2.2 La independencia del axioma de regularidad	41
2.3 Modelos simétricos	47
2.4 Modelos internos en ZFC	57
Capítulo III: Conjuntos constructibles	61
3.1 Definibilidad	62
3.2 La jerarquía constructible	66
3.3 Cardinales y constructibilidad	73
3.4 Constructibilidad relativa	76
Capítulo IV: Extensiones genéricas	81
4.1 Conjuntos preordenados	81
4.2 El modelo genérico	87
4.3 El teorema fundamental	91
4.4 El teorema del modelo genérico	102
4.5 Aplicaciones y hechos adicionales	106
Capítulo V: Cardinales en extensiones genéricas	111
5.1 Conservación de cardinales	111
5.2 Familias cuasidisjuntas	116
5.3 Extensiones con funciones parciales	118

5.4	Colapso de cardinales	127
Capítulo VI: Inmersiones		131
6.1	Aplicaciones entre c.p.o.s	131
6.2	Extensiones simétricas	141
6.3	Productos	156
Capítulo VII: Álgebras de Boole		167
7.1	Definición, ejemplos y propiedades básicas	167
7.2	Álgebras de Boole como c.p.o.s	174
7.3	Extensiones con álgebras de Boole	180
7.4	Álgebras cociente	191
7.5	Espacios de Stone	194
Capítulo VIII: El problema de Suslin		199
8.1	La hipótesis de Suslin	199
8.2	Árboles	203
8.3	El diamante de Jensen	211
Capítulo IX: Extensiones iteradas		219
9.1	Productos generalizados	219
9.2	Iteraciones de preórdenes	225
9.3	El axioma de Martin	230
9.4	La condición de cadena numerable	237
Capítulo X: La medida de Lebesgue		247
10.1	Medidas en álgebras de Boole	247
10.2	La aditividad de la medida de Lebesgue	256
10.3	Extensiones de la medida de Lebesgue	262
2 Cardinales grandes		267
Capítulo XI: Cardinales medibles		269
11.1	Definiciones básicas	269
11.2	El teorema de los ultraproductos	272
11.3	Ultrapotencias de V	276
11.4	Ultrapotencias con cardinales medibles	283
Capítulo XII: Cardinales débilmente compactos		291
12.1	El cálculo de particiones	291
12.2	Cardinales débilmente compactos	297
12.3	Cardinales indescriptibles	309
12.4	Cardinales de Ramsey	312

Capítulo XIII: Constructibilidad relativa	319
13.1 Hechos básicos	320
13.2 Codificación por ordinales	322
13.3 Argumentos de condensación	325
13.4 La constructibilidad y la jerarquía de Lévy	330
13.5 Consecuencias	337
13.6 El teorema de Lévy-Shoenfield	339
Capítulo XIV: Indiscernibles de Silver	345
14.1 Conjuntos de Ehrenfeucht-Mostowski	345
14.2 Los indiscernibles de Silver	356
14.3 Los sostenidos y la jerarquía de Lévy	360
14.4 El lema del cubrimiento	364
14.5 Inmersiones elementales	367
Capítulo XV: Más sobre cardinales medibles	375
15.1 Producto de medidas	375
15.2 Ultrapotencias iteradas	380
15.3 El modelo $L[U]$	391
15.4 Cardinales débilmente medibles	401
15.5 Más sobre cardinales \mathbb{R} -medibles	409
Capítulo XVI: Otros cardinales grandes	419
16.1 Cardinales compactos	419
16.2 Cardinales supercompactos	426
16.3 Cardinales enormes	435
Capítulo XVII: Cardinales grandes y extensiones genéricas	443
17.1 Árboles de Aronszajn	443
17.2 Extensiones iteradas	457
17.3 Conservación de cardinales grandes	467
17.4 La HCG con cardinales supercompactos	476
17.5 La independencia de la HCS	480
Bibliografía	501
Índice de Materias	503

Introducción

Todos los matemáticos saben, hoy en día, que hay afirmaciones matemáticas que no pueden ser demostradas ni refutadas. Un lógico precisaría: no pueden ser demostradas ni refutadas en ZFC, la teoría axiomática comúnmente aceptada por los matemáticos; pero, por esto mismo, esta precisión se vuelve superflua: para la mayoría de los matemáticos, —tanto si están familiarizados con la axiomática de ZFC como si no— “demostrable” significa “demostrable en ZFC”. Algunos incluso son más restrictivos y ponen objeciones al uso del axioma de elección.

El hecho de que una afirmación no sea demostrable en una teoría axiomática equivale a que su negación sea consistente con los axiomas de la misma. Por ejemplo, decir que la hipótesis del continuo, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ no es demostrable en ZFC es equivalente a decir que su negación, $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ es consistente con los axiomas de ZFC, en el sentido de que si añadimos $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ como axioma seguimos teniendo una teoría consistente. En la práctica es más cómodo hablar de consistencia que de “no demostrabilidad”. Cuando una afirmación no puede ser demostrada ni refutada a partir de unos axiomas —es decir, cuando tanto ella como su negación son consistentes con los mismos— se dice que es independiente de dichos axiomas.

En estos términos, el propósito de este libro es explicar las técnicas básicas para obtener pruebas de consistencia. Así, entre otras muchas aplicaciones, demostraremos que la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas de ZFC. Más aún, no sólo demostraremos la consistencia de $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y de $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, sino que —de hecho— probaremos que casi cualquier variante del estilo de $2^{\aleph_0} = \aleph_7$ o $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1+5}$ es consistente con los axiomas de ZFC. En realidad probaremos resultados mucho más generales sobre las posibilidades de la función del continuo.

Ahora bien, mucho más importante que la mera anécdota de que algo no puede ser demostrado en ZFC es comprender cómo y por qué es esto posible. Un matemático puede no conocer la demostración del último teorema de Fermat, pero no ve nada de extraño en que, de un modo u otro, sea posible encontrar un argumento que lo demuestre; sin embargo la existencia de afirmaciones inde demostrables desconcierta a muchos matemáticos, cuando —en el fondo— se trata de un fenómeno que en otros contextos similares se ve como algo obvio y natural: por lo general, unos axiomas no determinan unívocamente un modelo.

Pensemos, por ejemplo, en los axiomas de espacio vectorial. En la definición

de espacio vectorial se exige que haya unos objetos llamados “vectores”, sobre cuya naturaleza no se dice nada, y que sobre ellos haya definidas dos operaciones, igualmente indeterminadas, y a estos elementos se les impone que cumplan unos axiomas.

A nadie le sorprende que una definición tan vaga —en el sentido de que no precisa qué debemos entender por, “vector”, “suma” y “producto escalar”— sea satisfecha por objetos muy diversos que, a pesar de coincidir en ser todos ellos espacios vectoriales, difieran en propiedades definibles a partir de la estructura vectorial y puedan tener, por ejemplo, distinto número de dimensiones.

A otro nivel, con la teoría de conjuntos sucede lo mismo. Los axiomas de ZFC son tan vagos como los de espacio vectorial: postulan unos objetos indeterminados a los que llamar conjuntos, sobre los que ha de haber una relación de pertenencia, y se exige que satisfagan unos axiomas. Del mismo modo que no existen “los vectores”, en un sentido absoluto, sino que hay distintas colecciones de objetos a los que podemos llamar vectores en la medida en que satisfagan los axiomas de espacio vectorial, tampoco existen “los conjuntos” en sentido absoluto, sino distintas colecciones de objetos a las que podemos llamar conjuntos en la medida en que satisfagan los axiomas de la teoría de conjuntos. Del mismo modo que todos los espacios vectoriales satisfacen unas propiedades comunes (las que pueden demostrarse estrictamente a partir de la definición de espacio vectorial), también todos los modelos de la teoría de conjuntos tienen muchas propiedades en común, todas las que pueden demostrarse a partir de los axiomas de ZFC. Un matemático que sólo dé valor a los teoremas de ZFC y rehúya los que requieren hipótesis adicionales puede equipararse a un algebrista que sólo aceptara los teoremas válidos para todos los espacios vectoriales, sin admitir ninguna hipótesis restrictiva (y se negara, en particular, a trabajar con un espacio vectorial concreto, pues ésta es la forma más drástica de excluir a los demás espacios). Un caso más similar sería el de un geómetra que no aceptara ni los teoremas específicos de la geometría euclídea ni los de las geometrías no euclídeas, sino sólo aquellos que son comunes a todas (los teoremas de la geometría absoluta).

Se puede objetar que las propiedades comunes a todos los espacios vectoriales o a todas las geometrías dan lugar a teorías demasiado pobres para tener interés, mientras que las propiedades comunes a todos los modelos de ZFC constituyen una teoría muy rica (ZFC), por lo que no hay necesidad de extenderla. En esto hay mucho de cierto. En efecto, muchas ramas de la matemática pueden desarrollarse completamente en el seno de ZFC (para eso precisamente fue creada la axiomática), pero decir que no hay razón para estudiar extensiones de ZFC porque en su lugar podemos estudiar teoría de números o ecuaciones diferenciales, para lo cual nos basta ZFC, es como decir que no hay razón para estudiar ecuaciones diferenciales porque en su lugar podemos estudiar teoría de números, o viceversa. Desde un punto de vista matemático, el estudio de los distintos modelos de la teoría de conjuntos —atendiendo a las particularidades que diferencian a unos de otros— es una investigación de la misma naturaleza que el estudio de las distintas clases de ecuaciones diferenciales y su comportamiento, o los disitintos tipos de variedades diferenciales, o de anillos, etc.

En cualquier caso, al margen de las polémicas que podrían suscitarse sobre si es razonable o no estudiar modelos de ZFC, ecuaciones diferenciales, geometrías no euclídeas, grupos finitos, espacios vectoriales topológicos, etc., lo verdaderamente importante es comprender que éste es el planteamiento correcto de la cuestión: es ingenuo pensar que la axiomática de la teoría de conjuntos describe una realidad única y sentirse incómodo porque sus distintas extensiones ponen en cuestión ese planteamiento: no lo ponen en cuestión, simplemente lo refutan, igual que el teorema de Pitágoras refuta la concepción tradicional griega del sistema numérico, al probar la existencia de números irracionales. Recelar de la hipótesis del continuo es como recelar de $\sqrt{2}$: si un matemático trabaja en un campo en el que no se requieren para nada los números irracionales hará bien en no utilizarlos, lo patológico sería si arrugara la nariz si en un momento dado se le cruzaran en su camino.

Así pues, una concepción madura de la matemática moderna (salvo que alguien defienda una postura muy radical dentro del formalismo o del platonismo, o un exotismo como el intuicionismo) exige comprender que “los conjuntos” son esencialmente una estructura algebraica, una estructura mucho más compleja y rica que los cuerpos o los espacios vectoriales, pero una estructura y no un objeto concreto, como pueda ser el cuerpo \mathbb{R} o el espacio vectorial \mathbb{R}^8 .

Una vez se asimila esto, las pruebas de consistencia dejan de ser misteriosas. La consistencia de la hipótesis del continuo se demuestra probando que existe un modelo de ZFC en el que, entre las peculiaridades que lo distinguen de otros modelos posibles, está la de contener exactamente \aleph_1 números reales y no más. Preguntarse si la hipótesis del continuo es verdadera o falsa es como preguntarse si los espacios vectoriales tienen dimensión 5 o distinta de 5. Simplemente, hay espacios vectoriales de dimensión 5 y otros de dimensión distinta de 5, al igual que hay modelos de ZFC con \aleph_1 números reales y modelos con \aleph_{ω_1} .

En realidad la situación no es exactamente la que acabamos de describir debido a una limitación fundamental: La existencia de modelos de ZFC implica, en particular, la consistencia de ZFC, y el segundo teorema de incompletitud de Gödel afirma que dicha consistencia es indemostrable (al menos con una demostración formalizable en el propio ZFC, en particular mediante técnicas finitistas). Por ello únicamente podemos obtener pruebas de consistencia relativas, es decir, no podemos probar que $\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ es consistente, sino que *si* ZFC es consistente, entonces $\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ también lo es. En términos de modelos sería: *si* existe un modelo de ZFC entonces existe uno en el que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Más en general, podemos demostrar que existen infinitos modelos distintos de la teoría de conjuntos, pero siempre bajo el supuesto —indemostrable— de que exista al menos uno. Tampoco debemos magnificar esta restricción, los teoremas de Gödel muestran que se debe simplemente a que ZFC es una teoría muy potente, más potente incluso que nuestra capacidad de razonamiento matemático informal. Por otra parte, las pruebas de consistencia que veremos son completamente finitistas, en el sentido de que proporcionan algoritmos explícitos (o explicitables) para transformar mecánicamente, por ejemplo, una demostración de que $0 \neq 0$ en $\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ en una demostración de $0 \neq 0$ en ZFC.

Sucede además que hay afirmaciones cuya consistencia no puede demostrarse

ni siquiera a partir del supuesto de que ZFC sea consistente, sino que se requieren hipótesis más fuertes. Por ejemplo, la existencia de un cardinal inaccesible implica la consistencia de ZFC, por lo que dicha existencia no puede demostrarse en ZFC. Más aún, la consistencia de que exista un cardinal inaccesible no puede demostrarse ni siquiera suponiendo la consistencia de ZFC. En efecto, si pudiéramos probar (finitistamente, o sea, convincentemente)

$$\text{Consis ZFC} \rightarrow \text{Consis ZFC} + I,$$

donde I es la existencia de un cardinal inaccesible, entonces dicha prueba podría formalizarse en ZFC, con lo que, en particular tendríamos

$$\vdash_{\text{ZFC}+I} \text{Consis ZFC} \rightarrow \text{Consis ZFC} + I.$$

Como, por otra parte, $\vdash_{\text{ZFC}+I} \text{Consis ZFC}$, concluiríamos que

$$\vdash_{\text{ZFC}+I} \text{Consis ZFC} + I$$

y, por el teorema de incompletitud, tanto ZFC como ZFC + I serían contradictorias.

Así pues, si queremos probar, por ejemplo, la consistencia de que 2^{\aleph_0} sea un cardinal inaccesible, no podemos partir de la mera consistencia de ZFC, ya que en particular estaríamos demostrando la consistencia de ZFC + I . Lo que puede probarse es que si ZFC + I es consistente, entonces también lo es ZFC + 2^{\aleph_0} es inaccesible.

Otras pruebas de consistencia requieren como hipótesis la consistencia de que existan cardinales “más grandes” que los cardinales inaccesibles, como pueden ser los cardinales de Mahlo (que son inaccesibles y supremo de cardinales inaccesibles) o muchas otras clases de cardinales conocidos en general como “cardinales grandes”. La segunda parte del libro está dedicada a ellos. Así, por ejemplo, para demostrar la consistencia de que exista una extensión de la medida de Lebesgue a todos los subconjuntos de \mathbb{R} , no basta suponer la consistencia de ZFC, sino que hay que suponer además la consistencia de que exista lo que se conoce como un cardinal medible, consistencia que no puede ser demostrada a su vez a partir de la mera consistencia de ZFC, o ni siquiera de ZFC más la existencia de infinitos cardinales inaccesibles, o de Mahlo, etc. La consistencia de la negación de la hipótesis de los cardinales singulares requiere una hipótesis todavía mayor: aunque podría debilitarse un poco, la prueba que nosotros veremos exige la consistencia de que exista un cardinal supercompacto, la cual no puede probarse ni siquiera suponiendo la consistencia de que existan infinitos cardinales medibles.

Sería difícil explicar aquí qué son concretamente los cardinales grandes, pero diremos únicamente que se comportan como una escala de “pesos” con lo que nivelar en una balanza afirmaciones arbitrarias. En principio, no hay razones que hagan plausible la consistencia de que la medida de Lebesgue pueda extenderse a todos los subconjuntos de \mathbb{R} , pero al probar que ésta es equivalente a la consistencia de que exista un cardinal medible la situación es muy distinta,

pues los cardinales medibles determinan una teoría muy profunda, natural y bien conocida, por lo que el descubrimiento de una hipotética contradicción en la misma sería, como mínimo, sorprendente. Es cierto que, en último extremo, la consistencia de que existan cardinales grandes no puede ser probada, pero también es cierto que los teoremas de incompletitud muestran que así tiene que ser y explican el porqué.

Los requisitos para seguir este libro son un conocimiento básico de la lógica matemática (de primer orden), de la axiomática de la teoría de conjuntos, de la teoría de ordinales y cardinales y, en especial, de la exponenciación cardinal. Así mismo se requiere estar familiarizado con las relaciones bien fundadas, los teoremas generales de inducción y recursión y hechos relacionados, como el teorema del colapso transitivo. Todo lo necesario se encuentra en mi libro de lógica y teoría de conjuntos, al cual remiten todas las referencias entre corchetes. Así, los dos libros considerados conjuntamente resultan autocontenidos.

Primera parte

Teoría básica y aplicaciones

Capítulo I

Modelos de la teoría de conjuntos

Todas las pruebas de consistencia que vamos a ver se basan en la noción de modelo. La idea es que muchas de las afirmaciones indecidibles en teoría de conjuntos lo son porque los axiomas no precisan qué debemos entender exactamente por “conjunto”. Por ejemplo, si prescindimos del axioma de regularidad no podemos responder a la pregunta de si existen conjuntos de la forma $x = \{x\}$, porque los otros axiomas dicen que existe el conjunto vacío, que existe la unión de conjuntos, que existe el conjunto de partes, etc., pero no dicen si la noción de conjunto de la que hablan incluye cosas como un $x = \{x\}$. Es imposible precisar completamente qué es un conjunto, pero sí podemos incluir más y más matices. Así, el axioma de regularidad precisa enormemente la noción de conjunto, pues nos dice que todo conjunto puede generarse a partir de \emptyset mediante sucesivas aplicaciones del operador \mathcal{P} . Desgraciadamente \mathcal{P} es lo suficientemente ambiguo como para que esto deje aún muchas preguntas sin respuesta, pero por lo pronto zanja la cuestión sobre los conjuntos $x = \{x\}$.

La demostración de la consistencia del axioma de regularidad puede considerarse un prototipo. Imaginemos un matemático capaz de “ver” todos los conjuntos y reconocer inmediatamente sus propiedades. Imaginemos que, de algún modo, le impedimos ver los conjuntos finitos. Entonces el matemático se daría cuenta de que no está viendo todos los conjuntos, pues él sabe, por ejemplo, que hay un axioma que afirma la existencia del conjunto vacío, mientras que él no vería ningún conjunto vacío. Sin embargo, supongamos ahora que sólo le permitimos ver los conjuntos regulares. No está claro si hay conjuntos no regulares pero la pregunta es, en el supuesto de que los hubiera, ¿se daría cuenta el matemático de que le estamos ocultando algo? La respuesta es que, si el matemático sólo sabe de los conjuntos lo que dicen los axiomas, no notaría nada. Por ejemplo, un axioma afirma que existe el conjunto vacío, pero como el vacío es regular, él lo estaría viendo, luego no notaría “nada raro” en lo tocante a este axioma. Otro axioma afirma que dados dos conjuntos x e y , ha de haber otro conjunto $\{x, y\}$ que los tenga sólo a ellos por elementos. Ahora bien, si él ve dos

conjuntos x, y , es porque ambos son regulares, pero entonces $\{x, y\}$ también es regular, por lo que también lo puede ver y , por consiguiente, no echará en falta ningún par de conjuntos. Similarmente podríamos repasar todos los axiomas. La clase \mathbf{R} de los conjuntos regulares tiene la propiedad de que si quitamos los conjuntos no regulares no por ello deja de cumplirse ninguno de los axiomas de la teoría de conjuntos. Esto es lo que significa que \mathbf{R} es un modelo de la teoría de conjuntos: no podemos demostrar que los conjuntos regulares sean todos los conjuntos, pero sí que “podrían serlo”, en el sentido de que bastan ellos para asegurar que se cumplen todos los axiomas. Al desarrollar debidamente esta idea se llega a una demostración de la consistencia de que $V = \mathbf{R}$.

En este capítulo estudiaremos la noción de modelo y demostraremos lo necesario para convertir las ideas precedentes en demostraciones rigurosas y concluyentes de la consistencia de diversas afirmaciones. La idea principal que debemos tener *in mente* es que nos proponemos estudiar las clases o conjuntos M con la propiedad de que si a un matemático le ocultamos los conjuntos que no están en M será incapaz de notar el “fraude” debido a que todos los axiomas de la teoría en que él trabaja se siguen cumpliendo.

1.1 Elementos de la teoría de modelos

En esta primera sección estudiaremos la noción de “modelo” desde el punto de vista de la teoría de modelos propiamente dicha, que no es el punto de vista que adoptaremos en nuestros argumentos principales. Podríamos haber esquivado muchos de los conceptos y resultados que vamos a exponer, pero así introduciremos las ideas más importantes que vamos a manejar en ausencia de elementos metamatemáticos. Trabajamos en NBG o, equivalentemente, en ZFC. Empezaremos recordando la noción de lenguaje formal. En realidad la definición que damos aquí difiere ligeramente de la dada en el [capítulo X]:

Definición 1.1 Un *lenguaje formal* (de primer orden) es una óctupla ordenada $\mathcal{L} = (\neg, \rightarrow, \wedge, =, V, C, R, F)$, donde V y C son conjuntos, a cuyos elementos llamaremos, respectivamente, *variables* y *constantes* de \mathcal{L} , y R y F son funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales no nulos. A los elementos de R^n y F^n los llamaremos, respectivamente, *relatores* y *funtores* n -ádicos de \mathcal{L} . Exigimos además que los conjuntos V, C, R^n y F^n sean disjuntos dos a dos, que ninguno contenga a \neg, \rightarrow ni a \wedge , que V sea infinito y que $= \in R^2$.

Si \mathcal{L} es un lenguaje formal, llamaremos $\text{Var } \mathcal{L}$ al conjunto de las variables de \mathcal{L} , llamaremos $\text{Const } \mathcal{L}$ al conjunto de las constantes de \mathcal{L} y, para cada natural no nulo n , llamaremos $\text{Rel}_n \mathcal{L}$ y $\text{Fun}_n \mathcal{L}$ a los conjuntos de relatores y funtores n -ádicos de \mathcal{L} . Se definen los *signos* de \mathcal{L} como los elementos del conjunto

$$\text{Sig } \mathcal{L} = \{\neg, \rightarrow, \wedge\} \cup \text{Var } \mathcal{L} \cup \text{Const } \mathcal{L} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Rel}_n \mathcal{L} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Fun}_n \mathcal{L}.$$

Cuando hablemos del *cardinal* de \mathcal{L} nos referiremos a $|\mathcal{L}| = |\text{Sig } \mathcal{L}|$.

Las diferencias respecto a la definición que conocíamos son que ahora hemos eliminado el descriptor y que no exigimos que los signos de \mathcal{L} formen un conjunto numerable. El descriptor es muy útil a la hora de manejar lenguajes en la práctica, pero para el estudio teórico que haremos de los lenguajes formales sería únicamente un estorbo. La numerabilidad la exigíamos en su momento porque estábamos interesados en relacionar los lenguajes formales así definidos con los lenguajes metamatemáticos finitistas, y metamatemáticamente no tiene sentido la no numerabilidad.

Del mismo modo que un espacio topológico es un conjunto (a cuyos elementos llamamos puntos) junto con una selección arbitraria de una familia de subconjuntos (a cuyos elementos llamamos abiertos), igualmente hemos de pensar que un lenguaje formal es un conjunto (a cuyos elementos llamamos signos) dividido arbitrariamente en categorías (negador, implicador, relatores monádicos, diádicos, etc.).

Si \mathcal{L} es un lenguaje formal, se define el conjunto de las *cadena de signos* de \mathcal{L} como

$$\text{Cad } \mathcal{L} = (\text{Sig } \mathcal{L})^{<\omega} \setminus \{\emptyset\},$$

es decir, las cadenas de signos son las sucesiones finitas de signos de \mathcal{L} . Excluimos por conveniencia la cadena vacía. Llamaremos *longitud* de una cadena a su dominio, que es un número natural.

El conjunto de los *términos* de \mathcal{L} se define recurrentemente como sigue:
 $\text{Term}_0 \mathcal{L} = V \cup C,$

$$\text{Term}_{k+1} \mathcal{L} = \text{Term}_k \mathcal{L} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ft_0 \cdots t_{n-1} \mid f \in \text{Fun}_n \mathcal{L} \wedge \{t_i\}_{i < n} \in (\text{Term}_k \mathcal{L})^n\},$$

$$\text{Term } \mathcal{L} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Term}_k \mathcal{L}.$$

Similarmente, el conjunto de las *fórmulas* de \mathcal{L} se define como

$$\text{Form}_0 \mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Rt_0 \cdots t_{n-1} \mid R \in \text{Rel}_n \mathcal{L} \wedge \{t_i\}_{i < n} \in (\text{Term } \mathcal{L})^n\},$$

$$\text{Form}_{k+1} \mathcal{L} = \text{Form}_k \mathcal{L} \cup \{\neg \alpha \mid \alpha \in \text{Form}_k \mathcal{L}\} \cup \{\rightarrow \alpha \beta \mid \alpha, \beta \in \text{Form}_k \mathcal{L}\}$$

$$\cup \{\wedge x \alpha \mid x \in \text{Var } \mathcal{L} \wedge \alpha \in \text{Form}_k \mathcal{L}\},$$

$$\text{Form } \mathcal{L} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Form}_k \mathcal{L}.$$

Usaremos los convenios usuales de notación (cf. [capítulo I]), de modo que $(x = y)$ representará a la fórmula $=xy$, es decir, la aplicación $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \text{Sig } \mathcal{L}$ determinada por $\phi(0) = =$, $\phi(1) = x$, $\phi(2) = y$, donde se sobrentiende que $x, y \in \text{Var } \mathcal{L}$. Observemos en particular que en $\phi(0) = =$ hay que entender que el igualador central es el igualador metamatemático de la teoría de conjuntos, mientras que el de la derecha es un conjunto $= \in \text{Sig } \mathcal{L}$.

Así mismo suponemos definidos los conectores $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ y el particularizador \forall . No son signos de \mathcal{L} sino que, por ejemplo, $\forall x(x = x)$ es otra forma de

nombrar la fórmula $\neg \bigwedge x \neg = xx$, es decir, se trata de la aplicación $\phi : 6 \longrightarrow \text{Sig } \mathcal{L}$ determinada por $\phi(0) = \neg$, etc.

También damos por conocidas las definiciones de variable libre y ligada. Las fórmulas sin variables libres se llaman *sentencias* y los términos sin variables libres se llaman *designadores*.

Definición 1.2 Un *modelo* de un lenguaje formal L es un par (M, I) , donde M es un conjunto no vacío e I es una aplicación que asigna a cada constante c de \mathcal{L} un objeto $I(c) \in M$, a cada relator n -ádico R de \mathcal{L} una relación $I(R) \subset M^n$ y a cada funtor n -ádico f de \mathcal{L} una función $I(f) : M^n \longrightarrow M$. Exigimos además que $I(=)$ sea la relación de igualdad.

En la práctica escribiremos M en lugar de (M, I) y escribiremos $M(c)$, $M(R)$, $M(f)$ en lugar de $I(c)$, $I(R)$, $I(f)$.

Una *valoración* de un lenguaje \mathcal{L} en un modelo M se define como una aplicación $v : \text{Var } \mathcal{L} \longrightarrow M$. El *objeto denotado* por un término t de \mathcal{L} en un modelo M respecto a una valoración v se define inductivamente como

$$M(x)[v] = v(x), \quad M(c)[v] = M(c),$$

$$M(ft_0 \cdots t_{n-1})[v] = M(f)(M(t_0)[v], \dots, M(t_{n-1})[v]).$$

La *satisfacción* de una fórmula α de \mathcal{L} en un modelo M respecto de una valoración v se define inductivamente como

$$\begin{aligned} M \models Rt_0 \cdots t_{n-1}[v] &\leftrightarrow M(R)(M(t_0)[v], \dots, M(t_{n-1})[v]), \\ M \models \neg \alpha[v] &\leftrightarrow \neg M \models \alpha[v], \\ M \models (\alpha \rightarrow \beta)[v] &\leftrightarrow \neg M \models \alpha[v] \vee M \models \beta[v], \\ M \models \bigwedge x \alpha[v] &\leftrightarrow \bigwedge a \in M M \models \alpha[v_x^a], \end{aligned}$$

donde, en la última cláusula, v_x^a es la valoración que coincide con v salvo por que $v_x^a(x) = a$. Se comprueba fácilmente que

$$M \models \alpha \vee \beta[v] \leftrightarrow M \models \alpha[v] \vee M \models \beta[v],$$

al igual que las propiedades análogas para el conjuntor, el particularizador, etc.

Una comprobación rutinaria muestra que $M(t)[v]$ y $M \models \alpha[v]$ sólo dependen de los valores que toma v sobre las variables libres en t o α respectivamente. (cf. [3.3]). Si las variables libres en una fórmula α son x_1, \dots, x_n (con lo que estamos presuponiendo un orden en ellas) usaremos la notación $M \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$ para indicar que α es satisfecha en M respecto a cualquier valoración v que cumpla $v(x_i) = a_i$. Similarmente para términos.

Diremos que una fórmula α es *verdadera* en el modelo M , y lo representaremos por $M \models \alpha$ si $M \models \alpha[v]$ para toda valoración v .

Si $\Gamma \subset \text{Form } \mathcal{L}$ diremos que M es un *modelo* de Γ , y lo representaremos por $M \models \Gamma$, si $\bigwedge \alpha \in \Gamma M \models \alpha$.

No hay que confundir el hecho de que M sea un modelo de un lenguaje \mathcal{L} con que sea un modelo de un conjunto de fórmulas Γ de \mathcal{L} . Ser un modelo de \mathcal{L} significa que todo signo de \mathcal{L} tiene una interpretación en M , mientras que lo segundo supone además que las fórmulas de Γ son verdaderas de acuerdo con dicha interpretación.

Ejemplo Consideremos un lenguaje formal \mathcal{L} cuyos signos eventuales sean dos constantes 0 y 1 y dos funtores diádicos $+$ y \cdot . Entonces un modelo de \mathcal{L} es cualquier conjunto $M \neq \emptyset$ en el que haya definidas dos leyes de composición internas $M(+)$ y $M(\cdot)$ y en el que hayamos prefijado dos elementos cualesquiera $M(0), M(1) \in M$. Un anillo unitario puede caracterizarse como un modelo de un cierto conjunto bien conocido Γ de sentencias de \mathcal{L} , entre las cuales estarán

$$\bigwedge xy(x + y = y + x),$$

$$\bigwedge x(x + 0 = x),$$

$$\bigwedge x \bigvee y(x + y = 0),$$

$$\bigwedge x(x \cdot 1 = x),$$

etc. Debemos incidir en las diferencias técnicas entre esta caracterización de los anillos y la definición usual. Cuando en un libro de álgebra se exige que todo anillo M cumpla $\bigwedge xy \in M(x + y = y + x)$, hemos de entender que la expresión “ $\bigwedge xy \in M(x + y = y + x)$ ” es una fórmula metamatemática del lenguaje de la teoría de conjuntos. Matemáticamente $+$ representa una ley de composición interna, etc. Por el contrario, en la caracterización que acabamos de dar, esta exigencia se expresa mediante la condición

$$M \models \bigwedge xy(x + y = y + x),$$

donde ahora $\bigwedge xy(x + y = y + x) \in \text{Form } \mathcal{L}$ es un conjunto, no una fórmula metamatemática. El signo \models no representa una ley de composición interna en M , sino un signo de \mathcal{L} . Lo que pedimos es que la ley de composición interna $M(+)$ sea conmutativa.

Más concretamente, en las afirmaciones

$$\mathbb{Q} \models \bigwedge xy(x + y = y + x), \quad \mathbb{R} \models \bigwedge xy(x + y = y + x),$$

el signo $+$ representa siempre al mismo objeto (un functor de \mathcal{L}). Lo que cambia es que para comprobar la primera afirmación hemos de interpretar $+$ como la suma de números racionales y para comprobar la segunda hemos de interpretarlo como la suma de números reales.

Si añadimos a Γ la fórmula $\bigwedge x(x \neq 0 \rightarrow \bigvee y(xy = 1))$ tenemos un conjunto de fórmulas cuyos modelos son exactamente los cuerpos. Si añadimos un relator diádico \leq a \mathcal{L} y consideramos los axiomas oportunos, podemos caracterizar en términos de la teoría de modelos a los cuerpos ordenados y, similarmente, podemos caracterizar como modelos de ciertos conjuntos de fórmulas a la mayoría de las estructuras algebraicas. ■

Estudiamos ahora las aplicaciones que relacionan dos modelos de un mismo lenguaje formal.

Definición 1.3 Una *inmersión* $i : N \longrightarrow M$ entre dos modelos de un mismo lenguaje formal \mathcal{L} es una aplicación que verifica las propiedades siguientes:

- a) Para toda constante c de \mathcal{L} se cumple que $i(N(c)) = M(c)$.
- b) Para todo relator n -ádico R de \mathcal{L} se cumple que

$$\bigwedge a_1 \dots a_n \in N(N(R)(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow M(R)(i(a_1), \dots, i(a_n))).$$

- c) Para todo funtor n -ádico f de \mathcal{L} se cumple que

$$\bigwedge a_1 \dots a_n \in N(i(N(f)(a_1, \dots, a_n)) = M(f)(i(a_1), \dots, i(a_n))).$$

Observemos que la propiedad b) aplicada al igualador implica que toda inmersión es inyectiva. Una inmersión biyectiva es un *isomorfismo* de modelos. Por ejemplo, una inmersión entre dos anillos unitarios (vistos como modelos del lenguaje de la teoría de anillos) no es más que un monomorfismo de anillos unitarios en el sentido algebraico usual.

Diremos que un modelo N es un *submodelo* de un modelo M del mismo lenguaje formal si $N \subset M$ y la inclusión es una inmersión.

Supongamos que M es un modelo de un lenguaje \mathcal{L} y que $N \subset M$ es un subconjunto de M con las propiedades siguientes:

- a) $M(c) \in N$ para toda constante c de \mathcal{L} .
- b) $M(f)|_{N^n} : N^n \longrightarrow N$, para todo funtor n -ádico f de \mathcal{L} .

Entonces N admite una única estructura de submodelo de M . De hecho, ésta es una definición alternativa de submodelo.

Por ejemplo, los submodelos de un anillo unitario (visto como modelo del lenguaje de la teoría de anillos) son simplemente los subanillos unitarios (es decir, con la misma unidad) en el sentido algebraico usual.

De las definiciones se sigue inmediatamente que la imagen de una inmersión es un submodelo y que, equivalentemente, una inmersión entre dos modelos es un isomorfismo de uno en un submodelo del otro.

Teorema 1.4 Si $i : N \longrightarrow M$ es una inmersión entre dos modelos de un mismo lenguaje formal \mathcal{L} , $t(x_1, \dots, x_n)$ es un término de \mathcal{L} y $a_1, \dots, a_n \in N$, entonces

$$i(N(t)[a_1, \dots, a_n]) = M(t)[i(a_1), \dots, i(a_n)].$$

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre la longitud de t . Si $t = x_i$ es una variable tenemos simplemente que

$$i(N(x_i)[a_1, \dots, a_n]) = i(a_i) = M(x_i)[i(a_1), \dots, i(a_n)].$$

Si $t = c$ es una constante queda

$$i(N(c)[a_1, \dots, a_n]) = i(N(c)) = M(c) = M(c)[i(a_1), \dots, i(a_n)].$$

Si $t = ft_1 \cdots t_m$ y el teorema es cierto para t_1, \dots, t_m entonces

$$\begin{aligned} i(N(t)[a_1, \dots, a_n]) &= i(N(f)(N(t_1)[a_1, \dots, a_n], \dots, N(t_m)[a_1, \dots, a_n])) \\ &= M(f)(i(N(t_1)[a_1, \dots, a_n]), \dots, i(N(t_m)[a_1, \dots, a_n])) \\ &= M(f)(M(t_1)[i(a_1), \dots, i(a_n)], \dots, M(t_m)[i(a_1), \dots, i(a_n)]) \\ &= M(t)[i(a_1), \dots, i(a_n)]. \end{aligned}$$

■

La propiedad análoga al teorema anterior para fórmulas en lugar de términos no es cierta para una inmersión arbitraria, sino que nos lleva al concepto de inmersión elemental:

Definición 1.5 Una *inmersión elemental* $i : N \rightarrow M$ entre dos modelos de un mismo lenguaje formal \mathcal{L} es una inmersión tal que para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L} se cumple

$$\bigwedge a_1 \cdots a_n \in N (N \models \phi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow M \models \phi[i(a_1), \dots, i(a_n)]).$$

Diremos que N es un *submodelo elemental* de un modelo M (y lo representaremos por $N \prec M$) si N es un submodelo de M tal que la inclusión es una inmersión elemental. A su vez esto equivale a que para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L} se cumple

$$\bigwedge a_1 \cdots a_n \in N (N \models \phi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow M \models \phi[a_1, \dots, a_n]).$$

Ejemplo Consideremos a \mathbb{R} como modelo del lenguaje de la teoría de cuerpos. Entonces \mathbb{Q} es un submodelo de \mathbb{R} , pero no es un submodelo elemental. Por ejemplo, si $\phi(x) = \bigvee y x = y \cdot y$ entonces $\mathbb{R} \models \phi[2]$ pero $\mathbb{Q} \models \neg\phi[2]$. ■

Observemos que toda aplicación i que conserve fórmulas en el sentido de la definición de inmersión elemental es necesariamente una inmersión. En efecto, para demostrar que conserva a una constante c basta considerar la fórmula $x = c$, para probar que conserva un relator n -ádico R basta considerar la fórmula $Rx_1 \cdots x_n$ y para probar que conserva un funtor n -ádico f basta considerar la fórmula $x = fx_1 \cdots x_n$.

Definición 1.6 Diremos que dos modelos M y N de un mismo lenguaje formal \mathcal{L} son *elementalmente equivalentes* si satisfacen las mismas sentencias, es decir, si para toda sentencia ϕ de \mathcal{L} se cumple que

$$M \models \phi \leftrightarrow N \models \phi.$$

Usaremos la notación $M \cong N$ para indicar que M y N son isomorfos, y la notación $M \equiv N$ para indicar que son elementalmente equivalentes. Es claro que si $N \prec M$ o si $N \cong M$ entonces $N \equiv M$. Pronto veremos ejemplos de que el recíproco no es cierto.

El teorema siguiente proporciona una caracterización muy importante de los submodelos elementales. Su interés radica en que sólo involucra la noción de satisfacción en un modelo en vez de en dos.

Teorema 1.7 *Un subconjunto $N \subset M$ de un modelo M de un lenguaje formal \mathcal{L} es un submodelo elemental si y sólo si para toda fórmula $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L} se cumple*

$$\bigwedge a_1 \cdots a_n \in N (\bigvee a \in MM \models \phi[a, a_1, \dots, a_n] \rightarrow \bigvee a \in NM \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]).$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que N es un submodelo. Si c es una constante de \mathcal{L} entonces $\bigvee a \in MM \models (x = c)[a]$, luego por hipótesis $\bigvee a \in NM \models (x = c)[a]$, lo que equivale a que $M(c) \in N$.

Similarmente, si f es un funtor n -ádico de \mathcal{L} y $a_1, \dots, a_n \in N$, entonces es claro que $\bigvee a \in MM \models x = fx_1 \cdots x_n[a, a_1, \dots, a_n]$, luego por hipótesis también se cumple $\bigvee a \in NM \models x = fx_1 \cdots x_n[a, a_1, \dots, a_n]$, lo cual equivale a que $M(f)(a_1, \dots, a_n) \in N$.

Esto prueba que N es ciertamente un submodelo de M . Por el teorema 1.4 tenemos que si $t(x_1, \dots, x_n)$ es un término de \mathcal{L} y $a_1, \dots, a_n \in N$, entonces

$$N(t)[a_1, \dots, a_n] = M(t)[a_1, \dots, a_n].$$

Ahora probamos que para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L} y todos los $a_1, \dots, a_n \in N$ se cumple

$$N \models \phi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow M \models \phi[a_1, \dots, a_n].$$

Lo demostramos por inducción sobre ϕ .

Si $\phi = Rt_1 \cdots t_m$, entonces

$$\begin{aligned} N \models \phi[a_1, \dots, a_n] &\leftrightarrow N(R)(N(t_1)[a_1, \dots, a_n], \dots, N(t_m)[a_1, \dots, a_n]) \\ &\leftrightarrow M(R)(M(t_1)[a_1, \dots, a_n], \dots, M(t_m)[a_1, \dots, a_n]) \leftrightarrow M \models \phi[a_1, \dots, a_n]. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que si el teorema vale para $\phi = \alpha$ y para $\phi = \beta$ entonces vale para $\phi = \neg\alpha$ y para $\phi = \alpha \rightarrow \beta$. Supongamos finalmente que $\phi = \bigwedge x\alpha$ y que el teorema es válido para α . Según acabamos de comentar, también vale para $\neg\alpha$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} N \models \bigwedge x\alpha[a_1, \dots, a_n] &\leftrightarrow \bigwedge a \in NN \models \alpha[a, a_1, \dots, a_n] \\ &\leftrightarrow \neg \bigvee a \in NN \models \neg\alpha[a, a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \neg \bigvee a \in NM \models \neg\alpha[a, a_1, \dots, a_n] \\ &\leftrightarrow \neg \bigvee a \in MM \models \neg\alpha[a, a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow M \models \bigwedge x\alpha[a_1, \dots, a_n]. \end{aligned}$$

El recíproco se demuestra por una inducción similar a la que acabamos de realizar. ■

Este teorema nos proporciona una técnica para construir submodelos elementales. Para ello necesitamos algunas definiciones:

Definición 1.8 Sea M un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} . Para cada fórmula $\phi(x_0, \dots, x_n)$ con $n + 1$ variables libres (y cada ordenación de las mismas) diremos que una función $h_\phi : M^n \rightarrow M$ es una *función de Skolem* para ϕ si cuando $a_1, \dots, a_n \in M$ y $\bigvee a \in MM \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$ entonces

$$M \models \phi[h_\phi(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n].$$

Claramente toda fórmula ϕ con al menos dos variables libres tiene una fórmula de Skolem, que en general no será única. Seleccionamos una fórmula de Skolem ϕ para cada fórmula de \mathcal{L} con al menos dos variables y para cada ordenación posible de las mismas.

Si $X \subset M$ definimos $N_0(X) = X$ y $N_{k+1}(X) = N_k(X) \cup \bigcup_{\phi} h_{\phi}[N_k(X)]$, donde hay que entender que si la fórmula ϕ tiene $n + 1$ variables libres entonces $h_{\phi}[N_k(X)]$ es en realidad $h_{\phi}[N_k(X)^n]$. El *núcleo de Skolem* de X en M (respecto a las funciones de Skolem escogidas) es

$$N(X) = \bigcup_{k \in \omega} N_k(X).$$

Teorema 1.9 *Si M es un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} y $X \subset M$ es un conjunto no vacío, entonces $X \subset N(X) \prec M$ y $|N(X)| = |X| \cdot |\mathcal{L}|$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que el cardinal del conjunto de fórmulas de \mathcal{L} (con al menos dos variables libres) es exactamente $|\mathcal{L}|$. Al multiplicarlas por el número de ordenaciones posibles de sus variables (que es finito) seguimos teniendo el mismo cardinal. Por lo tanto hay $|\mathcal{L}|$ funciones de Skolem. De aquí se sigue fácilmente que $|N(X)| = |X| \cdot |\mathcal{L}|$. Sólo queda probar que $N(X) \prec M$. Usaremos el teorema anterior. Para ello tomamos una fórmula $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$ junto con $a_1, \dots, a_n \in N(X)$ y suponemos que

$$\forall a \in M M \models \phi[a, a_1, \dots, a_n].$$

No perdemos generalidad si suponemos que $n \geq 1$, pues en caso contrario cambiamos $\phi(x)$ por $\phi(x) \wedge x_1 = x_1$, y tomamos cualquier $a_1 \in N(X)$. Existirá un $k \in \omega$ tal que $a_1, \dots, a_n \in N_k(X)$. Por lo tanto $a = h_{\phi}(a_1, \dots, a_n) \in N(X)$ cumple $a \in N(X) \wedge M \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$. ■

En particular tenemos:

Teorema 1.10 (Teorema de Löwenheim-Skolem) *Si M es un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} entonces M tiene un submodelo elemental de cardinal menor o igual que $|\mathcal{L}|$.*

El lenguaje de la teoría de conjuntos es numerable, luego del teorema anterior se sigue que a partir de un modelo de la teoría de conjuntos podemos extraer otro modelo numerable. Hacen falta pocos medios para “engañar” a un matemático: con una cantidad numerable de objetos y una relación de pertenencia definida adecuadamente podemos hacer creer a cualquier matemático que está viendo todos los conjuntos. Más adelante volveremos sobre esto.

Ejemplo Si consideramos a \mathbb{R} como modelo de los axiomas de cuerpo ordenado (que pertenecen a un lenguaje formal numerable), el teorema anterior demuestra que \mathbb{R} tiene un submodelo elemental numerable M . En particular $M \equiv \mathbb{R}$ pero $M \not\cong \mathbb{R}$. Se cumple que M es un subcuerpo numerable de \mathbb{R} . Es fácil ver que ha

de contener a todos los números algebraicos. Por otra parte, ningún subcuerpo de \mathbb{R} es completo para el orden, por lo que M ha de tener subconjuntos acotados que no tienen supremo.

Esto muestra que la completitud no es expresable mediante una fórmula del lenguaje de los cuerpos ordenados. La razón es que involucra una cuantificación de tipo “para todo subconjunto de M ”, mientras que las fórmulas sólo pueden admitir cuantificaciones del tipo “para todo elemento de M ”. Lo máximo que podemos decir de M en lo tocante a la completitud es que todo subconjunto de M no vacío, definible mediante una fórmula y acotado superiormente tiene supremo. ■

La definición del núcleo de Skolem no es constructiva por la elección arbitraria de las funciones de Skolem. El teorema siguiente nos da una representación de los elementos de un núcleo de Skolem que compensa en parte este inconveniente. Primero necesitamos una definición.

Definición 1.11 Sea M un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} . Supongamos escogidas unas funciones de Skolem para M . Sea $\bar{\mathcal{L}}$ el lenguaje formal que resulta de añadirle a \mathcal{L} un funtor F_ϕ por cada función de Skolem h_ϕ . Es claro que M se convierte en un modelo de $\bar{\mathcal{L}}$ sin más que establecer $M(F_\phi) = h_\phi$. Los términos de $\bar{\mathcal{L}}$ construidos únicamente con variables y funtores F_ϕ se llaman *términos de Skolem*.

Teorema 1.12 Sea M un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} y X un subconjunto no vacío. Entonces

$$N(X) = \{M(t)[a_1, \dots, a_n] \mid t \text{ es un término de Skolem} \wedge a_1, \dots, a_n \in X\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos que $M(t)[a_1, \dots, a_n] \in N(X)$ por inducción sobre la longitud de t . Si $t = x_i$ es una variable entonces $M(t)[a_1, \dots, a_n] = a_i \in X$. Si $t = F_\phi t_1 \cdots t_m$, donde cada t_i es un término de Skolem, entonces

$$M(t)[a_1, \dots, a_n] = h_\phi(M(t_1)[a_1, \dots, a_n], \dots, M(t_m)[a_1, \dots, a_n]).$$

Por hipótesis de inducción cada $M(t_i)[a_1, \dots, a_n]$ está en $N(X)$, luego todos ellos están en un cierto $N_k(X)$, para un número natural k suficientemente grande, y entonces es claro que $M(t)[a_1, \dots, a_n] \in N_{k+1}(X)$.

Recíprocamente, vamos a probar por inducción sobre k que cada $N_k(X)$ está contenido en el conjunto del enunciado. Para $k = 0$ es trivial. Si vale para k , tomamos $a \in N_{k+1}(X)$ y distinguimos dos casos: si $a \in N_k(X)$ concluimos por hipótesis de inducción; en caso contrario $a \in h_\phi[N_k(X)]$, para cierta función de Skolem h_ϕ , es decir, existen $b_1, \dots, b_m \in N_k(X)$ tales que $a = h_\phi(b_1, \dots, b_m)$. Por hipótesis de inducción $b_i = M(t_i)[a_1, \dots, a_n]$, para ciertos $a_1, \dots, a_n \in X$ y ciertos términos de Skolem t_i . Por consiguiente

$$\begin{aligned} a &= M(F_\phi)(M(t_1)[a_1, \dots, a_n], \dots, M(t_m)[a_1, \dots, a_n]) \\ &= M(F_\phi t_1 \cdots t_m)[a_1, \dots, a_n], \end{aligned}$$

luego se cumple la conclusión con el término de Skolem $t = F_\phi t_1 \cdots t_m$. ■

Como aplicación demostramos lo siguiente:

Teorema 1.13 *Sea M un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} y X un subconjunto no vacío. Sea $N = N(X)$. Entonces las restricciones a N de las funciones de Skolem de M son funciones de Skolem para N y el núcleo de Skolem de X en N respecto a estas restricciones es N .*

DEMOSTRACIÓN: Si $\phi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula de \mathcal{L} (con una ordenación de sus variables), es claro que $h_\phi|_{N^n} : N^n \rightarrow N$. Como $N \prec M$, si $a_1, \dots, a_n \in N$ y

$$\forall a \in NN \models \phi[a, a_1, \dots, a_n],$$

también

$$\forall a \in MM \models \phi[a, a_1, \dots, a_n],$$

luego

$$M \models \phi[h_\phi(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n],$$

y de nuevo porque $N \prec N$ concluimos que

$$N \models \phi[h_\phi(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n].$$

Esto prueba que h_ϕ es una función de Skolem para ϕ en N . Por el teorema anterior, si $a \in N$ entonces $a = M(t)[a_1, \dots, a_n]$, donde t es un término de Skolem y $a_1, \dots, a_n \in X$. Ahora bien, es claro que N es un submodelo de M (no necesariamente elemental) cuando consideramos a ambos como modelos de $\overline{\mathcal{L}}$, luego por el teorema 1.4 tenemos que $a = N(t)[a_1, \dots, a_n]$, luego el teorema anterior nos da que a está en el núcleo de Skolem de X en N . ■

1.2 Modelos de ZFC

Nos ocupamos ahora del lenguaje formal que más nos va a interesar, el de la teoría de conjuntos. Hemos de trabajar con él tanto a nivel metamatemático, es decir, con el lenguaje real con el que escribimos los teoremas que demostramos, como a nivel matemático, o sea, en el sentido de la sección anterior. Para evitar confusiones llamaremos \mathcal{L}_m al lenguaje metamatemático y \mathcal{L}_0 al lenguaje en el sentido de la sección anterior. Así, metamatemáticamente \mathcal{L}_m es un lenguaje formal y matemáticamente no existe. Metamatemáticamente \mathcal{L}_0 es un designador de \mathcal{L}_m y matemáticamente \mathcal{L}_0 es una óctupla ordenada.

Aunque, según hemos convenido en la sección anterior, \mathcal{L}_0 no tiene descriptor, el lenguaje metamatemático \mathcal{L}_m sí lo tiene, pues de lo contrario no podríamos definir conceptos tan elementales como

$$\{x, y\} \equiv z \mid \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

Tomaremos como axioma que $(x \mid x = x) = \emptyset$. Aunque esto es formalmente un axioma, en realidad es una definición: estamos conviniendo en que todo lo que esté mal definido es por definición el conjunto vacío. Así, toda fórmula es equivalente a otra con las mismas variables libres y sin descriptores. Aunque esto está probado en [8.15], puesto que vamos a usarlo con cierta frecuencia daremos aquí una prueba sencilla:

Teorema 1.14 *Para cada fórmula α de \mathcal{L}_m existe otra fórmula α' con las mismas variables libres y sin descriptores de modo que a partir del axioma de extensión y de $\bigwedge u u \notin x | (x = x)$, se demuestra que $\alpha \leftrightarrow \alpha'$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x_1 | \phi_1, \dots, x_r | \phi_r$ las descripciones que aparecen en α . Sea $\tilde{\alpha}$ la fórmula que resulta de cambiar cada una de ellas por una variable nueva y_i . Entonces es claro que

$$\alpha \leftrightarrow \bigvee y_1 \cdots y_r (y_1 = x_1 | \phi_1 \wedge \cdots \wedge y_r = x_r | \phi_r \wedge \tilde{\alpha}).$$

Esta equivalencia es puramente lógica, no requiere ningún axioma conjuntista. Basta tomar como α' la fórmula que resulta de sustituir cada $y_i = x_i | \phi_i$ por

$$\bigwedge x_i (\phi_i \leftrightarrow x_i = y_i) \vee (\neg \bigvee^1 x_i \phi_i \wedge \bigwedge u u \notin y_i).$$

■

Cada fórmula sin descriptores α de \mathcal{L}_m tiene asociado un designador $\ulcorner \alpha \urcorner$ tal que, en ZFC, se demuestra que $\ulcorner \alpha \urcorner$ es una fórmula de \mathcal{L}_0 . Por ejemplo, si $\alpha \equiv x = y$, entonces $\phi = \ulcorner x = y \urcorner$ es la sucesión de dominio 3 tal que $\phi(0) = \ulcorner = \urcorner$, $\phi(1) = \ulcorner x \urcorner$ y $\phi(2) = \ulcorner y \urcorner$.

Un modelo de \mathcal{L}_0 está completamente determinado por un par (M, R) , donde M es un conjunto no vacío y $R \subset M \times M$. Concretamente, este par determina el modelo en el que $M(\ulcorner \in \urcorner) = R$.

Un *modelo natural* es un modelo M de \mathcal{L}_0 en el que la relación R es simplemente $\{(x, y) \in M \times M \mid x \in y\}$. De este modo, cada conjunto no vacío determina un único modelo natural.

Un *modelo transitivo* es un modelo natural M que además es transitivo, es decir, cumple $\bigwedge x \in M x \subset M$.

Por el axioma de regularidad, la relación de pertenencia está bien fundada en todo conjunto M , luego el teorema del colapso de Mostowski [12.19] implica que todo modelo natural es isomorfo a un único modelo transitivo.

Eligiendo equivalentes sin descriptores de los axiomas de ZFC podemos definir el conjunto $\ulcorner ZFC \urcorner \subset \text{Form } \mathcal{L}_0$, pero el segundo teorema de incompletitud implica que no es posible demostrar en ZFC la existencia de un modelo M que cumpla $M \models \ulcorner ZFC \urcorner$.

La práctica totalidad de las pruebas de consistencia que vamos a obtener se basan en la posibilidad de “burlar” parcialmente al segundo teorema de incompletitud mediante la técnica que vamos a desarrollar a continuación. Puesto que en ocasiones tendremos que trabajar con modelos en los que no se cumplan algunos de los axiomas de ZFC, conviene saber qué axiomas necesitamos en cada contexto. Mientras no digamos lo contrario trabajaremos en NBG*, es decir, en NBG sin los axiomas de infinitud, partes, regularidad y elección, pero más adelante necesitaremos comprender que toda la teoría tiene sentido igualmente en ZF*. Aunque lógicamente este capítulo sería el indicado para discutir cómo

y hasta qué punto es posible eliminar toda alusión a clases propias, por razones didácticas pospondremos el problema hasta el capítulo siguiente (sección 2.4) para contar con ejemplos concretos.

La idea básica de la teoría es que “casi” podemos afirmar que la clase universal cumple $V \models \ulcorner ZFC \urcorner$. El problema es que la definición de satisfacción en un modelo exige que el universo sea un conjunto, pues en caso contrario no es lícito aplicar el teorema de recursión mediante el cual definimos \models . Sin embargo, sí que podemos definir qué significa que una clase propia satisfaga una fórmula metamatemática.

Definición 1.15 Fijadas tres variables M , R y d de \mathcal{L}_m , para cada expresión θ de \mathcal{L}_m que no contenga a estas variables definimos como sigue una expresión θ^{MRd} —llamada la *relativización* de θ a (M, R, d) — con las mismas variables libres que θ más tal vez M , R y d :

- a) $x^{MRd} \equiv x$,
- b) $(t_1 = t_2)^{MRd} \equiv t_1^{MRd} = t_2^{MRd}$,
- c) $(t_1 \in t_2)^{MRd} \equiv t_1^{MRd} R t_2^{MRd} \equiv (t_1^{MRd}, t_2^{MRd}) \in R$,
- d) $(\neg\alpha)^{MRd} \equiv \neg\alpha^{MRd}$, $(\alpha \rightarrow \beta)^{MRd} \equiv \alpha^{MRd} \rightarrow \beta^{MRd}$,
- e) $(\bigwedge x\alpha)^{MRd} \equiv \bigwedge x \in M \alpha^{MRd}$,
- f) $(x|\alpha)^{MRd} \equiv x|(x \in M \wedge (\bigvee^1 x \in M \alpha^{MRd} \wedge \alpha^{MRd}) \vee (\neg \bigvee^1 x \in M \alpha^{MRd} \wedge x = d))$.

De este modo, si θ es una fórmula (metamatemática) entonces θ^{MRd} es la fórmula que significa que θ es verdadera en el modelo de universo M , donde el relator \in se interpreta como la relación R y donde la descripción impropia es d . Por ejemplo, $t_1 \in t_2$ es verdadera respecto a (M, R, d) si el objeto denotado por t_1 (o sea, t_1^{MRd}) está relacionado con el objeto denotado por t_2 . El objeto denotado por $x|\alpha$ es el único elemento de M que hace verdadera a α si es que existe o d si no existe. etc.

La diferencia respecto a la definición de satisfacción que teníamos es que ahora M puede ser una clase propia. El precio que hemos pagado es que ahora θ ha de ser un objeto metamatemático, es decir, algo que no existe como conjunto, por lo que no tendría ningún sentido escribir, por ejemplo, $\bigwedge \theta(\dots)$.

Notemos ante todo de que de la definición anterior se siguen inmediatamente las identidades

$$\begin{aligned} (\alpha \vee \beta)^{MRd} &\equiv \alpha^{MRd} \vee \beta^{MRd}, & (\alpha \wedge \beta)^{MRd} &\equiv \alpha^{MRd} \wedge \beta^{MRd}, \\ (\alpha \leftrightarrow \beta)^{MRd} &\equiv \alpha^{MRd} \leftrightarrow \beta^{MRd}, \end{aligned}$$

así como las equivalencias lógicas

$$(\forall x\alpha)^{MRd} \leftrightarrow \forall x \in M \alpha^{MRd}, \quad (\exists x\alpha)^{MRd} \leftrightarrow \exists x \in M \alpha^{MRd}.$$

También es clara la relación entre la relativización y la sustitución:

$$(\mathcal{S}_x^t \theta)^{MRd} \equiv \mathcal{S}_x^{tMRd} \theta^{MRd}.$$

Definición 1.16 Si $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula de \mathcal{L}_m , definimos

$$(M, R, d) \models \alpha \equiv R \subset M \times M \wedge d \in M \wedge \bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \alpha^{MRd}.$$

Más en general, si Γ es una colección finita de fórmulas de \mathcal{L}_m y α es la conjunción de todas ellas, definimos $(M, R, d) \models \Gamma \equiv (M, R, d) \models \alpha$.

Así tenemos dos definiciones de “verdad”: una válida para fórmulas matemáticas sin descriptores (aunque podríamos haber incluido los descriptores si hubiéramos querido) y otra válida para fórmulas metamatemáticas con descriptores. La primera sólo tiene sentido para modelos que sean conjuntos mientras que la segunda vale para clases arbitrarias, la primera tiene sentido para conjuntos arbitrarios de fórmulas y la segunda sólo para colecciones (metamatemáticas) finitas de fórmulas.

El teorema siguiente muestra que donde ambas definiciones tienen sentido son equivalentes. Notemos que requiere el axioma de infinitud pues éste es necesario para definir \mathcal{L}_0 .

Teorema 1.17 Sea $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula de \mathcal{L}_m sin descriptores. Entonces en $NBG^* + AI$ se demuestra:

Si (M, R) es un modelo de \mathcal{L}_0 , $d \in M$ y $a_1, \dots, a_n \in M$, entonces

$$(M, R) \models \ulcorner \alpha \urcorner [a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \alpha^{MRd}(a_1, \dots, a_n).$$

En particular

$$(M, R) \models \ulcorner \alpha \urcorner \leftrightarrow (M, R, d) \models \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre la longitud de α . Si $\alpha \equiv x_i \in x_j$ o $\alpha \equiv x_i = x_j$ entonces ambos miembros equivalen a $a_i \in a_j$ o $a_i = a_j$. Es inmediato comprobar que si el teorema vale para α y β también vale para $\neg\alpha$ y $\alpha \rightarrow \beta$. Supongamos que $\alpha \equiv \bigwedge x\beta$ y que el teorema vale para β . Entonces

$$\begin{aligned} (M, R) \models \ulcorner \bigwedge x\beta \urcorner [a_1, \dots, a_n] &\leftrightarrow \bigwedge a \in M (M, R) \models \ulcorner \beta \urcorner [a, a_1, \dots, a_n] \\ &\leftrightarrow \bigwedge a \in M \beta^{MRd}(a, a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow (\bigwedge x\beta)^{MRd}(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

■

Ahora hemos de analizar con detalle el funcionamiento del nuevo concepto de satisfacción que hemos introducido.

Teorema 1.18 *Sea $t(x_1, \dots, x_n)$ un término de \mathcal{L}_m . Entonces en NBG^* se demuestra:*

$$\bigwedge MRd \bigwedge x_1 \cdots x_n \in M (R \subset M \times M \wedge d \in M \rightarrow t^{MRd} \in M).$$

DEMOSTRACIÓN: Es evidente: si $t = x_i$ es una variable $t^{MRd} = x_i \in M$ por hipótesis, si $t \equiv x|\alpha$, entonces t^{MRd} está definido como el único $x \in M$ que cumple α^{MRd} si existe tal x o como $d \in M$ si no existe. En cualquier caso $t^{MRd} \in M$. ■

Los tres teoremas siguientes son la base de todas las demostraciones de consistencia que vamos a dar. Lo fundamental en ellos es el carácter constructivo de las pruebas.

Teorema 1.19 *Sea $\gamma(x_1, \dots, x_n)$ un teorema lógico. Entonces en NBG^* se demuestra:*

$$\bigwedge MRd (R \subset M \times M \wedge d \in M \rightarrow (M, R, d) \models \gamma).$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar hemos de probarlo para los axiomas lógicos (en el sentido de la [sección 2.1]). La prueba es rutinaria, así que veremos sólo algunos casos:

Si $\gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$, entonces $\gamma^{MRd} \equiv \alpha^{MRd} \rightarrow (\beta^{MRd} \rightarrow \alpha^{MRd})$ es también un axioma lógico del mismo tipo, luego es un teorema de NBG^* , y también lo es $\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \gamma^{MRd}$, que es lo que habíamos de probar.

Si $\gamma \equiv \bigwedge x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \bigwedge x \beta)$, donde la variable x no está libre en α , la relativización es

$$\gamma^{MRd} \equiv \bigwedge x \in M (\alpha^{MRd} \rightarrow \beta^{MRd}) \rightarrow (\alpha^{MRd} \rightarrow \bigwedge x \in M \beta^{MRd}).$$

Ahora bien, es claro que esto es un teorema: para demostrarlo suponemos $\bigwedge x \in M (\alpha^{MRd} \rightarrow \beta^{MRd})$, suponemos α^{MRd} y suponemos $x \in M$. Entonces las hipótesis nos dan β^{MRd} , como había que probar.

Si $\gamma \equiv \bigwedge x (x = t \rightarrow \alpha) \leftrightarrow S_x^t \alpha$, donde x no está libre en t , entonces

$$\gamma^{MRd} \equiv \bigwedge x \in M (x = t^{MRd} \rightarrow \alpha^{MRd}) \leftrightarrow S_x^{t^{MRd}} \alpha^{MRd}.$$

Hemos de probar que $\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \gamma^{MRd}$. Ahora bien, bajo la hipótesis $x_1, \dots, x_n \in M$, el teorema anterior nos da que $t^{MRd} \in M$, y entonces es claro que ambos miembros afirman que t^{MRd} cumple α^{MRd} .

Si $\gamma \equiv \neg \bigvee^1 x \alpha \rightarrow (x|\alpha) = (y|y = y)$, entonces

$$\gamma^{MRd} \leftrightarrow (\neg \bigvee^1 x \in M \alpha^{MRd} \rightarrow (x|\alpha)^{MRd} = d).$$

Ahora bien, esto se cumple por la definición de $(x|\alpha)^{MRd}$.

Una vez comprobados los ocho tipos de axiomas demostramos el teorema por inducción sobre la longitud de una demostración de γ . Si γ se demuestra

en una línea entonces es un axioma, luego el teorema ya está probado para γ . Si se demuestra en más de una línea (y no es un axioma), se deducirá por modus ponens o por generalización a partir de líneas previas que, por hipótesis de inducción, cumplen el teorema.

Si γ se deduce de α y $\alpha \rightarrow \gamma$, entonces tenemos

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \alpha^{MRd} \wedge \bigwedge x_1 \cdots x_n \in M (\alpha^{MRd} \rightarrow \gamma^{MRd}),$$

de donde se sigue obviamente la conclusión.

Si $\gamma \equiv \bigwedge x \alpha$ y tenemos $\bigwedge x_1 \cdots x_n x \in M \alpha^{MRd}$ por hipótesis de inducción, esto es, de hecho, $\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \gamma^{MRd}$. ■

En definitiva, la demostración del teorema anterior nos proporciona una demostración explícita de $(M, R, d) \models \gamma$ a partir de una demostración lógica de γ . Ahora un leve refinamiento nos da el teorema principal:

Teorema 1.20 *Sea Γ una colección finita de sentencias de \mathcal{L}_m y α una fórmula de \mathcal{L}_m tal que $\Gamma \vdash \alpha$. Entonces en NBG^* se demuestra:*

$$\bigwedge MRd ((M, R, d) \models \Gamma \rightarrow (M, R, d) \models \alpha).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea γ la conjunción de todas las sentencias de Γ y sean y_1, \dots, y_m las variables libres en α . Entonces por generalización $\gamma \vdash \bigwedge y_1 \cdots y_m \alpha$, y por el teorema de deducción $\vdash \gamma \rightarrow \bigwedge y_1 \cdots y_m \alpha$. Por el teorema anterior en NBG^* se demuestra

$$\gamma^{MRd} \rightarrow \bigwedge y_1 \cdots y_m \in M \alpha^{MRd}.$$

El antecedente es $(M, R, d) \models \Gamma$, luego concluimos $\bigwedge y_1 \cdots y_m \in M \alpha^{MRd}$, que es precisamente $(M, R, d) \models \alpha$. ■

Insistimos en que la prueba es completamente constructiva: a partir de una demostración de α a partir de Γ y de una demostración de $(M, R, d) \models \Gamma$ en NBG^* sabemos construir explícitamente una demostración de $(M, R, d) \models \alpha$ en NBG^* . Como consecuencia obtenemos el esquema general de una prueba de consistencia:

Teorema 1.21 *Sea T una extensión de NBG^* y Γ una colección finita de fórmulas de \mathcal{L}_m . Si T es consistente y $\vdash_T \bigvee MRd ((M, R, d) \models \Gamma)$, entonces Γ es consistente.*

DEMOSTRACIÓN: Si Γ fuera contradictorio se cumpliría, por ejemplo, que $\Gamma \vdash \emptyset \neq \emptyset$. El teorema anterior nos da una prueba en T de $(M, R, d) \models \emptyset \neq \emptyset$, es decir $\vdash_T \emptyset^{MRd} \neq \emptyset^{MRd}$, lo cual es una contradicción en T . ■

Así pues, ¿cómo se demuestra que si ZFC es consistente también lo es $ZFC + 2^{\aleph_0} = \aleph_1$? Basta probar que para cualquier conjunto finito Γ de axiomas de ZFC, en NBG se demuestra

$$\bigvee MRd (M, R, d) \models \Gamma \cup \{2^{\aleph_0} = \aleph_1\}.$$

Con esto podemos asegurar que si $ZFC+2^{\aleph_0} = \aleph_1$ fuera contradictorio, entonces NBG y, por consiguiente, ZFC también lo sería, ya que la prueba de una contradicción usaría únicamente una cantidad finita Γ de axiomas de ZFC y podríamos usar el teorema anterior para encontrar una contradicción en NBG.

En la práctica, para no hablar constantemente de “colecciones finitas arbitrarias de axiomas de ZFC”, adoptaremos el siguiente convenio:

Cuando en la tesis de un teorema digamos que $(M, R, d) \models ZFC$, habrá que entender que para cada colección finita Γ de axiomas de ZFC podemos probar que $(M, R, d) \models \Gamma$; cuando esta misma afirmación aparezca en las hipótesis de un teorema habrá que entender que si Γ es una colección finita suficientemente grande de axiomas de ZFC y $(M, R, d) \models \Gamma$, entonces se cumple la tesis del teorema. Finalmente, si un teorema es de la forma: “si $(M, R, d) \models ZFC$ entonces $(M', R', d') \models ZFC$ ” habrá que entender que para cada colección finita Γ de axiomas de ZFC existe otra colección Δ tal que si $(M, R, d) \models \Delta$ entonces $(M', R', d') \models \Gamma$.

1.3 El teorema de reflexión

En esta sección trabajaremos únicamente con modelos naturales, es decir, con clases M en las que la relación R será la relación de pertenencia usual: $R = \{(u, v) \in M \times M \mid u \in v\}$. Convendremos también que $d = \emptyset$ (lo cual presupone que $\emptyset \in M$).

De este modo, una relativización θ^M se calcula simplemente cambiando “ $\bigwedge x$ ” por “ $\bigwedge x \in M$ ” y “ x ” por “ $x|(x \in M \wedge \dots)$ ” (y por consiguiente “ $\bigvee x$ ” por “ $\bigvee x \in M$ ”). El relator \in no hay que modificarlo.

En efecto, en lo tocante al descriptor, notemos que ciertamente se cumple $(x|\alpha)^M = x|(x \in M \wedge \alpha^M)$, pues si no existe un único $x \in M$ que cumple α^M esta expresión es $x|(x = x)$, o sea, \emptyset , o sea, d .

En particular, relativizar a la clase universal V es simplemente exigir que cada variable ligada recorra únicamente conjuntos, por lo que si α es una sentencia que sólo hace referencia a conjuntos, es claro que $\alpha \leftrightarrow \alpha^V$.

Ahora bien, los axiomas de ZFC sólo hacen referencia a conjuntos, por lo que claramente se cumplen en V . Por ejemplo, el axioma de infinitud es

$$AI \equiv \bigvee f x (f : x \longrightarrow x \text{ inyectiva y no suprayectiva}),$$

su relativización será $AI^V \equiv \bigvee f x \in V(\dots)$, y es claro que al acotar por V todas las variables ligadas que aparecen en la definición de aplicación inyectiva y aplicación suprayectiva no estamos introduciendo restricción alguna, de modo que AI^V afirma simplemente que existe un conjunto infinito, lo cual es verdad. Lo mismo sucede con los demás axiomas de ZFC.

Así pues, se cumple que V es un modelo de ZFC, entendiendo esto según hemos explicado en la sección anterior: podemos demostrar¹ que V cumple *cada* axioma de ZFC, pero lo máximo que podemos hacer es juntar un número finito de pruebas en una sola, con lo que tenemos teoremas que dicen que V cumple cualquier colección finita de axiomas de ZFC, pero no disponemos de un teorema que afirme simultáneamente que los cumple todos.

Aparentemente de esto no sacamos nada importante. A fin de cuentas, lo único que estamos diciendo es que la totalidad de los conjuntos cumple los axiomas de la teoría de conjuntos. No obstante, el hecho de que hayamos podido dar sentido al hecho de que V es un modelo es importante, pues, como veremos enseguida, de aquí vamos a deducir la existencia de modelos de ZFC que son conjuntos transitivos. Para ello demostraremos una versión metamatemática del teorema de Löwenheim-Skolem. En primer lugar necesitamos la versión metamatemática del teorema 1.7. El enunciado se complica ligeramente porque, por una parte, hemos de considerar una cantidad finita de fórmulas y, por otra, nuestro lenguaje tiene ahora descriptor. Trabajamos en NBG* más el axioma de infinitud.

Definición 1.22 Diremos que una expresión $\theta(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L}_m es *absoluta* para $M - N$ si

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M (\theta^M(x_1, \dots, x_n) = \theta^N(x_1, \dots, x_n))$$

si θ es un término o

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M (\theta^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta^N(x_1, \dots, x_n))$$

si θ es una fórmula.

Diremos que una sucesión $\theta_1, \dots, \theta_k$ de expresiones de \mathcal{L}_m es *adecuada* si toda subexpresión de cada θ_i es de la forma θ_j , con $j < i$ y si $\theta_i \equiv x|\alpha$, entonces existe un $j < i$ tal que $\theta_j \equiv \bigvee^1 x\alpha$.

Es claro que toda sucesión finita de fórmulas de \mathcal{L}_m se puede extender hasta una sucesión adecuada de expresiones de \mathcal{L}_m .

Teorema 1.23 Sea $\theta_1, \dots, \theta_k$ una sucesión adecuada de fórmulas de \mathcal{L}_m . Entonces, en NBG* se demuestra:

Si $M \subset N$ son dos clases cualesquiera tales que $\emptyset \in M$ y para toda fórmula θ_i que sea de la forma $\bigwedge x\alpha(x, x_1, \dots, x_n)$ se cumple

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M (\bigvee x \in N \neg \alpha^N(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee x \in M \neg \alpha^N(x, x_1, \dots, x_n)),$$

entonces todas las expresiones de la sucesión son absolutas para $M - N$.

¹Más precisamente, usando el axioma de infinitud de NBG probamos que V cumple el axioma de infinitud de ZFC, usando el axioma de partes de NBG probamos que V cumple el axioma de partes de ZFC, etc. En particular en NBG-AE podemos demostrar que $V \models ZF$.

DEMOSTRACIÓN: Un poco más en general, en lugar de suponer $\emptyset \in M$ basta tomar un mismo $d \in M$ como descripción impropia tanto de M como de N . Vamos a demostrar por inducción sobre i que cada θ_i es absoluta para $M - N$. De hecho, todas las posibilidades para θ_i se tratan de forma evidente salvo los casos $\theta_i \equiv \bigwedge x\alpha$ y $\theta_i \equiv x|\alpha$. Veamos, pues, estos dos.

Si $\theta_i \equiv \bigwedge x\alpha$, por hipótesis de inducción tenemos que

$$\bigwedge x x_1 \cdots x_n \in M(\alpha^M \leftrightarrow \alpha^N).$$

Obviamente entonces, $\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M((\bigwedge x\alpha)^N \rightarrow (\bigwedge x\alpha)^M)$. Por otra parte, al combinar la hipótesis del teorema con la hipótesis de inducción tenemos la implicación contraria.

Supongamos ahora que $\theta_i \equiv x|\alpha$. El hecho de que la sucesión dada sea adecuada nos da entonces la hipótesis de inducción para $\bigvee^1 x\alpha$, es decir,

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M(\bigvee^1 x \in M\alpha^M \leftrightarrow \bigvee^1 x \in N\alpha^N).$$

Fijados $x_1, \dots, x_n \in M$, o bien no se da ninguna de las dos equivalencias, en cuyo caso $\theta_i^M = d = \theta_i^N$, o bien se dan ambas. Sea $x \in M$ el único que cumple $\alpha^M(x, x_1, \dots, x_n)$. Por la hipótesis de inducción sobre α también $\alpha^N(x, x_1, \dots, x_n)$, es decir, el único elemento de M que cumple α^M es el único elemento de N que cumple α^N , luego $(x|\alpha)^M = (x|\alpha)^N$. ■

El teorema de reflexión es un caso particular del teorema siguiente:

Teorema 1.24 Sean ϕ_1, \dots, ϕ_r fórmulas de \mathcal{L}_m . Sea $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ una sucesión de conjuntos tal que $\bigwedge \alpha \beta (\alpha \leq \beta \rightarrow Z_\alpha \subset Z_\beta)$ y $\bigwedge \lambda Z_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} Z_\delta$. Sea $Z = \bigcup_{\alpha \in \Omega} Z_\alpha$. Entonces para cada ordinal α existe un ordinal límite $\lambda > \alpha$ tal que ϕ_1, \dots, ϕ_r son absolutas para $Z_\lambda - Z$.

DEMOSTRACIÓN: Se entiende que tomamos como descripción impropia para todas las relativizaciones un mismo $d \in Z_\alpha$. La idea de la prueba es la misma que la del teorema de Löwenheim-Skolem, sólo que no necesitamos el axioma de elección porque vamos a elegir ordinales. Extendemos la sucesión de fórmulas dada a una sucesión adecuada de expresiones $\theta_1, \dots, \theta_k$.

Para cada índice i tal que $\theta_i \equiv \bigwedge x\psi(x, x_1, \dots, x_n)$, con $n \geq 1$, definimos la función $G_i : Z^n \rightarrow \Omega$ tal que $G_i(x_1, \dots, x_n)$ es el mínimo ordinal η tal que $\bigvee x \in Z_\eta \neg \psi^Z(x, x_1, \dots, x_n)$ si existe tal η y $G_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ en caso contrario.

Definimos $F_i : \Omega \rightarrow \Omega$ mediante

$$F_i(\xi) = \bigcup_{y \in Z_\xi^n} G_i(y).$$

Si $\theta_i \equiv \bigwedge x\psi(x)$, sin variables libres, definimos $F_i : \Omega \rightarrow \Omega$ de modo que $F_i(\xi)$ es el mínimo ordinal η tal que $\bigvee x \in Z_\eta \neg \psi^Z(x)$ o bien $F_i(\xi) = 0$ si no existe tal η .

Para los índices i tales que θ_i no es una generalización definimos F_i como la función nula. Dado $\alpha \in \Omega$, definimos una sucesión $\{\beta_p\}_{p \in \omega}$ mediante

$$\beta_0 = \alpha, \quad \beta_{p+1} = (\beta_p + 1) \cup F_1(\beta_p) \cup \dots \cup F_k(\beta_p).$$

Como la sucesión es estrictamente creciente, $\lambda = \bigcup_{p \in \omega} \beta_p$ es un ordinal límite, obviamente $\lambda > \alpha$. Vamos a probar que cumple lo pedido. De la construcción se sigue que si $\delta \leq \epsilon$ entonces $F_i(\delta) \leq F_i(\epsilon)$. A su vez esto implica que si $\delta < \lambda$ entonces $F_i(\delta) < \lambda$. En efecto, existe un $p \in \omega$ tal que $\delta < \beta_p$, con lo que $F_i(\delta) \leq F_i(\beta_p) \leq \beta_{p+1} < \lambda$.

Para probar que las expresiones θ_i son absolutas para $Z_\lambda - Z$ aplicamos el teorema anterior. Suponemos que $\theta_i \equiv \bigwedge x \psi(x, x_1, \dots, x_n)$ (tal vez $n = 0$) y hemos de probar que

$$\bigwedge x_1 \dots x_n \in Z_\lambda (\bigvee x \in Z \neg \psi^Z(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee x \in Z_\lambda \neg \psi^Z(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Fijamos $x_1, \dots, x_n \in Z_\lambda$ (en el caso en que $n \neq 0$). Entonces existe un ordinal $\delta < \lambda$ tal que $x_1, \dots, x_n \in Z_\delta$. Sea $\eta < \lambda$ el mínimo ordinal tal que $\bigvee x \in Z_\eta \neg \psi^Z(x, x_1, \dots, x_n)$.

Si $n > 0$ entonces $\eta = G_i(x_1, \dots, x_n) \leq F_i(\delta) < \lambda$ y si $n = 0$ entonces $\eta = F_i(0) < \lambda$. En cualquier caso tenemos que $Z_\eta \subset Z_\lambda$, luego concluimos que $\bigvee x \in Z_\lambda \neg \psi^Z(x, x_1, \dots, x_n)$, como teníamos que probar. ■

Si suponemos el axioma de regularidad y el axioma de partes, el teorema anterior se aplica a la sucesión

$$V = \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha.$$

Así tenemos el teorema de reflexión propiamente dicho:

Teorema 1.25 (Teorema de reflexión) *Si ϕ_1, \dots, ϕ_r son fórmulas de \mathcal{L}_m , entonces en NBG-AE se demuestra que para todo ordinal α existe un ordinal límite $\lambda > \alpha$ tal que las fórmulas dadas son absolutas para $V_\lambda - V$.*

En particular, puesto que V es un modelo de ZFC, vemos que existen conjuntos transitivos que son modelos de (cualquier porción finita de) ZFC. Esto tiene una consecuencia interesante: Sabemos que NBG es finitamente axiomatizable, mientras que la única axiomática que conocemos para ZF tiene infinitos axiomas (a causa del esquema de reemplazo). Ahora podemos probar que esto es así necesariamente.

Teorema 1.26 *Ninguna extensión consistente de ZF es finitamente axiomatizable.*

DEMOSTRACIÓN: Más exactamente, lo que vamos a demostrar es que si $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ es una colección finita de fórmulas de \mathcal{L}_m entre cuyas consecuencias están todos los axiomas (y, por consiguiente, todos los teoremas) de

ZF, entonces Γ es contradictoria. Podemos suponer que Γ contiene los axiomas de extensionalidad y del conjunto vacío, y entonces podemos sustituir cada fórmula de Γ por otra equivalente sin descriptores (sin perder la consistencia). Por el teorema anterior (que es consecuencia de Γ) existe un modelo transitivo $M = V_\lambda$ tal que $M \models \Gamma$. Por el teorema 1.17 concluimos que $M \models \ulcorner \Gamma \urcorner$, donde $\ulcorner \Gamma \urcorner = \{\ulcorner \gamma_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \gamma_n \urcorner\}$.

En definitiva, $\Gamma \vdash \bigvee M(M \models \ulcorner \Gamma \urcorner)$, pero de aquí se sigue $\Gamma \vdash \text{Consis} \ulcorner \Gamma \urcorner$, y el segundo teorema de incompletitud de Gödel implica entonces que Γ es contradictoria. ■

Combinando el teorema de reflexión con el teorema de Löwenheim-Skolem y con el teorema del colapso de Mostowski obtenemos la versión numerable del teorema de reflexión:

Teorema 1.27 *Si Γ es una colección finita de sentencias de \mathcal{L}_m , en ZFC se demuestra que existe un modelo transitivo numerable M de ZFC tal que las sentencias de Γ son absolutas para $M - V$.*

DEMOSTRACIÓN: Añadimos a Γ cualquier colección finita de axiomas de ZFC que queramos que cumpla el modelo M que buscamos. En particular podemos suponer que Γ contiene al axioma de extensionalidad y al axioma del conjunto vacío. Para cada sentencia γ de Γ sea γ' una sentencia sin descriptores equivalente a γ bajo los axiomas de extensionalidad y $x|(x = x) = \emptyset$. Como ambos axiomas son verdaderos en V tenemos que $\gamma^V \leftrightarrow \gamma'^V$. Sea Γ' la colección de todas las sentencias γ' .

Por el teorema de reflexión existe un modelo $N = V_\lambda$ tal que las sentencias de Γ' son absolutas para $N - V$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem existe $S \prec N$ numerable. El modelo S no es necesariamente transitivo, pero $S(\ulcorner \in \urcorner)$ es la relación de pertenencia, que está bien fundada en S (lo está en cualquier conjunto, por el axioma de regularidad). Sea M el colapso transitivo de S (teorema [12.19]). Claramente M (con la relación de pertenencia) es un modelo isomorfo a S . En particular es numerable y elementalmente equivalente a S . Así, M cumple el axioma de extensionalidad y el del conjunto vacío, pues ambos se cumplen en V , luego en N , luego en S , luego en M .

Que M cumpla el axioma del conjunto vacío significa concretamente que $\bigvee x \in M \wedge y \in M \wedge y \notin x$, como M es transitivo, $\bigvee x \in M \wedge y \notin x$, es decir, $\emptyset \in M$, luego podemos considerar a M como modelo con $d = \emptyset$. Esto hace que $\gamma^M \leftrightarrow \gamma'^M$, para cada sentencia γ de Γ . De hecho:

$$\gamma^V \leftrightarrow \gamma'^V \leftrightarrow \gamma'^N \leftrightarrow N \models \ulcorner \gamma' \urcorner \leftrightarrow S \models \ulcorner \gamma' \urcorner \leftrightarrow M \models \ulcorner \gamma' \urcorner \leftrightarrow \gamma'^M \leftrightarrow \gamma^M.$$

Esto prueba que las sentencias de Γ son absolutas para $M - V$. Los axiomas de ZFC que hemos incluido en Γ son verdaderos en V , luego también en M . Así pues, $M \models \text{ZFC}$. ■

Ahora ya tenemos probado que es posible “engañar” a un matemático haciéndole creer que está viendo todos los conjuntos cuando en realidad sólo está viendo

un conjunto numerable (digamos un modelo que cumpla los suficientes axiomas de ZFC para demostrar todos los teoremas que el matemático conoce).

Incidentalmente, este teorema nos proporciona un método indirecto de demostrar teoremas: supongamos que queremos demostrar una sentencia γ que sólo involucra conjuntos, es decir, tal que $\gamma \leftrightarrow \gamma^V$. Una forma de hacerlo es demostrar que γ es verdadera en todo modelo transitivo numerable de ZFC, pues el teorema anterior nos da un tal modelo M que verifica además $\gamma^M \leftrightarrow \gamma^V \leftrightarrow \gamma$. Si hemos probado que γ ha de ser verdadera en todo modelo, aplicado a este caso concluimos γ .

1.4 Modelos transitivos

En esta sección estudiaremos con más detalle los modelos transitivos, que son casi los únicos con los que vamos a tratar. Usaremos las abreviaturas

$$\begin{aligned} \bar{\wedge}x\alpha &\equiv \wedge x \in M\alpha, & \bar{\vee}x\alpha &\equiv \vee x \in M\alpha, & \bar{\vee}^1x\alpha &\equiv \vee^1 x \in M\alpha, \\ \bar{x}|\alpha &\equiv x|(x \in M \wedge \alpha). \end{aligned}$$

De este modo, θ^M se obtiene de θ sin más que poner una barra encima de cada variable ligada.

Cuando “engañamos” a un matemático y le hacemos creer que los únicos conjuntos que existen son los de un modelo M de ZFC, él no notará la diferencia y podrá razonar sobre los conjuntos que ve exactamente igual como razonaría sobre la totalidad de los conjuntos, pero “visto desde fuera” el matemático cometerá muchos errores. Por ejemplo, si el matemático está en un modelo numerable M , admitiendo que $\omega \in M$ y que el matemático sabe identificarlo como al conjunto de todos los números naturales, lo cierto es que se equivocará cuando crea ver a $\mathcal{P}\omega$. Más precisamente, él llamará $\mathcal{P}\omega$ a lo que en realidad es $(\mathcal{P}\omega)^M$, que no puede ser el auténtico $\mathcal{P}\omega$ porque está contenido en M y, por consiguiente, es un conjunto numerable.

El objetivo de esta sección es estudiar en qué medida acierta y en qué medida se equivoca un matemático en estas condiciones, es decir, vamos a estudiar la relación entre lo que ve un matemático “encerrado” en un modelo y lo que cree estar viendo. Veremos que si el modelo es transitivo el matemático acertará en lo tocante a la mayoría de los conceptos conjuntistas básicos, de modo que no nos será excesivamente difícil “ponernos en su lugar” y ver las cosas como él las ve.

Por ejemplo, supongamos que M es un modelo transitivo de ZF^* (es decir, del suficiente ZF^*). Dados $x, y \in M$, podemos preguntarnos quién es $\{x, y\}^M$, o sea, qué entiende por $\{x, y\}$ alguien que “viva” en M . Para responder esta pregunta nos apoyamos en que en ZF^* se demuestra

$$\wedge xy \wedge u (u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y),$$

y como estamos suponiendo que M es un modelo de ZF^* , se ha de cumplir la relativización de esta sentencia (de hecho, cuando decimos que M ha de cumplir los suficientes axiomas de ZF^* , queremos decir que ha de cumplir los necesarios para demostrar esta sentencia). Así pues, tenemos que

$$\bigwedge \bar{x} \bar{y} \bigwedge \bar{u} (\bar{u} \in \{\bar{x}, \bar{y}\}^M \leftrightarrow \bar{u} = \bar{x} \vee \bar{u} = \bar{y}).$$

Ahora bien, la transitividad de M nos permite cambiar \bar{u} por u , pues como $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in M$, del hecho de que $u \in \{\bar{x}, \bar{y}\}^M$ ya se sigue que $u \in M$, y lo mismo sucede si $u = \bar{x} \vee u = \bar{y}$. Por lo tanto tenemos:

$$\bigwedge \bar{x} \bar{y} \bigwedge u (u \in \{\bar{x}, \bar{y}\}^M \leftrightarrow u = \bar{x} \vee u = \bar{y}).$$

Pero esto implica obviamente que $\bigwedge \bar{x} \bar{y} \{\bar{x}, \bar{y}\}^M = \{\bar{x}, \bar{y}\}$, lo cual responde a nuestra pregunta. Así pues, alguien que “viva” en M llamará par desordenado formado por x e y exactamente al par desordenado formado por x e y . Este “acierto” se debe a la transitividad de M . Vamos a introducir las nociones necesarias para sistematizar los razonamientos de este tipo.

Definición 1.28 Sea $\theta(x_1, \dots, x_n)$ una expresión de \mathcal{L}_m . Diremos que θ es *absoluta* para M si se cumple

$$\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\theta^M(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leftrightarrow \theta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))$$

en el caso en que θ sea una fórmula o

$$\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\theta^M(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \theta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))$$

si θ es un término.

Lo que hemos probado antes es que el término $\{x, y\}$ es absoluto para modelos transitivos de ZF^* .

Conviene observar que un término $t(x_1, \dots, x_n)$ es absoluto para M si y sólo si lo es la fórmula $x = t(x_1, \dots, x_n)$. En efecto, si la fórmula es absoluta tenemos que $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \bar{x} (\bar{x} = t^M \leftrightarrow \bar{x} = t)$, y haciendo $\bar{x} = t^M$ (notemos que $t^M \in M$) concluimos que $t^M = t$. El recíproco es similar.

Teniendo en cuenta que la relativización conmuta con la sustitución de términos en expresiones, es claro que al sustituir términos absolutos en expresiones absolutas obtenemos expresiones absolutas. También es claro que al conectar fórmulas absolutas con el negador, el implicador, etc. obtenemos expresiones absolutas. El carácter absoluto sólo puede perderse con los cuantificadores, y aquí es donde interviene la transitividad de los modelos:

Teorema 1.29 Si α es una fórmula absoluta para un modelo transitivo M , también son absolutas $\bigwedge x \in y \alpha$, $\bigvee x \in y \alpha$ y $\bigvee^1 x \in y \alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Si las variables libres de α son x, x_1, \dots, x_n (entre las que puede estar y) y fijamos $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y} \in M$, tenemos que

$$(\bigwedge x \in \bar{y} \alpha)^M \leftrightarrow \bigwedge \bar{x} \in \bar{y} \alpha^M \leftrightarrow \bigwedge \bar{x} \in \bar{y} \alpha \leftrightarrow \bigwedge x \in \bar{y} \alpha,$$

donde en el último paso hemos usado la transitividad de M y en el penúltimo la hipótesis sobre α . Los otros casos se siguen de éste. ■

Conviene explotar este hecho mediante el concepto siguiente:

Definición 1.30 Una fórmula de \mathcal{L}_m sin descriptores es Δ_0 si todos sus cuantificadores aparecen en la forma $\bigwedge x \in y$ o $\bigvee x \in y$.

Más en general, si T es una teoría axiomática sobre \mathcal{L}_m , diremos que una fórmula α de \mathcal{L}_m (con o sin descriptores) es Δ_0^T si es equivalente en T a una fórmula Δ_0 .

Teorema 1.31 Si T es una teoría sobre \mathcal{L}_m y M es un modelo transitivo de T , entonces en T se demuestra que todas las fórmulas Δ_0^T son absolutas para M .

DEMOSTRACIÓN: Sea α una fórmula Δ_0^T . Esto significa $\vdash_T(\alpha \leftrightarrow \beta)$, donde β es una fórmula Δ_0 . Si (en T se demuestra que) M es un modelo de T , entonces

$$\vdash_T \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\alpha^M \leftrightarrow \beta^M).$$

Así pues, basta probar que $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\beta^M \leftrightarrow \beta)$, es decir, que β es absoluta para M , pero esto es consecuencia inmediata del teorema anterior. ■

Teorema 1.32 Las expresiones siguientes son absolutas para modelos transitivos de ZF^* :

$x \in y, x = y$	$x \subset y$	$x \cup y$	$x \cap y$
$x \setminus y$	\emptyset	$\{x_1, \dots, x_n\}$	(x_1, \dots, x_n)
x es una n -tupla desordenada	$x' \equiv x \cup \{x\}$	$0, 1, 2, \dots$	$\bigcup_{u \in x} u, \bigcap_{u \in x} u$
x es una n -tupla ordenada	$x_1 \times \cdots \times x_n$	x transitivo	$x \in$ -conexo
R es una relación, $x R y$	dominio de R	rango de R	R^{-1}
R es refl., sim., antisim., trans.	f es una función	$f(x)$	$f[x]$
$f : x \rightarrow y$ iny., sup., biy.	$f _x$	f^{-1}	$f \circ g$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que todas las fórmulas indicadas y todas las fórmulas $x = t$, donde t es un término de la lista son $\Delta_0^{ZF^*}$.

Para $x \in y, x = y, x \subset y$ es inmediato. Para $z = x \cup y$ tenemos

$$z = x \cup y \leftrightarrow x \subset z \wedge y \subset z \wedge \bigwedge u \in z (u \in x \vee u \in y).$$

Similarmente

$$z = x \cap y \leftrightarrow z \subset x \wedge z \subset y \wedge \bigwedge u \in x (u \in y \rightarrow u \in z).$$

$$z = x \setminus y \leftrightarrow \bigwedge u \in z (u \in x \wedge u \notin y) \wedge \bigwedge u \in x (u \notin y \rightarrow u \in z).$$

$$x = \emptyset \leftrightarrow \bigwedge u \in x u \neq u.$$

$$x = \{x_1, \dots, x_n\} \leftrightarrow x_1 \in x \wedge \dots \wedge x_n \in x \wedge \bigwedge u \in x (u = x_1 \vee \dots \vee u = x_n).$$

Recordemos que $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Por lo tanto:

$$z = (x, y) \leftrightarrow \bigvee uv \in z (u = \{x\} \wedge v = \{x, y\} \wedge z = \{u, v\}).$$

Ahora razonamos por inducción: si $z = (x_1, \dots, x_{n-1})$ es $\Delta_0^{ZF^*}$,

$$z = (x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow z = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

$$\leftrightarrow \bigvee u \in z \bigvee p \in u (z = (p, x_n) \wedge p = (x_1, \dots, x_{n-1})).$$

$$z \text{ es una } n\text{-tupla desordenada} \leftrightarrow \bigvee x_1 \cdots x_n \in z z = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

$$z \text{ es un par ordenado} \leftrightarrow \bigvee u \in z \bigvee xy \in u z = (x, y).$$

Por inducción:

$$z \text{ es una } n\text{-tupla ordenada} \leftrightarrow \bigvee u \in z \bigvee xy \in u (z = (x, y)$$

$$\wedge x \text{ es una } n-1\text{-tupla ordenada}).$$

$$y = x' \leftrightarrow x \subset y \wedge x \in y \wedge \bigwedge u \in y (u \in x \vee u = x).$$

Para probar que $x = 0, 1, 2$, etc. son fórmulas $\Delta_0^{ZF^*}$ razonamos por inducción. Para 0 ya está probado y si vale para n entonces

$$x = n + 1 \leftrightarrow \bigvee u \in x (x = n \wedge y = x').$$

A partir de aquí omitiremos las pruebas que no requieran ninguna aclaración particular.

R es una relación equivale a $\bigwedge u \in R$ u es un par ordenado. La expresión $x R y$ equivale a $\bigvee u \in R u = (x, y)$.

Ahora conviene definir

$$(x)_1 = y \mid \bigvee z (x = (y, z)), \quad (x)_2 = y \mid \bigvee z (x = (z, y)).$$

Vamos a probar que ambas expresiones son $\Delta_0^{ZF^*}$. Ambas son análogas, así que consideramos la primera:

$$y = (x)_1 \leftrightarrow \bigvee u \in x \bigvee z \in u x = (y, z) \vee (\neg \bigvee u \in x \bigvee zw \in u x = (w, z) \wedge y = \emptyset).$$

Si llamamos $\text{dom } R$ al dominio de un conjunto R , entonces

$$x = \text{dom } R \leftrightarrow \bigwedge u \in x \bigvee v \in R (v \text{ es un par ordenado} \wedge u = (v)_1)$$

$$\wedge \bigwedge u \in R (u \text{ es un par ordenado} \rightarrow \bigvee v \in x (v = (u)_1)).$$

$$f \text{ es una función} \leftrightarrow f \text{ es una relación}$$

$$\wedge \bigwedge uv \in f (\bigvee p \in u \bigvee q \in p (q = (u)_1 \wedge q = (v)_1) \rightarrow u = v).$$

$$y = f(x) \leftrightarrow \bigvee^1 u \in f(u \text{ es un par ordenado} \wedge x = (u)_1 \wedge y = (u)_2)$$

$$\vee (\neg \bigvee^1 u \in f(u \text{ es un par ordenado} \wedge x = (u)_1) \wedge y = \emptyset).$$

■

Una consecuencia importante del carácter absoluto de todas estas expresiones es que los modelos transitivos de ZF^* son cerrados para las operaciones conjuntistas básicas, es decir, si M es un modelo transitivo y $x, y \in M$, entonces $x \cup y \in M$, pues $x \cup y = (x \cup y)^M \in M$. Lo mismo vale para la intersección, el producto cartesiano, etc. Una simple inducción demuestra ahora que $\omega \subset M$, pues $\emptyset \in M$ y si $n \in M$ entonces $n + 1 = n \cup \{n\} \in M$. Usando que si $u, v \in M$ entonces $u \cup \{v\} \in M$ y razonando por inducción sobre el cardinal de x probamos el teorema siguiente:

Teorema 1.33 *Si M es un modelo transitivo de ZF^* entonces*

$$\bigwedge x (x \subset M \wedge x \text{ finito} \rightarrow x \in M).$$

Así pues, si hablamos con un matemático que viva sin saberlo en un modelo M , podemos tomar al pie de la letra todo lo que diga sobre uniones, productos cartesianos, relaciones, etc. (donde el etcétera se restringe, de momento, a la lista del teorema 1.32). Antes hemos puesto como ejemplo de “posible error” de un matemático en estas circunstancias el concepto de $\mathcal{P}x$. Con más detalle, es un teorema de ZFC que

$$\bigwedge x \bigwedge u (u \in \mathcal{P}x \leftrightarrow u \subset x).$$

Así, si M es un modelo transitivo de ZFC se ha de cumplir

$$\bigwedge \bar{x} \bigwedge \bar{u} (\bar{u} \in (\mathcal{P}\bar{x})^M \leftrightarrow \bar{u} \subset \bar{x}).$$

Ahora la transitividad no nos permite sustituir \bar{u} por u en el miembro derecho, y lo máximo que podemos hacer es

$$\bigwedge \bar{x} \bigwedge u (u \in (\mathcal{P}\bar{x})^M \leftrightarrow u \in M \wedge u \subset \bar{x}).$$

De aquí se sigue claramente que $\bigwedge \bar{x} (\mathcal{P}\bar{x})^M = \mathcal{P}\bar{x} \cap M$. Si el modelo M es numerable y $\bar{x} \in M$ es infinito, necesariamente $(\mathcal{P}\bar{x})^M \neq \mathcal{P}\bar{x}$. Así pues, $\mathcal{P}x$ no es, en general, absoluto para modelos transitivos de ZFC. Desde un punto de vista semántico, alguien que “viva” en un modelo transitivo de ZFC y que vea un conjunto infinito $x \in M$ verá otro conjunto al que reconocerá como $\mathcal{P}x$, pero éste no tiene por qué ser $\mathcal{P}x$, sino que en general será $\mathcal{P}x \cap M$, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de x que él ve, que no tienen por qué ser todos los subconjuntos de x .

Hay muchos conceptos de interés que son absolutos para modelos transitivos pero que no son Δ_0 . Para entender correctamente la situación conviene introducir algunos conceptos adicionales:

Definición 1.34 Una fórmula de \mathcal{L}_m es Σ_n si es de la forma

$$\forall x_1 \wedge x_2 \forall x_3 \cdots x_n \alpha,$$

donde α es una fórmula Δ_0 . Una fórmula de \mathcal{L}_m es Π_n si es de la forma

$$\wedge x_1 \forall x_2 \wedge x_3 \cdots x_n \alpha,$$

donde α es de nuevo una fórmula Δ_0 .

Más en general, si T es una teoría axiomática sobre \mathcal{L}_m , diremos que una fórmula es Σ_n^T o Π_n^T si es equivalente en T a una fórmula del tipo correspondiente. Diremos que una fórmula es de tipo Δ_n^T si es a la vez Σ_n^T y Π_n^T .

Esta clasificación de las fórmulas se conoce como *jerarquía de Lévy*. El teorema siguiente muestra, entre otras cosas, que toda fórmula ocupa un lugar en ella.

Teorema 1.35 *Sea T una teoría sobre \mathcal{L}_m que contenga al menos el axioma de extensionalidad y el axioma del par. Entonces*

- a) Si α y β son fórmulas Σ_n^T entonces también lo son $\forall x \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, y $\alpha \vee \beta$.
- b) Si α y β son fórmulas Π_n^T entonces también lo son $\wedge x \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, y $\alpha \vee \beta$.
- c) Si α es Σ_n^T entonces $\neg \alpha$ es Π_n^T y viceversa.
- d) Si α es Σ_n^T y β es Π_n^T entonces $\alpha \rightarrow \beta$ es Π_n y análogamente intercambiando Σ y Π .
- e) Si α y β son fórmulas Δ_n^T también lo son

$$\neg \alpha, \quad \alpha \wedge \beta, \quad \alpha \vee \beta, \quad \alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha \leftrightarrow \beta.$$

DEMOSTRACIÓN: a) Por simplicidad supondremos $n = 3$. El caso general es formalmente idéntico. Tenemos que $\alpha \leftrightarrow \forall x_1 \wedge x_2 \forall x_3 \phi$, donde ϕ es Δ_0 . Así

$$\begin{aligned} \forall x \alpha &\leftrightarrow \forall x x_1 \wedge x_2 \forall x_3 \phi \leftrightarrow \forall w \forall z \in w \forall x x_1 \in z (w = (x, x_1) \wedge \wedge x_2 \forall x_3 \phi) \\ &\leftrightarrow \forall w \wedge x_2 \forall x_3 \forall z \in w \forall x x_1 \in z (w = (x, x_1) \wedge \phi). \end{aligned}$$

Si $\beta \leftrightarrow \forall y_1 \wedge y_2 \forall y_3 \psi$, donde ψ es Δ_0 y las variables y_1, y_2, y_3 son distintas de x_1, x_2, x_3 , entonces

$$\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \forall x_1 y_1 \wedge x_2 y_2 \forall x_3 y_3 (\phi \wedge \psi).$$

Ahora basta aplicar tres veces el caso ya probado y el correspondiente de b), que se sigue del que hemos probado aplicando c). Notemos que c) es inmediato. El caso de $\alpha \vee \beta$ es idéntico.

Como ya hemos comentado, c) es inmediato y b) se sigue de a) por c).

d) se sigue de los apartados anteriores porque $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg \alpha \vee \beta)$.

e) es evidente. ■

Ejercicio: Demostrar que si α es Σ_n^{ZFC} entonces $\bigwedge x \in y \alpha$ también lo es. Por consiguiente si α es Π_n^{ZFC} entonces $\bigvee x \in y \alpha$ también lo es y si α es Δ_n^{ZFC} entonces $\bigwedge x \in y \alpha$ y $\bigvee x \in y \alpha$ también lo son. AYUDA: $\bigwedge x \in y \bigvee z \phi \leftrightarrow \bigvee a \bigwedge x \in y \bigvee z \in a \phi$.

Por ejemplo, la fórmula $y = \mathcal{P}x$ es Π_1 respecto a $\text{ZF}^* + \text{AP}$. Basta observar que

$$y = \mathcal{P}x \leftrightarrow \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \subset x),$$

pero la variable u no puede acotarse. (Si se pudiera acotar, la fórmula sería Δ_0 y $\mathcal{P}x$ sería absoluto.)

Vemos, pues, que hay fórmulas Π_1 que no son absolutas para modelos transitivos, y por consiguiente también hay fórmulas Σ_1 no absolutas. Sin embargo las fórmulas Δ_1 sí que son absolutas:

Teorema 1.36 *Si T es una teoría sobre \mathcal{L}_m y α es una fórmula Δ_1^T , entonces en T se demuestra que α es absoluta para modelos transitivos de T .*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $\alpha \leftrightarrow \bigvee x \beta \leftrightarrow \bigwedge x \gamma$, donde β y γ son fórmulas Δ_0 , en particular absolutas para modelos transitivos. Sean x_1, \dots, x_n las variables libres de α . Sea M un modelo transitivo de T y fijemos $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in M$. Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha^M &\rightarrow \bigvee \bar{x} \beta^M \rightarrow \bigvee \bar{x} \beta \rightarrow \bigvee x \beta \rightarrow \alpha, \\ \alpha &\rightarrow \bigwedge x \gamma \rightarrow \bigwedge \bar{x} \gamma \rightarrow \bigwedge \bar{x} \gamma^M \rightarrow \alpha^M. \end{aligned}$$

■

Más detalladamente, vemos que las fórmulas Σ_1 son absolutas “hacia arriba” en el sentido de que si se cumplen en un modelo se cumplen fuera de él, mientras que las fórmulas Π_1 son absolutas “hacia abajo” en el sentido de que si se cumplen fuera del modelo (pero con las variables libres tomando valores en él) entonces se cumplen en el modelo. La combinación de estos dos hechos da el carácter absoluto de las fórmulas Δ_1 .

Sigamos clasificando fórmulas concretas. Consideremos ahora “ x es un ordinal”. En principio

$$\begin{aligned} x \text{ es un ordinal} &\leftrightarrow \bigwedge y \in x \ y \subset x \wedge \bigwedge uv \in x (u \in v \vee v \in u \vee u = v) \\ &\wedge \bigwedge y (y \subset x \wedge y \neq \emptyset \rightarrow \bigvee u \in y \bigwedge v \in u \ v \notin y). \end{aligned}$$

Es decir, un ordinal es un conjunto transitivo, conexo y bien fundado. Las dos primeras propiedades son Δ_0 , pero la buena fundación es Π_1 . En general no se puede decir más y la noción de ordinal no es absoluta, pero si suponemos el axioma de regularidad $V = R$, entonces todo conjunto está bien fundado, luego los ordinales se caracterizan como los conjuntos transitivos y bien fundados, con lo que “ser un ordinal” pasa a ser Δ_0 .

Se dice que una clase A es Σ_n^T , Π_n^T o Δ_n^T si la fórmula $x \in A$ es del tipo correspondiente. Así, lo que acabamos de observar es que la clase Ω de todos los ordinales es una clase Π_1 pero que bajo el axioma de regularidad pasa a ser Δ_0 . A su vez esto tiene otras consecuencias:

Teorema 1.37 Sea T una extensión de ZF^* en la que Ω sea Δ_0^T (por ejemplo $ZF^* + V = R$). Entonces

- a) “ x es un ordinal sucesor”, “ x es un ordinal límite”, “ x es un número natural” son Δ_0^T .
- b) R es un buen orden en A , $y = \text{ord}(A, R)$ son Δ_1^T ,
- c) Si T contiene el axioma de infinitud, $x = \omega$ es Δ_0^T , mientras que “ R es una relación bien fundada en A ”, $y = \text{ct } x$ (la clausura transitiva), “ x es regular”, $y = \text{rang } x$ son Δ_1^T .

DEMOSTRACIÓN: Claramente x es un ordinal sucesor $\leftrightarrow x$ es un ordinal $\wedge \forall y \in x \ x = y'$, luego es Δ_0^T . Ser un límite es no ser 0 y no ser un sucesor, luego también es Δ_0^T .

x es un número natural $\leftrightarrow x$ es un sucesor $\wedge \wedge u \in x (u \text{ no es un límite})$.

En principio ser un buen orden es Π_1 :

$$R \text{ es un buen orden en } A \leftrightarrow R \text{ es un orden parcial en } A \\ \wedge \wedge X (X \subset A \wedge X \neq \emptyset \rightarrow \forall u \in X \wedge v \in X (u R v)).$$

Pero, por otra parte,

$$R \text{ es un buen orden en } A \leftrightarrow R \text{ es un orden parcial en } A \\ \wedge \forall f \alpha (\alpha \text{ es un ordinal} \wedge f : \alpha \rightarrow (A, R) \text{ semejanza}).$$

Similarmente

$$y = \text{ord}(A, R) \leftrightarrow y \text{ es un ordinal} \wedge \forall f (f : y \rightarrow (A, R) \text{ semejanza}), \\ y = \text{ord}(A, R) \leftrightarrow \wedge f \alpha (\alpha \text{ ordinal} \wedge f : \alpha \rightarrow (A, R) \text{ semejanza} \rightarrow \alpha = y).$$

Por otra parte, $x = \omega$ es Δ_0^T , pues

$$x = \omega \leftrightarrow x \text{ es un ordinal límite} \wedge \wedge u \in x (u \text{ no es un ordinal límite}).$$

El argumento para las relaciones bien fundadas es similar al de los buenos órdenes, sólo que requiere el axioma de infinitud porque la equivalencia Σ_1 se basa en la existencia de la aplicación rango (es la f que aparece mas abajo):

$$R \text{ es una relación bien fundada en } A \leftrightarrow R \text{ es una relación en } A \\ \wedge \wedge X (X \subset A \wedge X \neq \emptyset \rightarrow \forall u \in X \wedge v \in X \neg v R u) \\ \leftrightarrow R \text{ es una relación en } A \wedge \forall f \alpha (\alpha \text{ es un ordinal} \wedge f : A \rightarrow \alpha \\ \wedge \wedge uv \in A (u R v \rightarrow \forall pq \in \alpha (p = f(u) \wedge q = f(v) \wedge p \in q))).$$

Para estudiar la clausura transitiva conviene definir la fórmula Δ_0^T :

$$\begin{aligned} \phi(f, A, B, x) \equiv & f : A \longrightarrow B \text{ suprayectiva} \wedge A = \omega \wedge \forall u \in A (u = 0 \wedge f(u) = x) \\ & \wedge \bigwedge u \in A \forall v \in A \forall w z \in B (v = u' \wedge w = f(u) \wedge z = f(v) \wedge z = \bigcup_{r \in w} r). \end{aligned}$$

Es claro que $\phi(f, A, B, x)$ equivale a que f sea la aplicación de dominio ω dada por $f(0) = x$ y $f(n+1) = \bigcup_{r \in f(n)} r$. Así

$$\begin{aligned} y = \text{ct } x & \leftrightarrow \forall f \forall A \forall B (\phi(f, A, B, x) \wedge y = \bigcup_{r \in B} r) \\ & \leftrightarrow \bigwedge f \forall A \forall B (\phi(f, A, B, x) \rightarrow y = \bigcup_{r \in B} r). \end{aligned}$$

Similarmente, definimos la fórmula Δ_0^T :

$$\psi(R, x, y) \equiv y = \text{ct } x \wedge R \text{ es una relación en } y \wedge \bigwedge uv \in y (u R v \leftrightarrow u \in v),$$

de modo que $\psi(R, x, y)$ significa que R es la relación de pertenencia en $\text{ct } x$. Un conjunto es regular si la relación de pertenencia está bien fundada en su clausura transitiva, luego

$$\begin{aligned} x \text{ es regular} & \leftrightarrow \forall R y (\psi(R, x, y) \wedge R \text{ está bien fundada en } y) \\ & \leftrightarrow \bigwedge R y (\psi(R, x, y) \rightarrow R \text{ está bien fundada en } y), \end{aligned}$$

luego la regularidad es Δ_1^T . ■

El carácter absoluto de las fórmulas Δ_1 puede engañar al principiante. Por ejemplo, ¿podemos fiarnos de un matemático que vive en un modelo M cuando dice que un conjunto $X \in M$ que él ve está bien ordenado? No hay duda de que si X está bien ordenado él se dará cuenta de que así es, pues si $A \in M$ es un subconjunto no vacío de X , entonces A tendrá un mínimo elemento $m \in A \subset M$, luego el matemático lo verá; pero no es ésta la cuestión. Si el matemático dice que X está bien ordenado, eso significa que todos los subconjuntos no vacíos de X que él ve tienen mínimo, pero ¿no podría haber un $A \subset X$ no vacío y sin mínimo elemento que se le haya escapado al matemático porque $A \notin M$? La duda es razonable, aunque la respuesta es negativa porque acabamos de probar que ser un buen orden es Δ_1 y, por consiguiente, absoluto.

Como aplicación podemos decir algo sobre los ordinales en un modelo transitivo. Razonamos en NBG sin el axioma de elección (pero necesitamos el axioma de partes y el axioma de infinitud para tener definido el rango de un conjunto y que las clases V_α sean conjuntos).

Teorema 1.38 [NBG–AE] *Sea M un modelo transitivo de ZF y llamemos $\Omega^M = \Omega \cap M$. Entonces $\Omega^M = \Omega$ si M es una clase propia y Ω^M es un ordinal límite si M es un conjunto.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que Ω^M es lo que “confundiría” con la clase de todos los ordinales alguien que “viviera” en M . Tenemos que Ω^M es una clase de ordinales y, como Ω y M son ambos transitivos, Ω^M también lo es. Esto implica que Ω^M es un ordinal. Como el término $\alpha + 1$ es absoluto para M , tenemos que si $\alpha \in \Omega^M$ entonces $\alpha + 1 \in \Omega^M$. Así pues, o bien $\Omega^M = \Omega$ o bien Ω^M es un ordinal límite. En el primer caso es claro que M ha de ser una clase propia. Basta probar que si $\Omega^M = \lambda$ es un ordinal límite entonces M es un conjunto.

Esto significa que todo conjunto de M es regular ^{M} , pero la regularidad es absoluta, luego todo conjunto de M es regular. El rango también es absoluto, luego si $x \in M$, entonces $\text{rang } x = \text{rang}^M x \in M$, luego $\text{rang } x \in \lambda$. Esto significa que $M \subset V_\lambda$, luego M es un conjunto. ■

Hay algunos conceptos cuyo carácter absoluto no se sigue de su posición en la jerarquía de Lévy. Es el caso de la finitud, que en principio es Σ_1 :

$$x \text{ es finito} \leftrightarrow \forall f n(n \text{ es un número natural} \wedge f : n \longrightarrow x \text{ biyectiva}).$$

Si suponemos el axioma de elección también es Π_1 y, por tanto, Δ_1 :

$$x \text{ es finito} \leftrightarrow \bigwedge f \alpha (\alpha \in \Omega \wedge f : \alpha \longrightarrow x \text{ biyectiva} \rightarrow \alpha \in \omega).$$

Ahora bien, el teorema siguiente muestra que no hace falta suponer el axioma de elección para que la finitud sea absoluta. Por otra parte, la suma, el producto y la exponenciación de ordinales son Δ_1 (supuesto que Ω sea Δ_0), pero la definición recursiva de estas operaciones vuelve farragosa la prueba, y en la práctica nos bastará comprobar directamente su carácter absoluto.

Teorema 1.39 *Sea T una extensión de ZF^* para la que Ω sea Δ_0 (por ejemplo $ZF^* + V = R$). Entonces en T se demuestra que “ x es finito” y “ x es infinito” son absolutos para modelos transitivos de T , así como la aritmética ordinal.*

DEMOSTRACIÓN: Según hemos visto, la finitud es Σ_1 , luego si M es un modelo transitivo de T , tenemos que x finito ^{M} \rightarrow x finito. Recíprocamente, si $x \in M$ es finito, entonces existe $f : n \longrightarrow x$ biyectiva, donde n es un número natural. Ahora bien, $n \in M$ (sabemos que $\omega \subset M$). Así mismo $n \times x \in M$ porque el producto cartesiano es absoluto y $f \subset n \times x$ es un subconjunto finito de M , luego por el teorema 1.33 concluimos que $f \in M$. Así pues,

$$\forall \bar{f} \bar{n} (n \text{ es un número natural} \wedge f : n \longrightarrow x \text{ biyectiva}),$$

lo que prueba que x es finito ^{M} . Ser infinito es absoluto porque es la negación de ser finito.

Respecto de la aritmética ordinal, supongamos probado que la suma es absoluta y veamos que lo es el producto. Igualmente se razona con la suma y la exponenciación. En ZF^* se demuestra que

$$\bigwedge \alpha (\alpha \cdot 0 = 0 \wedge \bigwedge \beta \alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha \wedge \bigwedge \lambda \alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \alpha \cdot \delta).$$

Todos los conceptos que aparecen son absolutos salvo quizá el producto, luego al relativizar a un modelo M tenemos que

$$\bigwedge \bar{\alpha} (\bar{\alpha} \cdot 0 = 0 \wedge \bigwedge \bar{\beta} \bar{\alpha} \cdot^M (\bar{\beta} + 1) = \alpha \cdot^M \beta + \alpha \wedge \bigwedge \lambda \alpha \cdot^M \lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \alpha \cdot^M \delta).$$

De estos dos hechos se sigue por inducción sobre $\beta \in M$ que

$$\bigwedge \bar{\alpha} \bar{\beta} (\bar{\alpha} \cdot^M \bar{\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}),$$

luego el producto es absoluto. \blacksquare

También conviene observar que los conceptos de la teoría de modelos son absolutos. Omitimos la prueba del teorema siguiente porque no es más que una serie de comprobaciones rutinarias:

Teorema 1.40 *Las expresiones “ \mathcal{L} es un lenguaje formal”, “ t es un término de \mathcal{L} ”, “ ϕ es una fórmula de \mathcal{L} ”, “ M es un modelo de \mathcal{L} ”, “ $M \models \phi[s]$ ” son absolutas para modelos transitivos de ZF–AP.*

(Una prueba detallada exige probar uno por uno el carácter absoluto de todos los conceptos involucrados: signos, constantes, relatores, variables libres y ligadas, etc.)

Terminamos explicitando lo que ha de cumplir una clase transitiva M para ser un modelo de ZFC. Razonamos en NBG* salvo que indiquemos lo contrario.

Extensionalidad El axioma de extensionalidad es

$$\bigwedge xy (\bigwedge u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y).$$

Claramente, la relativización a M es

$$\bigwedge \bar{x} \bar{y} (\bigwedge u (u \in \bar{x} \leftrightarrow u \in \bar{y}) \rightarrow \bar{x} = \bar{y}).$$

Notemos que no es necesario poner \bar{u} por la transitividad de M . Esta relativización se cumple siempre, luego concluimos que el axioma de extensionalidad es verdadero en cualquier clase transitiva M .

Par El axioma del par es

$$\bigwedge xy \exists z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

La relativización es

$$\bigwedge \bar{x} \bar{y} \exists \bar{z} \bigwedge u (u \in \bar{z} \leftrightarrow u = \bar{x} \vee u = \bar{y}).$$

Claramente esto equivale a

$$\bigwedge \bar{x} \bar{y} \{ \bar{x}, \bar{y} \} \in M.$$

Esto es lo que ha de cumplir M para verificar el axioma del par.

Unión El axioma de la unión es

$$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \bigvee z \in x u \in z).$$

Su relativización es

$$\bigwedge \bar{x} \bigvee \bar{y} \bigwedge u (u \in \bar{y} \leftrightarrow \bigvee z \in \bar{x} u \in z),$$

que claramente equivale a

$$\bigwedge \bar{x} \bigcup_{z \in \bar{x}} z \in M.$$

Vacío El axioma del conjunto vacío es $\bigvee x \bigwedge y y \notin x$, y su relativización es $\bigvee \bar{x} \bigwedge y y \notin \bar{x}$, que claramente equivale a

$$\emptyset \in M.$$

Reemplazo Para cada fórmula $\phi(x, y, x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L}_m , el axioma de reemplazo para ϕ es

$$\begin{aligned} & \bigwedge x_1 \cdots x_n (\bigwedge xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z) \\ & \rightarrow \bigwedge a \bigvee b \bigwedge y (y \in b \leftrightarrow \bigvee x \in a \phi(x, y))) \end{aligned}$$

Su relativización es

$$\begin{aligned} & \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bigwedge \bar{x} \bar{y} \bar{z} (\phi^M(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi^M(\bar{x}, \bar{z}) \rightarrow \bar{y} = \bar{z}) \\ & \rightarrow \bigwedge \bar{a} \bigvee \bar{b} \bigwedge \bar{y} (\bar{y} \in \bar{b} \leftrightarrow \bigvee x \in \bar{a} \phi^M(x, \bar{y}))) \end{aligned}$$

En otros términos, esto significa que si $F : A \subset M \rightarrow M$ es una función definida por una fórmula, es decir, $F(x) = y \leftrightarrow \phi^M(x, y)$, entonces para todo $a \in M$ se cumple que $F[a] \in M$.

Infinitud El axioma de infinitud es

$$\bigvee f x (f : x \rightarrow x \text{ inyectiva no suprayectiva}).$$

La fórmula tras $\bigvee f x$ es Δ_0 , luego la relativización es

$$\bigvee \bar{f} \bar{x} (\bar{f} : \bar{x} \rightarrow \bar{x} \text{ inyectiva no suprayectiva}).$$

En la práctica, si M es un modelo de una teoría T para la que Ω es Δ_0 (por ejemplo $\text{ZF}^* + \text{V} = \text{R}$), entonces en T se prueba que M cumple el axioma de infinitud si y sólo si

$$\omega \in M.$$

En efecto, si M cumple el axioma de infinitud ω es absoluto para M , luego $\omega \in M$ y, recíprocamente, si $\omega \in M$ entonces $(\bigvee x x \text{ es un ordinal límite})^M$, pues ser un ordinal límite es absoluto para M , y la existencia de un ordinal límite equivale al axioma de infinitud.

Partes El axioma de partes es $\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \subset x)$. Su relativización es $\bigwedge \bar{x} \bigvee \bar{y} \bigwedge u (u \in \bar{y} \leftrightarrow u \subset \bar{x} \wedge u \in M)$. Suponiendo el axioma de partes, esto equivale a

$$\bigwedge \bar{x} \mathcal{P}\bar{x} \cap M \in M.$$

Regularidad El axioma de regularidad es

$$\bigwedge x (\bigvee y y \in x \rightarrow \bigvee y \in x \bigwedge u \in y u \notin x).$$

Su relativización es

$$\bigwedge \bar{x} (\bigvee y y \in \bar{x} \rightarrow \bigvee y \in \bar{x} \bigwedge u \in y u \notin \bar{x}).$$

Esto significa que la relación de pertenencia está bien fundada en todo elemento de M . Teniendo en cuenta que M es transitivo, esto equivale a que la relación de pertenencia está bien fundada en la clausura transitiva de todo elemento de M (aquí suponemos el axioma de infinitud), luego equivale a que todo elemento de M sea regular. En definitiva, M cumple el axioma de regularidad si y sólo si $M \subset R$, donde R es la clase de todos los conjuntos regulares. En particular, si $V = R$ entonces el axioma de regularidad se cumple en cualquier clase transitiva.

Elección El axioma de elección es

$$\bigwedge x \bigvee f (f \text{ es una función de dominio } x \wedge \bigwedge u \in x (u \neq \emptyset \rightarrow f(u) \in u)).$$

Su relativización se obtiene sin más que poner $\bigwedge \bar{x} \bigvee \bar{f}$, es decir, para demostrar que un modelo transitivo M de ZF^* cumple el axioma de elección basta ver que todo conjunto $x \in M$ tiene una función de elección $f \in M$.

Si suponemos $V = R$ entonces también son absolutas otras nociones como “ser una biyección de x en un ordinal α ”, o “ser un buen orden en x ”, de modo que también podemos comprobar el axioma de elección demostrando que todo conjunto $x \in M$ puede biyectarse con un ordinal $\alpha \in M$ mediante una biyección $f \in M$, o demostrando que todo $x \in M$ puede ser bien ordenado por una relación $R \in M$, etc.

1.5 Los números reales

Vamos a ver cómo son y cómo se comportan los números reales de un modelo transitivo M de ZF . Para ello hemos de estudiar previamente los números enteros y los racionales.

La forma usual de definir los números enteros es considerar la relación en $\omega \times \omega$ dada por

$$\bigwedge m n m' n' \in \omega ((m, n) R (m', n') \leftrightarrow m + n' = m' + n),$$

y definir \mathbb{Z} como el conjunto cociente.

Vamos a probar que \mathbb{Z} es absoluto para M . En general, la forma de probar que algo es absoluto es relativizar su definición. Si ésta involucra otros conceptos, primero hemos de probar que éstos son también absolutos. En nuestro caso empezamos probando que R es absoluta. Para ello relativizamos su definición:

$$\bigwedge m n m' n' \in \omega ((m, n) R^M (m', n') \leftrightarrow m + n' = m' + n).$$

Aquí hemos usado que $\omega^M = \omega$, lo cual implica en particular que no hace falta poner \bar{m} , \bar{n} , etc., ya que $m \in \omega$ ya implica que $m \in M$. También hemos usado que (x, y) es absoluto y que la suma de números naturales es absoluta.

Ahora es claro que $R^M = R$, como queríamos probar. La noción de cociente involucra la de clase de equivalencia, por lo que ahora hemos de probar que las clases de equivalencia respecto a R son absolutas. Para ello escribimos la definición de clase de equivalencia:

$$\bigwedge x \in \omega \times \omega (\bigwedge y (y \in [x] \leftrightarrow y \in \omega \times \omega \wedge y R x))$$

y la relativizamos a M :

$$\bigwedge x \in \omega \times \omega (\bigwedge y (y \in [x]^M \leftrightarrow y \in \omega \times \omega \wedge y R x)).$$

De nuevo observamos que no hace falta poner \bar{x} o \bar{y} , debido a que $\omega \times \omega \in M$. En definitiva, $\bigwedge x \in \omega \times \omega [x]^M = [x]$. Ahora ya podemos relativizar la definición de \mathbb{Z} , que es:

$$\bigwedge r (r \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \bigvee x \in \omega \times \omega r = [x]).$$

La relativización es simplemente

$$\bigwedge r (r \in \mathbb{Z}^M \leftrightarrow \bigvee x \in \omega \times \omega r = [x]).$$

De nuevo vemos que no hace falta poner \bar{r} porque $x \in \omega \times \omega$ implica $x \in M$ y $r = [x] = [x]^M$ ya implica $r \in M$. En definitiva tenemos que $\mathbb{Z}^M = \mathbb{Z}$.

Relativizando la definición de suma $[m, n] + [m', n'] = [m + n, m' + n']$ obtenemos que la suma de enteros es absoluta, e igualmente ocurre con el producto y la relación de orden.

La construcción de \mathbb{Q} a partir de \mathbb{Z} es formalmente idéntica a la construcción de \mathbb{Z} a partir de ω , por lo que concluimos igualmente que $\mathbb{Q}^M = \mathbb{Q}$ y que la suma, el producto y la relación de orden en \mathbb{Q} son absolutas para M . En particular conviene tener presente que todo modelo transitivo de ZF contiene a todos los números racionales.

Pasamos ya a considerar los números reales. Hay varias construcciones de \mathbb{R} , y sucede que a los efectos que nos ocupan no son equivalentes. La fórmula “ x es un número real” es absoluta si por “número real” entendemos una sección de Dedekind de \mathbb{Q} , pero no es absoluta si por “número real” entendemos una clase de sucesiones de Cauchy, en el sentido de Cantor. Adoptaremos, pues, la construcción de Dedekind.

Según esta construcción un número real se identifica con el conjunto de los números racionales menores que él. Concretamente, x es un número real si cumple:

- a) $x \subset \mathbb{Q} \wedge x \neq \emptyset \wedge x \neq \mathbb{Q}$,
 b) $\bigwedge r \in x \bigwedge s \in \mathbb{Q} (s < r \rightarrow s \in x)$,
 c) $\bigwedge r \in x \bigvee s \in x (r < s)$.

Es inmediato que estas propiedades quedan inalteradas al relativizar a M , luego

$$\bigwedge \bar{x} (\bar{x} \text{ es un número real}^M \leftrightarrow \bar{x} \text{ es un número real}).$$

Notemos que ahora la barra sobre x es imprescindible, pues si $x \in \mathbb{R}$, lo único que sabemos es que $x \subset \mathbb{Q} \subset M$, pero nada nos garantiza que $x \in M$. Hemos probado que “ser un número real” es absoluto, pero esto no significa que \mathbb{R} lo sea. Por el contrario, al relativizar

$$\bigwedge x (x \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \text{ es un número real}),$$

lo que obtenemos es

$$\bigwedge \bar{x} (\bar{x} \in \mathbb{R}^M \leftrightarrow \bar{x} \text{ es un número real}),$$

de donde, a lo sumo, obtenemos

$$\bigwedge x (x \in \mathbb{R}^M \leftrightarrow x \in M \wedge x \in \mathbb{R}),$$

es decir, $\mathbb{R}^M = \mathbb{R} \cap M$. En general no tiene por qué darse la igualdad $\mathbb{R} = \mathbb{R}^M$. Pensemos que si M es numerable entonces \mathbb{R}^M también lo es, luego no puede ser \mathbb{R} .

Ejercicio: Demostrar que $\mathbb{C}^M = \mathbb{C} \cap M$.

Ejercicio: Probar que si definimos los números reales en el sentido de Cantor y $x \in M$ es un número real ^{M} , entonces existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x = y \cap M$ (¡pero no necesariamente $x \in \mathbb{R}$!)

Capítulo II

El axioma de regularidad

En este capítulo demostraremos la independencia del axioma de regularidad, es decir, probaremos que no puede ser demostrado ni refutado a partir de los demás axiomas de ZFC (supuesto que éstos sean consistentes). Como ya hemos comentado anteriormente, la prueba de consistencia del axioma de regularidad puede considerarse un prototipo de los argumentos que emplearemos a lo largo de todo el libro. Por el contrario, la prueba de que la negación de este axioma también es consistente es atípica, pues es la única prueba que vamos a dar basada en un modelo no natural. Como contrapartida obtendremos la consistencia de la teoría de conjuntos con átomos, y en esta teoría obtendremos modelos donde no se cumple el axioma de elección.

2.1 La consistencia del axioma de regularidad

La consistencia del axioma de regularidad es una consecuencia inmediata de este teorema:

Teorema 2.1 [NBG–V = R] *La clase R de los conjuntos regulares es un modelo de ZFC.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que R es una clase transitiva, luego para comprobar que cumple los axiomas de ZFC podemos aplicar las equivalencias que obtuvimos al final de la sección 1.4. Nos basaremos en que R cumple $\mathcal{P}R = R$ (teorema [12.24]).

El axioma de extensionalidad se cumple en cualquier clase transitiva.

Para comprobar el axioma del par tomamos $x, y \in R$ y observamos que $\{x, y\} \in \mathcal{P}R = R$.

Para el axioma de la unión tomamos $x \in R$ y observamos que, por transitividad, $\bigcup_{u \in x} u \subset R$, luego $\bigcup_{u \in x} u \in \mathcal{P}R = R$.

Como $\emptyset \in R$, ciertamente R cumple el axioma del conjunto vacío.

Para el axioma del reemplazo tomamos una función $F : A \subset R \rightarrow R$ definida mediante una fórmula (aunque no vamos a necesitar este hecho) y un conjunto $a \in R$. Hemos de probar que $F[a] \in R$, pero es que $F[a] \in \mathcal{P}R = R$.

Como $\omega \in R$, tenemos el axioma de infinitud.

Para el axioma de partes tomamos $x \in R$ y hemos de probar que $\mathcal{P}x \cap R \in R$. Ahora bien, $\mathcal{P}x \cap R \in \mathcal{P}R = R$.

Para probar el axioma de elección basta ver que todo conjunto regular x tiene una función de elección $f \in R$. En efecto, sea f una función de elección sobre x , es decir, una función tal que $\bigwedge u \in x (u \neq \emptyset \rightarrow f(u) \in u)$. Podemos suponer que si $\emptyset \in x$ entonces $f(\emptyset) = \emptyset$.

Notemos que si $u \in x$, $f(u) \in u \in x \in R$, luego por transitividad $f(u) \in R$ (si $u = \emptyset$ tenemos $f(u) = \emptyset \in R$). Como ya hemos probado que R es un modelo de ZF^* , tenemos que es cerrado para pares ordenados, luego $(u, f(u)) \in R$. Esto significa que $f \subset R$, es decir, $f \in \mathcal{P}R = R$.

Finalmente, como $R \subset R$, concluimos que R cumple el axioma de regularidad. ■

El teorema 1.21 nos da ahora que si $NBG - V = R$ es consistente entonces ZFC es consistente, lo cual equivale a que si $ZFC - V = R$ es consistente entonces ZFC también lo es. Insistimos en que el argumento es constructivo: Supongamos que ZFC es contradictorio. Entonces podríamos probar $0 \neq 0$ a partir de sus axiomas, más concretamente, a partir de una colección finita Γ de axiomas de ZFC. Entonces el teorema 1.20 nos dice explícitamente cómo obtener de ella una demostración en NBG^* de que

$$R \models \Gamma \rightarrow (0 \neq 0)^R.$$

Ahora bien, $(0 \neq 0)^R$ equivale a $0 \neq 0$ y el teorema anterior afirma precisamente que en $NBG - V = R$ se prueba $R \models \Gamma$. Uniendo estos hechos tenemos una demostración explícita de $0 \neq 0$ en $NBG - V = R$.

En resumen, sabemos convertir una prueba de una contradicción en ZFC en la prueba de una contradicción en $NBG - V = R$. De hecho, el paso a NBG es sólo por comodidad en la exposición, pero podríamos haber trabajado exclusivamente en ZFC mostrando explícitamente cómo puede evitarse el uso de clases propias —es fácil hacerlo— y tendríamos igualmente un argumento constructivo de la equiconsistencia entre $ZFC - V = R$ y ZFC.

Otro punto de vista es el siguiente: que $V = R$ sea consistente con los demás axiomas de ZFC equivale a que a partir de estos axiomas no se pueda demostrar la existencia de conjuntos no regulares. Supongamos que no fuera así, es decir, que a partir de los axiomas de $ZFC - V = R$ se pudiera demostrar la existencia de un conjunto no regular. Entonces, como R cumple todos estos axiomas, el mismo argumento nos permitiría probar (en $NBG - V = R$) que $(\forall x x \text{ no regular})^R$, pero esto equivale a que R contiene un conjunto no regular, lo cual es una contradicción (en $NBG - V = R$).

Por último, un punto de vista informal sería el siguiente: si existiera un argumento que asegurara la existencia de conjuntos no regulares a partir de los axiomas de ZFC – $V = R$, un matemático que sólo “viera” los conjuntos de R podría aplicarlo a los conjuntos que él ve —puesto que cumplen los axiomas de ZFC – $V = R$ — para concluir que tiene que tener a la vista un conjunto no regular, cuando no es así. La conclusión sería que la teoría que nos permite hablar de “un matemático encerrado en R ”, esto es, NBG – $V = R$, sería contradictoria. En resumen: si suponer $V = R$ produce una contradicción, suponer “un matemático encerrado en R ” también da lugar a una contradicción, pero la diferencia es que para hablar de “un matemático encerrado en R ” no necesitamos suponer $V = R$, con lo que la contradicción permanece aunque quitemos este axioma.

Todas estas consideraciones se aplican igualmente a todas las pruebas de consistencia que veremos en adelante, así que no volveremos a insistir en ello. Basta tener claro que siempre que construimos un modelo de una teoría T tenemos un argumento explícito que nos garantiza que si los axiomas que hemos necesitado para construir el modelo son consistentes, entonces T es consistente.

2.2 La independencia del axioma de regularidad

Nos ocupamos ahora de probar que el axioma de regularidad tampoco puede ser demostrado a partir de los axiomas restantes de ZFC (siempre suponiendo que éstos sean consistentes). En primer lugar hemos de observar que no podemos seguir el camino “típico”, es decir, no podemos buscar un modelo transitivo M de ZFC – $V = R$ en el que falle el axioma de regularidad. Con más precisión, queremos demostrar que si ZFC – $V = R$ es consistente entonces también lo es ZFC – $V = R + V \neq R$. Para ello “deberíamos” construir en ZFC – $V = R$ un modelo M transitivo en el que $V \neq R$, pero tal modelo habría de cumplir $M \not\subseteq R$, luego si pudiéramos demostrar la existencia de M estaríamos demostrando que $V \neq R$, y acabamos de demostrar que esto no es posible.

El único problema en nuestras pretensiones es la exigencia de que el modelo sea transitivo. De hecho no podemos buscar un modelo natural porque todo modelo natural se puede colapsar hasta un modelo transitivo. En resumen, hemos de buscar un modelo en el que la relación de pertenencia no sea la natural. El teorema siguiente nos dice cómo hacerlo.

Teorema 2.2 [NBG] *Sea $F : V \rightarrow V$ biyectiva y $R = \{(x, y) \mid x \in F(y)\}$. Entonces $(V, R) \models \text{ZFC} - V = R$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que nada de lo que hemos visto para modelos transitivos nos ayuda ahora, de modo que hemos de calcular explícitamente las relativizaciones de los axiomas y demostrarlas. Convenimos en que las letras minúsculas representan conjuntos.

EXTENSIONALIDAD: $\bigwedge xy(\bigwedge u(u R x \leftrightarrow u R y) \rightarrow x = y)$.

En efecto, la hipótesis es $\bigwedge u(u \in F(x) \leftrightarrow u \in F(y))$, lo cual implica claramente $F(x) = F(y)$, luego $x = y$.

PAR: $\bigwedge xy \bigvee z \bigwedge u(u R z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$.

Basta tomar $z = F^{-1}(\{x, y\})$.

UNIÓN: $\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u R y \leftrightarrow \bigvee v(u R v \wedge v R x))$.

Basta tomar $y = F^{-1}\left(\bigcup_{v \in F(x)} F(v)\right)$.

VACÍO: $\bigvee x \bigwedge y \neg x R y$.

Basta tomar $x = F^{-1}(\emptyset)$.

REEMPLAZO: Fijada una fórmula $\phi(x, y)$ quizá con otros parámetros, hemos de probar

$$\begin{aligned} & \bigwedge x_1 \cdots x_n (\bigwedge xyz (\phi^{VR}(x, y) \wedge \phi^{VR}(x, z) \rightarrow y = z) \\ & \rightarrow \bigwedge a \bigvee b \bigwedge y (y R b \leftrightarrow \bigvee x (x R a \wedge \phi^{VR}(x, y))). \end{aligned}$$

Fijados $x_1, \dots, x_n \in V$, definimos la función $G : A \subset V \rightarrow V$ mediante $G(x) = y \leftrightarrow \phi^{VR}(x, y)$. Hemos de probar que

$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge y (y \in F(b) \leftrightarrow \bigvee x \in F(a) y = G(x)).$$

Basta tomar $b = F^{-1}(G[F(a)])$.

PARTES: $\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u R y \leftrightarrow \bigwedge v(v R u \rightarrow v R x))$.

Basta tomar $y = F^{-1}(F^{-1}[\mathcal{P}F(x)])$.

INFINITUD: Los axiomas de infinitud y elección son los más difíciles de comprobar porque involucran conceptos menos elementales. Por eso hemos de buscar las equivalencias formalmente más simples. Con los axiomas ya probados el axioma de infinitud equivale a

$$\bigvee x (\emptyset \in x \wedge \bigwedge y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

o, más elementalmente aún,

$$\begin{aligned} & \bigvee x (\bigvee y (y \in x \wedge \bigwedge z z \notin y) \wedge \bigwedge y (y \in x \rightarrow \\ & \bigvee z (z \in x \wedge \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in y \vee u = y))). \end{aligned}$$

La relativización es

$$\begin{aligned} & \bigvee x (\bigvee y (y \in F(x) \wedge \bigwedge z z \notin F(y)) \wedge \bigwedge y (y \in F(x) \rightarrow \\ & \bigvee z (z \in F(x) \wedge \bigwedge u (u \in F(z) \leftrightarrow u \in F(y) \vee u = y))). \end{aligned}$$

A su vez esto equivale a

$$\bigvee x (F^{-1}(\emptyset) \in F(x) \wedge \bigwedge y (y \in F(x) \rightarrow F^{-1}(F(y) \cup \{y\}) \in F(x))).$$

Como F es biyectiva, esto equivale a

$$\forall x (F^{-1}(\emptyset) \in x \wedge \bigwedge y (y \in x \rightarrow F^{-1}(F(y) \cup \{y\}) \in x)).$$

Definimos $y_0 = F^{-1}(\emptyset)$ y $\bigwedge n \in \omega y_{n+1} = F^{-1}(F(y_n) \cup \{y_n\})$. Es claro que $x = \{y_n \mid n \in \omega\}$ cumple lo pedido.

ELECCIÓN: Con los axiomas ya probados el axioma de elección equivale a que para toda familia formada por conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos existe un conjunto que contiene exactamente un elemento en común con cada elemento de la familia. Explícitamente:

$$\begin{aligned} & \bigwedge x (\bigwedge u (u \in x \rightarrow \bigvee v (v \in u) \wedge \bigwedge uv (u \in x \wedge v \in x \wedge u \neq v \rightarrow \\ & \neg \bigvee z (z \in u \wedge z \in v))) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u (u \in x \rightarrow \bigvee^1 v (v \in y \wedge v \in u))). \end{aligned}$$

La relativización es

$$\begin{aligned} & \bigwedge x (\bigwedge u (u \in F(x) \rightarrow \bigvee v (v \in F(u)) \wedge \bigwedge uv (u \in F(x) \wedge v \in F(x) \wedge u \neq v \rightarrow \\ & \neg \bigvee z (z \in F(u) \wedge z \in F(v))) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u (u \in F(x) \rightarrow \bigvee^1 v (v \in F(y) \wedge v \in F(u))). \end{aligned}$$

Esto equivale a

$$\begin{aligned} & \bigwedge x (\bigwedge u (u \in F(x) \rightarrow F(u) \neq \emptyset) \wedge \bigwedge uv \in F(x) (u \neq v \rightarrow F(u) \cap F(v) = \emptyset) \\ & \rightarrow \bigvee y \bigwedge u \in F(x) \bigvee^1 v \in F(y) \cap F(u)). \end{aligned}$$

Usando que F es biyectiva esto equivale a

$$\begin{aligned} & \bigwedge x (\bigwedge u (u \in x \rightarrow F(u) \neq \emptyset) \wedge \bigwedge uv \in x (u \neq v \rightarrow F(u) \cap F(v) = \emptyset) \\ & \rightarrow \bigvee y \bigwedge u \in x \bigvee^1 v \in y \cap F(u)), \end{aligned}$$

lo cual se obtiene aplicando el axioma de elección (en la forma que estamos considerando) al conjunto $F[x]$. ■

Considerando biyecciones adecuadas F podemos violar de mil maneras el axioma de regularidad. El ejemplo más simple es el siguiente:

Teorema 2.3 Si ZFC es consistente también lo es ZFC menos el axioma de regularidad y más el axioma $\forall a a = \{a\}$.

DEMOSTRACIÓN: Basta tomar la biyección $F : V \rightarrow V$ definida mediante $F(0) = \{0\}$, $F(\{0\}) = 0$ y $F(x) = x$ en otro caso. Así, tomando $a = 0$, el modelo construido en el teorema anterior cumple

$$\bigwedge x (x R a \leftrightarrow x = a),$$

es decir, $(a = \{a\})^{VR}$. ■

Ejercicio: Demostrar la consistencia de que existan dos conjuntos x, y tales que $x = \{y\} \wedge y = \{x\}$.

Los conjuntos de la forma $a = \{a\}$ se llaman átomos. Vamos a probar que, de hecho, es consistente la existencia de cualquier cantidad de átomos.

Teorema 2.4 *Si ZCF es consistente, también lo es ZFC sin el axioma de regularidad y más el axioma que afirma la existencia de un conjunto de \aleph_3 átomos.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente, podemos cambiar \aleph_3 por cualquier otro cardinal. De hecho vamos a convertir a V en un modelo con una clase propia de átomos. Sea A la clase de todos los ordinales distintos de 0 y 1 y sea $A_1 = \{\{\alpha\} \mid \alpha \in A\}$. De este modo $A \cap A_1 = \emptyset$. Sea $A_2 = A \cup A_1$.

Definimos $F_0 : A \rightarrow A_1$ mediante $F_0(\alpha) = \{\alpha\}$ y $F_1 : A_1 \rightarrow A$ mediante $F_1 = F_0^{-1}$. Así $F_2 = F_0 \cup F_1 : A_2 \rightarrow A_2$ biyectiva. Definimos $F : V \rightarrow V$ como la extensión de F_2 que es la identidad fuera de A_2 . Ciertamente es biyectiva, luego podemos considerar a V como modelo con la relación R inducida por F .

Sea κ un cardinal^{VR}. Como A es una clase propia, existe una aplicación $f : F(\kappa) \rightarrow A$ inyectiva. Sea $b = f[\kappa] \subset A$ y $c = F^{-1}(b)$.

Observemos que si $a R c$ entonces $a \in F(c) = b \subset A$, luego $F(a) = \{a\}$, luego

$$\bigwedge x (x R a \leftrightarrow x = a).$$

Con esto hemos probado que

$$(\bigwedge a \in c \ a = \{a\})^{\text{VR}}.$$

Ahora hemos de probar que $(|c| = \kappa)^{\text{VR}}$. Llamemos $[u, v] \equiv (u, v)^{\text{VR}}$, es decir, $[u, v]$ es lo que confundirá con el par ordenado (u, v) alguien que “viva” en el modelo que estamos considerando. Definimos

$$g = \{[u, f(u)] \mid u \in F(\kappa)\},$$

sea $h = F^{-1}(g)$. Así, un conjunto x cumple $x R h$ si y sólo si $x \in F(h) = g$, si y sólo si existe un $u \in F(\kappa)$ tal que $x = [u, f(u)]$. Por lo tanto:

$$\bigwedge x (x R h \leftrightarrow \bigvee u (u R \kappa \wedge x = [u, f(u)]))$$

Tenemos que $f(u) \in F(c)$, luego $f(u) R c$. Es claro entonces que

$$\bigwedge x (x R h \rightarrow \bigvee uv (u R \kappa \wedge v R c \wedge x = (u, v)^{\text{VR}})).$$

Esto significa que $(h \subset \kappa \times c)^{\text{VR}}$, pero también tenemos que

$$\bigwedge u (u R \kappa \rightarrow \bigvee^1 v (v R c \wedge [u, v] R h)).$$

En efecto, la hipótesis es $u \in F(\kappa)$ y entonces $v = f(u)$ cumple lo pedido. Esto significa que $(h : \kappa \rightarrow c)^{\text{VR}}$. Similarmente se prueba que h es biyectiva, luego $(|c| = \kappa)^{\text{VR}}$.

Si tomamos $\kappa = \aleph_3^{\text{VR}}$, hemos probado que

$$(\bigvee c (|c| = \aleph_3 \wedge \bigwedge a \in c (a = \{a\})))^{\text{VR}},$$

tal y como pide el enunciado, pero en realidad hemos probado que para todo cardinal κ existe un conjunto de átomos de cardinal κ , lo que implica que en este modelo la clase de todos los átomos no es un conjunto. ■

Ejercicio: Demostrar la consistencia de que exista una sucesión de conjuntos $\{x_n\}_{n \in \omega}$ tales que $\bigwedge n \in \omega x_n = \{x_{n+1}\}$.

Ahora demostraremos la consistencia de NBGA, es decir, la teoría determinada por los axiomas de NBG menos el axioma de regularidad más el axioma que afirma que la clase

$$A = \{a \mid a = \{a\}\}$$

es un conjunto y $V = R(A)$. (Ver [12.32]). De hecho veremos que es consistente exigir además que A tenga cualquier cardinal prefijado. Recordemos que

$$R_0(A) = A \wedge \bigwedge \alpha R_{\alpha+1}(A) = \mathcal{P}R_\alpha(A) \wedge \bigwedge \lambda R_\lambda(A) = \bigcup_{\delta < \lambda} R_\delta(A),$$

de modo que $R(A) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} R_\alpha(A)$.

(Notemos que en principio deberíamos poner $R_0(A) = \text{ct } A$, pero es que A es un conjunto transitivo.)

La consistencia de NBGA equivale a la de ZFCA, donde $V = R(A)$ ha de entenderse como la sentencia $\bigwedge x \bigvee \alpha x \in R_\alpha(A)$.

Teorema 2.5 *Si ZFC es consistente también lo es ZFCA+ $|A| = \aleph_3$.*

DEMOSTRACIÓN: Según hemos demostrado, la consistencia de ZFC (o la de NBG) implica la consistencia de NBG sin el axioma de regularidad y más el axioma que afirma la existencia de un conjunto con \aleph_3 átomos (sin excluir que haya más átomos). Trabajamos en esta teoría y en ella construiremos un modelo de la teoría del enunciado. Sea, pues X un conjunto con \aleph_3 átomos (todo el argumento vale igual si cambiamos \aleph_3 por cualquier otro cardinal finito o infinito). Vamos a probar que $M = R(X)$ es el modelo buscado.

M es una clase transitiva que cumple $\mathcal{P}M = M$, por lo que los argumentos del teorema 2.1 se aplican literalmente para concluir que M es un modelo de ZFC menos el axioma de regularidad (pues ahora no se cumple $M \subset R$).

Es inmediato comprobar que “ x es un átomo” es absoluto para modelos transitivos de ZF^* . Vamos a probar que los únicos átomos en M son los de X , con lo que concluiremos que $A^M = X$.

En efecto, sea $a \in M = R(X)$ un átomo. Sea α el mínimo ordinal tal que $a \in R_\alpha(X)$. Es claro que α no puede ser un ordinal límite, y si fuera $\alpha = \beta + 1$ entonces $a \in \mathcal{P}R_\beta$, luego $a \in a \subset R_\beta$ y llegaríamos a que $a \in R_\beta$, en contradicción con la elección de α . Así pues, $\alpha = 0$ y $a \in R_0(X) = X$.

Ahora hemos de probar que M cumple $V = R(A)$. En la definición de $R(A)$ aparecen ordinales, luego primero necesitamos comprobar que “ x es un ordinal” es absoluto para M . En realidad lo que sucede es que para un modelo que cumple $\mathcal{P}M = M$ prácticamente todo es absoluto. En efecto, ser un ordinal es ser transitivo, conexo y bien fundado. Las dos primeras propiedades son Δ_0 , luego absolutas. Respecto a la última,

$$\bigwedge x (x \text{ está bien fundado} \leftrightarrow \bigwedge y (y \subset x \wedge y \neq \emptyset \rightarrow \bigvee u \in y (u \cap y = \emptyset))).$$

Al relativizar a M queda

$$\bigwedge \bar{x} (\bar{x} \text{ está bien fundado}^M \leftrightarrow \bigwedge y (y \subset \bar{x} \wedge y \neq \emptyset \rightarrow \bigvee u \in y (u \cap y = \emptyset))).$$

Notemos que no hace falta poner \bar{y} porque si $y \subset \bar{x}$, entonces $y \in \mathcal{P}M = M$. En definitiva tenemos que

$$\bigwedge \bar{x} (\bar{x} \text{ está bien fundado}^M \leftrightarrow \bar{x} \text{ está bien fundado}).$$

Así pues, ser un ordinal es absoluto para M , y claramente entonces también es absoluto ser un ordinal sucesor o un ordinal límite. Por otra parte, si $x \in M$, entonces $\mathcal{P}x \subset \mathcal{P}M = M$, luego $(\mathcal{P}x)^M = \mathcal{P}x \cap M = \mathcal{P}x$, es decir, $\mathcal{P}x$ también es absoluto para M . Ahora demostramos que

$$\bigwedge \alpha \in \Omega R_\alpha(A)^M = R_\alpha(X).$$

En efecto, para $\alpha = 0$, relativizando $R_0(A) = A$ tenemos que $R_0(A)^M = A^M = X$. Si se cumple para α , relativizando $\bigwedge \alpha R_{\alpha+1}(A) = \mathcal{P}R_\alpha(A)$ concluimos que

$$R_{\alpha+1}(A)^M = \mathcal{P}R_\alpha(A)^M = \mathcal{P}R_\alpha(X) = R_{\alpha+1}(X).$$

Finalmente, si se cumple para todo $\delta < \lambda$, relativizando que

$$\bigwedge \lambda \bigwedge x (x \in R_\lambda(A) \leftrightarrow \bigvee \delta < \lambda x \in R_\delta(A))$$

concluimos que

$$\bigwedge x (x \in R_\lambda(A)^M \leftrightarrow \bigvee \delta < \lambda x \in R_\delta(A)^M).$$

Aplicando la hipótesis de inducción llegamos a que

$$R_\lambda(A)^M = \bigcup_{\delta < \lambda} R_\delta(X) = R_\lambda(X).$$

De este modo, como trivialmente $\bigwedge x \in M \bigvee \alpha x \in R_\alpha(X)$, concluimos que $(\bigwedge x \bigvee \alpha x \in R_\alpha(A))^M$, pero esto es $(V = R(A))^M$. Así pues, M es un modelo de ZFCA.

Todavía nos falta demostrar que $(|A| = \aleph_3)^M$. En primer lugar hemos de probar que $\aleph_3^M = \aleph_3$. La definición de \aleph_3 involucra cardinales y la operación α^+ , luego hemos de probar que ambos conceptos son absolutos para M . Tenemos que

$$\bigwedge x (x \text{ es un cardinal} \leftrightarrow x \text{ es un ordinal} \wedge \bigwedge y \in x \neg \bigvee f (f : y \rightarrow x \text{ biyectiva})).$$

Observamos que si $x \in M$ e $y \in x$ (con lo que también $y \in M$) y $f : y \rightarrow x$, entonces $f \subset y \times x \subset M$, luego $f \in \mathcal{P}M = M$. Esto hace que al relativizar la sentencia anterior no tengamos que poner \bar{f} y quede simplemente

$$\bigwedge x (x \text{ es un cardinal}^M \leftrightarrow x \text{ es un cardinal}).$$

Como los cardinales ^{M} son los cardinales, es claro que el menor cardinal ^{M} mayor que un ordinal α es el menor cardinal mayor que α , es decir, $(\alpha^+)^M = \alpha^+$. Ahora, una simple inducción sobre α prueba que $\bigwedge \alpha \aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha$. En particular $\aleph_3^M = \aleph_3$.

Finalmente, si $f : \aleph_3 \rightarrow X$ es biyectiva, según hemos comentado ya, puesto que $\aleph_3, X \in M$, se cumple también que $f \in M$, luego

$$\bigvee f \in M(f : \aleph_3^M \rightarrow A^M \text{ biyectiva}),$$

que es lo mismo que

$$(\bigvee f : \aleph_3 \rightarrow A \text{ biyectiva})^M,$$

es decir, $(|A| = \aleph_3)^M$. En definitiva, M es un modelo de ZFCA+ $|A| = \aleph_3$. ■

2.3 Modelos simétricos

En esta sección construiremos modelos transitivos de ZFA en los que no se cumple el axioma de elección. La existencia de átomos será esencial, ya que va ser siempre el conjunto de átomos el que nos proporcionará los contraejemplos. Puede pensarse que esto es “hacer trampa”, pero lo cierto es que en el capítulo VI veremos cómo transformar los argumentos que daremos aquí en argumentos más sofisticados que proporcionan modelos de ZF (sin átomos). Las pruebas con átomos son más claras y menos técnicas que las que veremos allí, por lo que constituyen una buena aproximación al problema de violar el axioma de elección.

La idea fundamental consiste en probar que el axioma de elección introduce conjuntos “asimétricos” en un cierto sentido, de modo que si definimos esta noción de “simetría” y nos quedamos con los conjuntos “suficientemente simétricos”, tendremos un modelo de ZFA en el que no cabrán ciertas funciones de elección, ni ciertos buenos órdenes, etc.

Una forma de medir la simetría de una figura geométrica es determinar los movimientos que la dejan invariante. Por ejemplo, un cuadrado es más simétrico que un rectángulo, pues hay cuatro giros que dejan invariante a un cuadrado y sólo dos que dejan invariante a un rectángulo. Un círculo, en cambio, es mucho más simétrico, pues todos los giros lo dejan invariante. Vamos a aplicar estas ideas a nuestro contexto. Trabajaremos en NBGA (con el axioma de elección). Ya sabemos que esta teoría es consistente si lo es ZFC.

Llamaremos Σ_A al grupo de las permutaciones del conjunto de átomos A , es decir, el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas $f : A \rightarrow A$, que tiene estructura de grupo con la composición de aplicaciones.

Por otra parte, si M es una clase transitiva, un *automorfismo* de M es una biyección $F : M \rightarrow M$ tal que $\bigwedge uv \in M(u \in v \leftrightarrow F(u) \in F(v))$.

Es claro que si $x \in M$ entonces $F(x) = F[x] = \{F(y) \mid y \in x\}$. Así mismo es obvio que la identidad en M es un automorfismo de M , que la composición

de automorfismos de M es un automorfismo de M y que el inverso de un automorfismo de M es un automorfismo de M . Estas propiedades nos permitirían concluir que la clase de todos los automorfismos de M es un grupo con la composición de aplicaciones si no fuera porque la clase de los automorfismos de M no existe. En efecto, si M es una clase propia cada automorfismo de M es también una clase propia, luego los automorfismos de M no pertenecen a ninguna clase.

Sin embargo, vamos a ver que podemos representar este inexistente grupo de todos los automorfismos de una clase M a través del grupo Σ_A .

Teorema 2.6 *Para toda permutación de los átomos $f \in \Sigma_A$, existe un único automorfismo $\bar{f} : V \rightarrow V$ tal que $\bar{f}|_A = f$. Recíprocamente, si $F : V \rightarrow V$ es un automorfismo de V , entonces $f = F|_A \in \Sigma_A$ y $F = \bar{f}$.*

DEMOSTRACIÓN: Dada $f \in \Sigma_A$, sea $f_0 = f$, supuesto definida una aplicación $f_\alpha : R_\alpha(A) \rightarrow R_\alpha(A)$, definimos $f_{\alpha+1} : R_{\alpha+1}(A) \rightarrow R_{\alpha+1}(A)$ mediante $f_{\alpha+1}(x) = f_\alpha[x]$ y supuestos definidos $\{f_\delta\}_{\delta < \lambda}$, definimos $f_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} f_\delta$.

Una simple inducción demuestra que $f_\alpha : R_\alpha(A) \rightarrow R_\alpha(A)$ es un automorfismo y que cada f_α extiende a los automorfismos anteriores. Definimos entonces $\bar{f} = \bigcup_{\alpha \in \Omega} f_\alpha$ y claramente cumple lo pedido.

Respecto a la unicidad, si $F : V \rightarrow V$ es otro automorfismo tal que $F|_A = f$, entonces F y \bar{f} coinciden en $R_0(A)$. Si coinciden en $R_\alpha(A)$ y $x \in R_{\alpha+1}(A)$ entonces $x \subset R_\alpha(A)$, luego $F(x) = F[x] = \bar{f}[x] = \bar{f}(x)$, es decir, F y \bar{f} coinciden también en $R_{\alpha+1}(A)$. Obviamente si coinciden en $R_\delta(A)$ para todo $\delta < \lambda$ también coinciden en $R_\lambda(A)$. La conclusión es que coinciden en todo $R_\alpha(A)$ y, por consiguiente, $F = \bar{f}$.

Recíprocamente, si $F : V \rightarrow V$ es cualquier automorfismo y $a \in A$, entonces $F(a) = F[a] = F[\{a\}] = \{F(a)\}$, luego $F(a) \in A$, es decir, $F|_A : A \rightarrow A$ inyectiva. Similarmente se prueba que $f = F|_A$ es biyectiva, luego F y \bar{f} son dos automorfismos de V que coinciden en A . Por la unicidad que hemos probado $\bar{f} = F$. ■

Observemos que si I es la identidad en A entonces \bar{I} es la identidad en V , que si $f, g \in \Sigma_A$ entonces $\overline{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g}$ y que $\overline{f^{-1}} = \bar{f}^{-1}$. Todas estas igualdades se prueban restringiéndolas a A . Por ejemplo,

$$\overline{f \circ g}|_A = f \circ g = \bar{f}|_A \circ \bar{g}|_A = (\bar{f} \circ \bar{g})|_A,$$

y por la unicidad de la extensión ha de ser $\overline{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g}$.

Esto significa que $f \mapsto \bar{f}$ sería un isomorfismo entre Σ_A y el grupo de los automorfismos de V si existiera éste último. En la práctica podemos trabajar con el grupo de permutaciones Σ_A y pensar que estamos trabajando con el grupo de los automorfismos de V .

Ejemplo Un conjunto “típico” de NBGA es

$$x = \{\{a, \{b, c\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a, \emptyset\}\}\},$$

donde a, b y c son átomos, es decir, los conjuntos de NBGA están contruidos a partir de \emptyset y de los átomos. Si $f \in \Sigma_A$, entonces

$$\bar{f}(x) = \{\{f(a), \{f(b), f(c)\}\}, \{\{\emptyset\}, \{f(a), \emptyset\}\}\}.$$

Podemos decir que $f(x)$ es un conjunto construido con los mismos “planos” que x pero con diferentes “ladrillos”. ■

Una observación técnica es que el término \bar{f} es normal, es decir, que puede usarse en NBG para definir clases. Concretamente, que \bar{f} sea normal significa que puede definirse sin cuantificar sobre clases propias, y así es, pues

$$\bar{f}(x) = y \leftrightarrow \forall \alpha g(x \in R_\alpha(A) \wedge g : R_\alpha(A) \longrightarrow R_\alpha(A) \text{ automorfismo}$$

$$\wedge g|_A = f \wedge g(x) = y).$$

En lo sucesivo no distinguiremos entre $f \in \Sigma_A$ y \bar{f} . En la práctica tenemos que tiene sentido hacer actuar un $f \in \Sigma_A$ sobre cualquier conjunto, aunque no sea un átomo.

Definición 2.7 Si G es un subgrupo de Σ_A y x es un conjunto, definimos el grupo de simetrías de x en G como

$$\text{Sim}_G(x) = \{f \in \Sigma_A \mid f(x) = x\}.$$

Es claro que $\text{Sim}_G(x)$ es un subgrupo de G . La idea es que un conjunto es más simétrico cuanto mayor es su grupo de simetrías. Por ejemplo, dados dos átomos a y b , el par desordenado $\{a, b\}$ es más simétrico que el par ordenado (a, b) , pues $\text{Sim}_G(\{a, b\})$ está formado por todas las permutaciones de G que fijan o intercambian a y b , mientras que $\text{Sim}_G((a, b))$ está formado únicamente por las permutaciones de G que fijan a a y a b .

Es evidente que $\text{Sim}_G(A) = G$, por lo que A es totalmente simétrico. Lo mismo les sucede a todos los conjuntos regulares:

Teorema 2.8 Si G es un subgrupo de Σ_A y $x \in R$, entonces $\text{Sim}_G(x) = G$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $g \in G$. Hemos de probar que $g(x) = x$ para todo $x \in R$. Como la relación de pertenencia está bien fundada en R podemos probarlo por ϵ -inducción. Suponemos que $g(u) = u$ para todo $u \in x$ y vemos entonces que

$$g(x) = \{g(u) \mid u \in x\} = \{u \mid u \in x\} = x.$$

■

Ahora necesitamos resolver el problema siguiente: dado $f \in \Sigma_A$ y un conjunto x , el conjunto $f(x)$ tiene la misma estructura que x , luego es de esperar

que x y $f(x)$ tengan grupos de simetrías similares. Concretamente, ¿cuál es la relación entre $\text{Sim}_G(x)$ y $\text{Sim}_G(f(x))$?

Para responder a esta pregunta necesitamos recordar un concepto de la teoría de grupos: si H es un grupo y $g, h \in H$, entonces se define el *conjugado* de g por h como $g^h = h^{-1}gh$. Es inmediato comprobar que la conjugación $H \rightarrow H$ dada por $g \mapsto g^h$ es un isomorfismo de grupos. Si G es un subgrupo de H , la imagen de G por este isomorfismo se representa por

$$G^h = \{g^h \mid g \in G\},$$

y claramente es un subgrupo de H isomorfo a G .

Teorema 2.9 *Si G es un subgrupo de Σ_A , $f \in \Sigma_A$ y $x \in V$, entonces*

$$\text{Sim}_G(f(x)) = \text{Sim}_G(x)^f.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $g \in \text{Sim}_G(x)^f$. Entonces existe un $u \in \text{Sim}_G(x)$ tal que $g = u^f$. Así pues, $g(f(x)) = f(u(f^{-1}(f(x)))) = f(u(x)) = f(x)$. Esto prueba que $g \in \text{Sim}_G(f(x))$.

Recíprocamente, si $g \in \text{Sim}_G(f(x))$ tenemos que $g(f(x)) = f(x)$, de donde se sigue que $f^{-1}(g(f(x))) = x$, lo cual quiere decir que $u = fgf^{-1} \in \text{Sim}_G(x)$ y, por consiguiente $g = f^{-1}uf = u^f \in \text{Sim}_G(x)^f$. ■

Ahora marcamos la frontera entre los conjuntos “suficientemente simétricos” y los que no lo son. Para ello introducimos el concepto siguiente:

Definición 2.10 Sea G un subgrupo de Σ_A . Un *filtro de subgrupos* de G es una familia \mathcal{F} de subgrupos de G tal que

- a) $G \in \mathcal{F}$,
- b) Si $H \in \mathcal{F}$ y K es un subgrupo de G tal que $H \subset K \subset G$, entonces $K \in \mathcal{F}$,
- c) Si $H, K \in \mathcal{F}$, entonces $H \cap K \in \mathcal{F}$.

Diremos que \mathcal{F} es un *filtro normal* si además verifica que si $H \in \mathcal{F}$ y $g \in G$, entonces $H^g \in \mathcal{F}$.

La idea es que \mathcal{F} determina una familia de subgrupos de G a los que podemos llamar “grandes” (G es grande, todo subgrupo que contenga un subgrupo grande es grande, etc.) Ahora definimos los conjuntos simétricos como los que tienen un grupo de simetrías grande:

Definición 2.11 Si G es un subgrupo de Σ_A y \mathcal{F} es un filtro normal de subgrupos de G , definimos la clase de los conjuntos *simétricos* (respecto de G y \mathcal{F}) como

$$S = \{x \mid \text{Sim}_G(x) \in \mathcal{F}\}.$$

Ejemplo Supongamos que $A = \{a, b, c\}$, que $G = \Sigma_A$ y que $\mathcal{F} = \{G\}$. Entonces

$$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} \in S,$$

pero $\{a, b\} \notin S$. Esto muestra que la clase S no tiene por qué ser transitiva. ■

En vista de este ejemplo, definimos los conjuntos hereditariamente simétricos:

Definición 2.12 Sea G un subgrupo de Σ_A y \mathcal{F} un filtro normal de subgrupos de G . Definimos la clase de los conjuntos *hereditariamente simétricos* (respecto de G y \mathcal{F}) como

$$HS = \{x \in S \mid \text{ct } x \subset S\}.$$

Recordemos que la clausura transitiva de un conjunto x está formada por sus elementos, y los elementos de sus elementos, etc. Así, los conjuntos hereditariamente simétricos son los conjuntos simétricos tales que sus elementos son simétricos y los elementos de sus elementos son simétricos, etc. El teorema siguiente contiene las propiedades básicas de los conjuntos hereditariamente simétricos:

Teorema 2.13 *Sea G un subgrupo de Σ_A y \mathcal{F} un filtro normal de subgrupos de G . Entonces*

- a) *La clase HS es transitiva.*
- b) $\bigwedge x(x \in HS \leftrightarrow x \in S \wedge x \subset HS)$,
- c) $R \subset HS$,
- d) *Si $g \in G$, entonces $g|_{HS} : HS \rightarrow HS$ es un automorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: a) Si $u \in x \in HS$, entonces $\text{ct } u \subset \text{ct } x \subset S$ y $u \in \text{ct } x \subset S$, luego $u \in HS$.

b) Si $x \in S \wedge x \subset HS$, como HS es una clase transitiva, $\text{ct } x \subset HS \subset S$, luego $x \in HS$. El recíproco es obvio.

c) Para probar que $R \subset HS$ razonamos por \in -inducción, suponemos que $x \in R$ cumple $x \subset HS$ y hemos de probar que $x \in HS$. Por el apartado anterior basta ver que $x \in S$, pero sabemos que $\text{Sim}_G(x) = G \in \mathcal{F}$.

d) En primer lugar observamos que si $x \in S$ entonces $g(x) \in S$, pues si $x \in S$ entonces $\text{Sim}_G(x) \in \mathcal{F}$, luego $\text{Sim}_G(g(x)) = \text{Sim}_G(x)^g \in \mathcal{F}$ por la condición de normalidad.

Supongamos ahora que existe un conjunto $x \in HS$ tal que $g(x) \notin HS$. Podemos tomar el mínimo ordinal α tal que existe un conjunto $x \in R_\alpha(A)$ en estas condiciones. Obviamente α no puede ser un límite. Si $\alpha = 0$ entonces x es un átomo, luego $g(x)$ también lo es. Hemos visto que $g(x) \in S$, y al ser un átomo $\text{ct } g(x) = g(x) \subset S$, luego $g(x) \in HS$, contradicción.

Si $\alpha = \beta + 1$ entonces $x \subset R_\beta(A)$ y por la minimalidad de α ha de ser $g(x) = g[x] \subset HS$. Como $g(x) \in S$, de hecho $g(x) \in HS$, contradicción.

Con esto hemos probado que $g|_{HS} : HS \rightarrow HS$. Lo mismo vale para g^{-1} , y $(g^{-1})|_{HS}$ resulta ser la inversa de $g|_{HS}$. Así pues, $g|_{HS} : HS \rightarrow HS$ biyectiva. Evidentemente es un automorfismo. ■

Es evidente que los automorfismos de una clase transitiva conservan las fórmulas. Concretamente:

Teorema 2.14 *Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula de \mathcal{L}_m . Entonces en NBGA se demuestra que si G es un subgrupo de Σ_A , \mathcal{F} es un filtro normal de subgrupos de G y $g \in G$, entonces*

$$\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\phi^{HS}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leftrightarrow \phi^{HS}(g(\bar{x}_1), \dots, g(\bar{x}_n))).$$

Esto se prueba por inducción sobre la longitud de ϕ probando simultáneamente la versión correspondiente para términos, es decir,

$$\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (t^{HS}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = t^{HS}(g(\bar{x}_1), \dots, g(\bar{x}_n))).$$

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado básico:

Teorema 2.15 *Si G es un subgrupo de Σ_A y \mathcal{F} es un filtro normal de subgrupos de G entonces HS es un modelo transitivo de ZFA.*

DEMOSTRACIÓN: Como HS es transitivo, cumple el axioma de extensionalidad.

Para comprobar el axioma del par tomamos $x, y \in HS$. Consideremos una permutación $g \in \text{Sim}_G(x) \cap \text{Sim}_G(y)$. Claramente

$$g(\{x, y\}) = \{g(x), g(y)\} = \{x, y\}.$$

Con esto hemos probado que $\text{Sim}_G(x) \cap \text{Sim}_G(y) \subset \text{Sim}_G(\{x, y\})$, luego $\text{Sim}_G(\{x, y\}) \in \mathcal{F}$ y $\{x, y\} \in S$. Puesto que obviamente $\{x, y\} \subset HS$, tenemos, de hecho, que $\{x, y\} \in HS$.

Para el axioma de la unión tomamos $x \in HS$ y vamos a probar que

$$\text{Sim}_G(x) \subset \text{Sim}_G\left(\bigcup_{u \in x} u\right).$$

En efecto, si $g \in \text{Sim}_G(x)$, entonces

$$g\left(\bigcup_{u \in x} u\right) = g\left[\bigcup_{u \in x} u\right] = \bigcup_{u \in x} g[u] = \bigcup_{u \in x} g(u) = \bigcup_{u \in x} u$$

porque, como $g[x] = x$, resulta que g permuta los conjuntos $u \in x$. Esto prueba que la unión es simétrica, pero por transitividad $\bigcup_{u \in x} u \subset HS$, luego la unión es hereditariamente simétrica.

Para el axioma del reemplazo tomamos una función $F : B \subset HS \rightarrow HS$ definida por una fórmula, es decir, $F(x) = y \leftrightarrow \phi^{HS}(x, y, x_1, \dots, x_n)$, donde $x_1, \dots, x_n \in HS$. Tomamos $a \in HS$ y hemos de probar que $F[a] \in HS$. Ciertamente $F[a] \subset HS$, luego sólo hay que probar que $F[a] \in S$. Para ello probaremos que

$$\text{Sim}_G(a) \cap \text{Sim}_G(x_1) \cap \dots \cap \text{Sim}_G(x_n) \subset \text{Sim}_G(F[a]).$$

Tomamos una permutación g en la intersección de los grupos de simetrías. Si $y \in F[a]$ entonces existe $x \in a$ tal que $y = F(x)$, es decir, $\phi^{HS}(x, y, x_1, \dots, x_n)$. Por el teorema anterior $\phi^{HS}(g(x), g(y), x_1, \dots, x_n)$ y $g(x) \in g(a) = a$, luego $g(y) = F(g(x)) \in F[a]$. Esto prueba que $g(F[a]) \subset F[a]$ y razonando con g^{-1} obtenemos la otra inclusión. Así pues, $g(F[a]) = F[a]$ y por consiguiente $g \in \text{Sim}_G(F[a])$.

Como $\Omega \subset R \subset HS$ tenemos que HS cumple los axiomas del conjunto vacío e infinitud.

Para probar el axioma de partes tomamos $x \in HS$ y hemos de ver que $\mathcal{P}x \cap HS \in HS$. Como $\mathcal{P}x \cap HS \subset HS$, sólo hay que probar que $\mathcal{P}x \cap HS \in S$. Para ello basta ver que $\text{Sim}_G(x) \leq \text{Sim}_G(\mathcal{P}x \cap HS)$.

Si $g \in \text{Sim}_G(x)$ y $u \in \mathcal{P}x \cap HS$, entonces $u \subset x$, luego

$$g(u) = g[u] \subset g[x] = g(x) = x,$$

luego $g(u) \in \mathcal{P}x \cap HS$. Con esto hemos probado que $g[\mathcal{P}x \cap HS] \subset \mathcal{P}x \cap HS$. Razonando con g^{-1} tenemos la otra inclusión, luego $g(\mathcal{P}x \cap HS) = \mathcal{P}x \cap HS$.

Con esto tenemos probado que HS es un modelo de ZF. Para probar que es un modelo de ZFA observamos primero que “ x es un ordinal” es absoluto para HS . Para ello observamos que en ZF se demuestra

$$x \text{ es un ordinal} \rightarrow x \text{ es transitivo} \wedge x \text{ es conexo} \wedge x \text{ no contiene átomos},$$

y en ZFA (o NBGA) se demuestra también la implicación contraria (en general, un conjunto transitivo y sin átomos está bien fundado). En particular ser un ordinal es Δ_0 en ZFA. No obstante esto no nos vale porque todavía no sabemos que HS sea un modelo de ZFA.

Ahora bien, si α es un ordinal, entonces α es un ordinal^{HS}, porque ser un ordinal es Π_1 en cualquier caso, y si α es un ordinal^{HS}, entonces α es (transitivo, conexo y sin átomos)^{HS}, luego cumple todo esto sin relativizar (porque todo es Δ_0) y, como estamos trabajando en NBGA, esto implica que α es un ordinal.

Ahora es claro que ser un ordinal límite o un ordinal sucesor también es absoluto para HS . Seguidamente demostramos por inducción sobre α que

$$\bigwedge \alpha R_\alpha(A)^{HS} = R_\alpha(A) \cap HS.$$

En efecto, para $\alpha = 0$ relativizamos $\bigwedge x(x \in R_0(A) \leftrightarrow x \text{ es un átomo})$ y así obtenemos $\bigwedge x(x \in R_0(A)^{HS} \leftrightarrow x \in A \cap HS)$, luego

$$R_0(A)^{HS} = A \cap HS = R_0(A) \cap HS.$$

Supuesto cierto para α , relativizamos $R_{\alpha+1}(A) = \mathcal{P}R_\alpha(A)$, con lo que

$$\begin{aligned} R_{\alpha+1}(A)^{HS} &= \mathcal{P}^{HS}R_\alpha(A)^{HS} = \mathcal{P}R_\alpha(A)^{HS} \cap HS \\ &= \mathcal{P}(R_\alpha(A) \cap HS) \cap HS = \mathcal{P}R_\alpha(A) \cap HS = R_{\alpha+1}(A) \cap HS. \end{aligned}$$

Para el caso límite relativizamos $\bigwedge x(x \in R_\lambda(A) \leftrightarrow \bigvee \delta < \lambda x \in R_\delta(A))$. El resultado es

$$\bigwedge x(x \in R_\lambda(A)^{HS} \leftrightarrow \bigvee \delta < \lambda x \in R_\delta(A)^{HS}).$$

Si suponemos que $R_\delta(A)^{HS} = R_\delta(A) \cap HS$ la conclusión es que

$$R_\lambda(A)^{HS} = \bigcup_{\delta < \lambda} R_\delta(A) \cap HS = R_\lambda(A) \cap HS.$$

Para terminar, si $x \in HS$ entonces existe un α tal que $x \in R_\alpha(A) \cap HS$, luego $\bigwedge x \in HS \bigvee \alpha \in HS x \in R_\alpha(A)^{HS}$, lo cual equivale a

$$(\bigwedge x \bigvee \alpha x \in R_\alpha(A))^{HS},$$

y esto es $(V = R(A))^{HS}$. ■

En principio los átomos no tienen por qué ser simétricos, por lo que puede ocurrir que $A^{HS} = \emptyset$ y HS cumpla el axioma de regularidad (y entonces cumple automáticamente el axioma de elección). A continuación veremos cómo definir un filtro normal de subgrupos que asegure la simetría de los átomos.

Definición 2.16 Sea G un subgrupo de Σ_A . Para cada $B \subset A$ definimos el *estabilizador* de B en G como

$$\text{Est}_G(B) = \{g \in G \mid \bigwedge x \in B g(x) = x\}.$$

Se comprueba inmediatamente que $\text{Est}_G(B)$ es un subgrupo de G , así como que si $g \in G$ entonces $\text{Est}_G(g[B]) = \text{Est}_G(B)^g$.

Definimos el *filtro de soportes finitos* de G como el filtro dado por

$$\mathcal{F}_G = \{H \mid H \text{ es subgrupo de } G \wedge \bigvee B(B \subset A \wedge B \text{ finito} \wedge \text{Est}_G(B) \subset H)\}.$$

Es fácil ver que \mathcal{F}_G es ciertamente un filtro normal de subgrupos de G . Para la propiedad de la intersección se usa que, claramente,

$$\text{Est}_G(B \cup C) \subset \text{Est}_G(B) \cap \text{Est}_G(C).$$

Respecto a este filtro, un conjunto x es simétrico si existe un conjunto finito de átomos B tal que $\text{Est}_G(B) \subset \text{Sim}_G(x)$, es decir, si para que un automorfismo fije a x es suficiente que fije a un cierto conjunto finito B de átomos. Se dice entonces que B es un *soporte* de x .

En particular, si x es un átomo tenemos que $\text{Est}_G(\{x\}) \subset \text{Sim}_G(x)$, luego $x \in S$, que es tanto como decir $x \in HS$. Por consiguiente se cumple que $A \subset HS$, y como $\text{Sim}_G(A) = G$, tenemos que $A \in S$ y por tanto $A \in HS$.

Veamos finalmente el comportamiento de HS respecto al axioma de elección. Recordemos que, tal y como se explica en el [capítulo XIII], en ZFA es posible definir el cardinal (generalizado) de un conjunto x como el conjunto de todos los conjuntos de rango mínimo equipotentes a x . Representamos por \mathfrak{C} la clase de todos los cardinales generalizados.

Teorema 2.17 *Supongamos que A es (infinito) numerable, sea $G = \Sigma_A$ y sea HS el modelo simétrico construido con el filtro de soportes finitos. Sea \mathfrak{p} el cardinal (generalizado) de A en HS . Entonces en HS se cumple:*

a) *A es infinito, pero todos sus subconjuntos son finitos o cofinitos (es decir, de complementario finito).*

b) *A no tiene subconjuntos (infinitos) numerables.*

c) *A no puede ser totalmente ordenado.*

d) *Los cardinales menores que \mathfrak{p} son exactamente:*

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \cdots \quad \cdots < \mathfrak{p} - 4 < \mathfrak{p} - 3 < \mathfrak{p} - 2 < \mathfrak{p} - 1,$$

con lo que la clase \mathfrak{C} no está ni totalmente ordenada ni bien fundada.

e) *Se cumple*

$$\mathfrak{p} < \mathfrak{p} + 1 < \mathfrak{p} + 2 < \cdots < \mathfrak{p} + \mathfrak{p} < \mathfrak{p}^2 < \mathfrak{p}^3 < \cdots$$

f) *No se cumple $\mathfrak{p}^2 \leq 2^{\mathfrak{p}}$ (comparar con [13.37])*

DEMOSTRACIÓN: a) Se cumple que A es infinito ^{HS} porque ser infinito es absoluto. Sea $x \subset A$, $x \in HS$ y supongamos que no es finito ^{HS} ni cofinito ^{HS} , es decir, que no es finito ni cofinito. Sea $B \subset A$ un soporte finito de x . Como x y $A \setminus x$ son infinitos, existen átomos u, v tales que $u \in x \setminus B$ y $v \in (A \setminus x) \setminus B$. Sea $g \in \Sigma_A$ la permutación que cumple $g(u) = v$, $g(v) = u$ y deja fijos a los demás átomos. Entonces $g \in \text{Est}_G(B) \subset \text{Sim}_G(x)$, luego $g(x) = x$, pero como $u \in x$ se cumple que $v = g(u) \in g(x) = x$, lo cual es una contradicción. Así pues, x ha de ser finito o cofinito.

b) es consecuencia de a): un conjunto cuyos subconjuntos sean todos finitos o cofinitos no puede tener subconjuntos infinitos numerables, pues un conjunto infinito numerable se puede descomponer en unión de dos conjuntos infinitos numerables disjuntos, y ambos serían subconjuntos infinitos no cofinitos del conjunto de partida.

c) también se sigue de a): Si A pudiera ser totalmente ordenado por una relación \leq , definiríamos $B = \{x \in A \mid \{u \in A \mid u < x\} \text{ es finito}\}$. O bien B o bien $A \setminus B$ es finito. Podemos suponer que lo es $A \setminus B$, pues si lo fuera B cambiaríamos la relación de orden por su inversa.

Entonces \leq es un buen orden en B , pues si $X \subset B$ es no vacío y $x \in X$, entonces $\{u \in A \mid u < x\}$ es finito, luego $\{u \in X \mid u \leq x\}$ también lo es, luego tiene un mínimo elemento m , que también es mínimo de X .

Así pues B tiene un buen orden y $A \setminus B$ también porque es finito, luego A admite un buen orden. Ahora bien, un conjunto infinito que admite un buen orden puede biyectarse con un ordinal infinito, y la restricción a ω de dicha biyección nos da un subconjunto infinito numerable en A , contradicción.

d) Todo conjunto finito de átomos está en HS , por lo que A tiene (en HS) subconjuntos de todos los cardinales finitos. Si $x \subset A$ tiene cardinal n , llamemos $\mathfrak{p} - n$ al cardinal (en HS) de $A \setminus x$. Es fácil probar en ZF que este cardinal no depende de la elección de x . A su vez, la notación $\mathfrak{p} - n$ está justificada porque, según la definición usual de suma de cardinales, se cumple $(\mathfrak{p} - n) + n = \mathfrak{p}$. En particular esto prueba que $\mathfrak{p} - n$ es infinito. Por a) sabemos que los únicos cardinales (en HS) menores que \mathfrak{p} son los de la forma n o $\mathfrak{p} - n$. Falta probar que son todos distintos y que están ordenados.

Sean $n \leq m$ cardinales finitos. Tomemos $x \subset y \subset A$ de cardinales $m - n$ y n respectivamente. Así $(A \setminus y) \cup (y \setminus x) = A \setminus x$, luego $(\mathfrak{p} - m) + n = \mathfrak{p} - (m - n)$. En particular $\mathfrak{p} - m \leq \mathfrak{p} - (m - n)$. Con esto tenemos las desigualdades

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \cdots \quad \cdots \leq \mathfrak{p} - 4 \leq \mathfrak{p} - 3 \leq \mathfrak{p} - 2 \leq \mathfrak{p} - 1.$$

Basta probar que $\mathfrak{p} - 1 \neq \mathfrak{p}$, pues entonces $\mathfrak{p} - n \neq \mathfrak{p} - (n - 1)$, ya que sumando $n - 1$ contradiríamos la primera desigualdad. Ahora bien, esto es una consecuencia de que A no tiene subconjuntos infinitos numerables. Más concretamente, en ZF se demuestra que si A no tiene subconjuntos numerables entonces su cardinal \mathfrak{p} ha de cumplir $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p} - 1$, pues en caso contrario tenemos un $a \in A$ y una biyección $f : A \rightarrow A \setminus \{a\}$, que nos permite definir la sucesión $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$, y es fácil probar que $\{a_n \mid n \in \omega\}$ es un subconjunto infinito numerable de A .

En particular la clase \mathfrak{C} no está totalmente ordenada porque \mathfrak{p} no es comparable con \aleph_0 .

e) Las desigualdades $\mathfrak{p} < \mathfrak{p} + 1 < \mathfrak{p} + 2 < \cdots$ se deben a que si x es un conjunto de cardinal n disjunto con A , entonces $A \cup x$ no puede tener subconjuntos infinitos numerables, luego, según hemos visto en el apartado anterior, su cardinal $\mathfrak{p} + n$ cumple que $\mathfrak{p} + n - 1 < \mathfrak{p} + n$.

La desigualdad $\mathfrak{p} + \mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}^2$ es general. Si se diera la igualdad existiría $f : 2 \times A \rightarrow A \times A$ biyectiva $f \in HS$. Sea B un soporte finito de f y sean $v, w \in A \setminus B$ dos átomos distintos. Sea $f(i, u) = (v, w)$ y supongamos que $u \neq v$ (si no sería $u = v$ y razonaríamos igual). Sea $z \in A \setminus B$ distinto de u, v, w y sea $g \in \Sigma_A$ la permutación que intercambia v y z . Entonces $g(f) = f$ y haciendo actuar g sobre $f(i, u) = (v, w)$ obtenemos que $f(i, u) = (z, g(w))$, luego $v = z$, contradicción.

Las desigualdades $\mathfrak{p}^2 < \mathfrak{p}^3 < \cdots$ se demuestran mediante un argumento similar.

f) Supongamos que existe una aplicación $f : A \times A \rightarrow \mathcal{P}A \cap HS$ inyectiva tal que $f \in HS$. Sea B un soporte finito para f y sean $u, v \in A \setminus B$ dos átomos distintos. Tomemos $x = f(u, v)$ o $x = A \setminus f(u, v)$ de modo que x sea finito.

Si u y v están ambos en x o ninguno lo está, permutándolos obtenemos que $f(u, v) = f(v, u)$, contradicción (porque en este caso el automorfismo que los permuta fija a x). Si $u \in x$ y $v \notin x$ (o viceversa) tomamos $w \in A \setminus x$ que no esté en B (esto es posible porque $A \setminus x$ es infinito). Al permutar v y w resulta $f(u, v) = f(u, w)$, contradicción. ■

En el modelo siguiente el axioma de elección es violado de la forma más drástica posible:

Teorema 2.18 *Supongamos que A es infinito numerable y descompongámoslo en una unión disjunta $A = \bigcup_{n \in \omega} P_n$, de pares $P_n = \{a_n, b_n\}$ con $a_n \neq b_n$.*

Consideremos el grupo $G = \{g \in \Sigma_A \mid \bigwedge n \in \omega g(P_n) = P_n\}$ y sea HS el modelo simétrico formado con el correspondiente filtro de soportes finitos. Entonces en HS se cumple que $P = \{P_n \mid n \in \omega\}$ es una familia numerable de pares desordenados que no tiene función de elección. En particular A es una unión numerable de conjuntos de cardinal 2 pero no es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Todos los pares P_n son simétricos por la definición de G . Como $P_n \subset A \subset HS$, de hecho $P_n \in HS$. Sea $f : \omega \rightarrow P$ dada por $f(n) = P_n$. La aplicación f no es sino el conjunto $f = \{(n, P_n) \mid n \in \omega\}$, y si $g \in G$ se cumple que $g(f) = \{(g(n), g(P_n)) \mid n \in \omega\} = f$, pues g fija tanto a los números naturales como a los pares P_n . Así pues $f \in S$ y como HS es un modelo de ZF es cerrado para pares ordenados, de modo que $f \in HS$ y concluimos que $f \in HS$. Así mismo, como el rango es un concepto absoluto, P , que es el rango de f , está en HS . Con esto no sólo hemos probado que $P \in HS$ sino que, de hecho, P es numerable ^{HS} .

Supongamos que P tuviera una función de elección $h \in HS$, es decir, suponemos que $h : P \rightarrow A$ cumple que $h(P_n) \in P_n$. Sea B un soporte finito para h y tomemos un $n \in \omega$ tal que $a_n, b_n \notin B$. Sea g la permutación que intercambia a_n con b_n . Es claro que $g \in G$ y $g(h) = h$. Ahora bien, si, por ejemplo, $h(P_n) = a_n$, al aplicar g obtenemos que $g(h)(g(P_n)) = g(a_n)$, es decir, $h(P_n) = b_n$, contradicción, e igualmente si $h(P_n) = b_n$. En consecuencia no existe tal h .

Notemos que si A fuera numerable tendría un buen orden que determinaría una función de elección sobre P . ■

No damos más ejemplos porque en el capítulo VI podremos darlos sin negar el axioma de regularidad.

2.4 Modelos internos en ZFC

Técnicamente, esta sección debería estar incluida en el capítulo anterior, pues aquí vamos a ocuparnos de mostrar cómo es posible formalizar las pruebas de consistencia de ZFC en lugar de en NBG, pese a que muchas de ellas involucran clases propias. No obstante, la hemos retrasado hasta este punto para contar con los ejemplos que hemos visto en este capítulo.

La diferencia fundamental entre NBG y ZFC es que en la primera teoría tiene sentido hablar de clases propias, de modo que, por ejemplo, $V \equiv \{x \mid x = x\}$ es un designador de \mathcal{L}_m y en NBG* podemos demostrar que $\bigwedge x(\text{cto } x \rightarrow x \in V)$. Por el contrario, en ZFC no tiene sentido el concepto de clase propia, de modo que, aunque V sigue siendo un designador de su lenguaje formal (que es el mismo \mathcal{L}_m), lo cierto es que en ZF* se prueba que $\neg \bigvee y \bigwedge x x \in y$, con lo que, estrictamente y con el convenio de que la descripción impropia es el conjunto vacío, en ZF* se prueba que $V = \emptyset$.

Por lo demás, cualquier teorema de NBG que únicamente involucre conjuntos puede demostrarse igualmente en ZFC (ver [9.7]). De este modo, si particularizamos todos los teoremas vistos en el capítulo anterior al caso en que los modelos involucrados sean conjuntos, toda la teoría puede considerarse formalizada en ZFC (o en ZF*, etc., según las indicaciones que hemos hecho en cada momento). El problema es que hay muchos modelos interesantes que son clases propias. En este capítulo hemos visto algunos ejemplos: la clase R de los conjuntos regulares y la clase HS de los conjuntos hereditariamente simétricos.

Los modelos transitivos que son clases propias se suelen llamar *modelos internos*, de modo que nuestro problema es explicar cómo es posible hablar en ZF de modelos internos de ZF. En realidad podríamos ocuparnos igualmente de modelos no naturales, pero, como no vamos a tratar con ningún otro ejemplo aparte del que hemos usado para probar la independencia del axioma de regularidad, no merece la pena que compliquemos la discusión generalizándola innecesariamente.

La idea básica es que los teoremas de NBG¹ que involucran clases propias concretas —es decir, definidas por fórmulas concretas— pueden considerarse teoremas de ZFC. Por ejemplo, la clase de los conjuntos regulares es

$$R = \{x \mid x \text{ es regular}\},$$

donde “ x es regular” es una fórmula que no involucra clases propias, pues equivale a que la relación de pertenencia está bien fundada en la clausura transitiva de x . Por consiguiente, la fórmula $x \in R$ tiene sentido en ZFC a condición de que no la interpretemos literalmente (pues literalmente $R = \emptyset$ en ZFC), sino como una abreviatura de la fórmula “ x es regular”. A partir de aquí, otras fórmulas como $x \subset R$ también adquieren sentido. En este caso hemos de interpretarla como $\bigwedge y(y \in x \rightarrow y \in R)$. Similarmente es fácil eliminar R de otros teoremas como $\mathcal{P}R = R$.

En general, cualquier fórmula en la que aparezcan clases propias como R , es decir, clases que tienen asociada una fórmula de \mathcal{L}_m que las define, puede convertirse en una fórmula equivalente en la que no aparezcan dichas clases. Para ello sólo hay que desarrollar la fórmula hasta que las clases aparezcan sólo en subfórmulas $x \in M$ y después sustituir estas subfórmulas por la fórmula que define a M .

¹Por simplicidad hablaremos de NBG y ZFC, si bien todo vale igualmente para pares de teorías más fuertes o más débiles, como NBG* y ZF*, etc.

Observemos que si al desarrollar la fórmula llegáramos a una subfórmula de tipo $M \in x$, no podríamos eliminar M , pero ninguna fórmula “razonable” de NBG puede contener una subfórmula en la que una clase propia deba pertenecer a otra clase. Ello daría lugar a casos triviales que podrían reformularse sin dicha patología. El lector puede objetar que las “fórmulas razonables” no están definidas, pero no es necesario contar con una teoría general. Cada vez que nos encontremos con un teorema que involucra clases propias, es fácil comprobar si tiene sentido en ZFC y, con los matices que señalaremos más abajo, siempre lo tendrá.

En particular, si θ es una expresión de \mathcal{L}_m , una relativización θ^M para una clase propia arbitraria M no tiene sentido en ZFC, pero la relativización θ^R sí tiene sentido. Es la expresión que resulta de sustituir cada $\bigwedge x$ por $\bigwedge x \in R$ o, más detalladamente, por $\bigwedge x(x \text{ es regular} \rightarrow \dots)$, y similarmente con los descriptores.

Ahora es claro que la afirmación $R \models ZFC$ tiene sentido en ZFC. Como en el caso de NBG, no es un teorema, sino un esquema teorematizado que afirma que, para cualquier colección finita Γ de axiomas de ZFC, se cumple $\frac{\vdash}{ZFC} R \models \Gamma$.

No es ningún inconveniente que las clases estén definidas con parámetros, como es el caso de las clases HS . En principio HS es $HS(G, \Gamma)$, pero esto sólo significa que al relativizar a HS hemos de sustituir $\bigwedge x$ por “para todo conjunto x hereditariamente simétrico respecto de G y Γ ”, donde esta propiedad puede ser definida sin hacer referencia a clases propias.²

Los teoremas de NBG que hacen referencia a clases propias arbitrarias (por ejemplo, a modelos arbitrarios) tienen sentido en ZFC como esquemas teorematizados que se convierten en teoremas concretos cuando todas las clases arbitrarias se particularizan a clases definidas por fórmulas metamatemáticas concretas. Por ejemplo, es el caso de la afirmación

Si M es un modelo transitivo de ZF^ , entonces el término $\{x, y\}$ es absoluto para M .*

Esto es un teorema de NBG* y un esquema teorematizado de ZF^* . En ZF^* hay que entenderlo del modo siguiente:

Existe una colección finita Γ de axiomas de ZF^ tal que para toda fórmula $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L}_m , en ZF^* se demuestra:*

Para todos los conjuntos x_1, \dots, x_n , si $M = \{x \mid \phi(x, x_1, \dots, x_n)\}$ y $M \models \Gamma$, entonces $\bigwedge xy \in M \{x, y\}^M = \{x, y\}$.

Con estas observaciones debería quedar claro que toda la teoría del capítulo anterior y todas las aplicaciones que hemos visto en éste (con la posible excepción —que no es tal— de la consistencia de $V \neq R$) pueden desarrollarse

²En ZFA se prueba que cada automorfismo de A se extiende de forma única a cada conjunto V_α , para cada ordinal α , lo que permite definir $\text{Sim}_G(x)$ como el conjunto de $g \in G$ cuya extensión a V_α , para un ordinal α tal que $x \in V_\alpha$, fija a x . Esto nos da la definición de los conjuntos simétricos. Los conjuntos hereditariamente simétricos se definen de forma similar, aplicando el teorema de recursión a los conjuntos V_α .

íntegramente en ZFC, es decir, sin apoyarnos en ningún momento en NBG. Lo mismo es válido para los resultados de los capítulos posteriores.

Capítulo III

Conjuntos constructibles

De todos los axiomas de ZFC (o NBG) el que más dice sobre la naturaleza de los conjuntos es el axioma de regularidad. Según este axioma, los conjuntos se construyen a partir del vacío a través de la jerarquía regular:

$$V_0 = \emptyset, \quad \bigwedge \alpha V_{\alpha+1} = \mathcal{P}V_\alpha, \quad \bigwedge \lambda V_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} V_\delta, \quad V = \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha.$$

El axioma de regularidad $V = R$ puede verse casi como una definición: “cuando decimos conjunto, queremos decir conjunto regular, por definición”, de modo que suponer el axioma de regularidad no es sino matizar el concepto de conjunto. Ahora bien, esta “matización” no puede tenerse por una “definición” en sentido categórico debido a que la jerarquía regular tiene dos “grietas”. Por una parte no sabemos realmente qué es $\mathcal{P}X$ y por otra parte no sabemos realmente qué es la clase Ω de todos los ordinales. Notemos que los axiomas de la teoría de conjuntos postulan, ciertamente, que existe un conjunto $\mathcal{P}X$ que contiene a todos los subconjuntos de X , pero no nos dice cómo se generan esos subconjuntos. Sabemos determinar algunos conjuntos que necesariamente han de estar en $\mathcal{P}X$, pero no tenemos ninguna descripción de qué hemos de entender por “la totalidad” de los subconjuntos de X . Similarmente, sabemos que cada ordinal es esencialmente una forma de ordenar bien un conjunto, pero no tenemos ninguna representación de cuántas formas hay de ordenar un conjunto, ni siquiera un conjunto numerable.

En este capítulo introduciremos una “matización” más fina de la noción de conjunto. Concretamente, definiremos la clase L de los conjuntos constructibles mediante una jerarquía similar a la jerarquía regular:

$$L_0 = \emptyset, \quad \bigwedge \alpha L_{\alpha+1} = \mathcal{D}L_\alpha, \quad \bigwedge \lambda L_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} L_\delta, \quad L = \bigcup_{\alpha \in \Omega} L_\alpha.$$

La diferencia es que ahora usamos el operador $\mathcal{D}X$, que nos da lo que llamaremos el conjunto de partes definibles de X , que contiene únicamente a los subconjuntos de X definibles por una fórmula. Naturalmente esto ha de ser precisado debidamente, pero lo importante es que $\mathcal{D}X$ está perfectamente descrito, de modo que podemos decir que si conocemos X también conocemos $\mathcal{D}X$.

De este modo, la jerarquía constructible sólo tiene la fisura correspondiente al uso de los ordinales. El axioma de constructibilidad $V = L$ no llega a ser una determinación categórica de la noción de conjunto, pero sí una precisión mucho más sutil. Al igual que el axioma de regularidad permite responder a cuestiones que quedan abiertas sin él, como si existen o no conjuntos de la forma $a = \{a\}$, el axioma de constructibilidad permite responder a cuestiones mucho más interesantes. Por ejemplo, implica la hipótesis del continuo generalizada.

Más aún, veremos que la clase L puede construirse en ZF sin el axioma de elección, pero resulta ser un modelo de ZFC más la hipótesis del continuo generalizada, luego nos permitirá probar la consistencia de ésta más el axioma de elección supuesta la consistencia de ZF. La clase L , junto con estos hechos, fue descubierta por Gödel.

3.1 Definibilidad

En esta sección definiremos el conjunto $\mathcal{D}X$ de las partes definibles de un conjunto X . Trabajamos en ZF-AP, es decir, sin el axioma de partes y sin el axioma de elección. Ninguno de estos dos axiomas es necesario para definir L . En primer lugar definimos el conjunto de las relaciones n -ádicas definibles sobre un conjunto X .

Definición 3.1 Sea X un conjunto, n un número natural, $i, j \in n$ y $R \subset X^{n+1}$.

- a) $\text{Proy}(X, R, n) = \{s \in X^n \mid \forall t \in R \ t|_n = s\}$,
- b) $\text{Diag}_{\in}(X, n, i, j) = \{s \in X^n \mid s(i) \in s(j)\}$,
- c) $\text{Diag}_{=} (X, n, i, j) = \{s \in X^n \mid s(i) = s(j)\}$,
- d) Por recursión sobre $k \in \omega$ definimos

$$\text{Df}_0(X, n) = \{\text{Diag}_{\in}(X, n, i, j) \mid i, j < n\} \cup \{\text{Diag}_{=} (X, n, i, j) \mid i, j < n\},$$

$$\text{Df}_{k+1}(X, n) = \text{Df}_k(X, n) \cup \{X^n \setminus R \mid R \in \text{Df}_k(X, n)\}$$

$$\cup \{R \cap S \mid R, S \in \text{Df}_k(X, n)\} \cup \{\text{Proy}(X, R, n) \mid R \in \text{Df}_k(X, n+1)\}.$$
- e) $\text{Df}(X, n) = \bigcup_{k \in \omega} \text{Df}_k(X, n)$.

Esta definición puede resultar un poco desconcertante, pero enseguida veremos que encierra una idea muy simple. Para ello necesitamos dos hechos técnicos:

Teorema 3.2 Si X es un conjunto y n es un número natural, entonces

$$\text{Df}(X, n) \in \mathcal{P}\mathcal{P}X^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que $\text{Df}(X, n)$ es un conjunto de relaciones n -ádicas en X . La inclusión $\text{Df}(X, n) \subset \mathcal{P}X^n$ es inmediata. La única

dificultad es demostrar que es un conjunto sin contar con el axioma de partes, es decir, sin saber que $\mathcal{P}X^n$ lo es.

Ahora bien, $\text{Df}_0(A, n)$ es un conjunto porque es la unión de dos imágenes de $n \times n$ por las aplicaciones

$$(i, j) \mapsto \text{Diag}_{\in}(X, n, i, j) \quad \text{y} \quad (i, j) \mapsto \text{Diag}_{=} (X, n, i, j).$$

Si para todo natural n se cumple que $\text{Df}_k(X, n)$ es un conjunto, entonces $\text{Df}_{k+1}(X, n)$ es también un conjunto porque es la unión de $\text{Df}_k(X, n)$, que es un conjunto, con una imagen de $\text{Df}_k(X, n)$, una imagen de $\text{Df}_k(X, n) \times \text{Df}_k(X, n)$ y una imagen de $\text{Df}_k(X, n+1)$.

Finalmente, $\text{Df}(X, n)$ es un conjunto porque es una unión numerable de conjuntos. \blacksquare

En realidad la definición de $\text{Df}(X, n)$ no es tan complicada. Simplemente es la necesaria para que $\text{Df}(X, n)$ sea el menor conjunto que cumple el teorema siguiente. La prueba es inmediata.

Teorema 3.3 *Sea X un conjunto y n un número natural. Entonces*

a) *Si $i, j < n$ entonces*

$$\text{Diag}_{\in}(X, n, i, j) \in \text{Df}(X, n) \quad \text{y} \quad \text{Diag}_{=} (X, n, i, j) \in \text{Df}(X, n).$$

b) *Si $R \in \text{Df}(X, n)$ entonces $X^n \setminus R \in \text{Df}(X, n)$.*

c) *Si $R, S \in \text{Df}(X, n)$, entonces $R \cap S, R \cup S \in \text{Df}(X, n)$.*

d) *Si $R \in \text{Df}(X, n+1)$ entonces $\text{Proy}(X, R, n) \in \text{Df}(X, n)$.*

Y ahora ya podemos mostrar qué es exactamente $\text{Df}(X, n)$. Recordemos que \mathcal{L}_0 es el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Teorema 3.4 *Si X es un conjunto y n un número natural, entonces $\text{Df}(X, n)$ es el conjunto de las relaciones n -ádicas definibles en X , es decir, el conjunto de las relaciones $R \subset X^n$ tales que existe una fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_0)$ tal que*

$$\bigwedge s \in X^n (s \in R \leftrightarrow X \models \phi[s(0), \dots, s(n-1)]).$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos que la relación R definida por una fórmula ϕ según el enunciado está en $\text{Df}(X, n)$. Hay que entender que ϕ tiene libres a lo sumo las variables x_1, \dots, x_n , pero no todas necesariamente. Lo probamos por inducción sobre la longitud de ϕ . Si $\phi = (x_i \in x_j)$ o $\phi = (x_i = x_j)$ entonces R es simplemente $\text{Diag}_{\in}(X, n, i-1, j-1)$ o $\text{Diag}_{=} (X, n, i-1, j-1)$, luego ciertamente está en $\text{Df}(X, n)$.

Si $\phi = \neg\psi$ y ψ define la relación S , entonces ϕ define $R = X^n \setminus S$. Si $S \in \text{Df}(X, n)$ por hipótesis de inducción, entonces $R \in \text{Df}(X, n)$ por el teorema anterior.

Si $\phi = \psi \rightarrow \chi$ y las relaciones definidas por ψ y χ son S y T , respectivamente, entonces $R = (X^n \setminus S) \cup T$. Si $S, T \in \text{Df}(X, n)$ por hipótesis de inducción, entonces $R \in \text{Df}(X, n)$ por el teorema anterior.

Supongamos ahora que $\phi = \bigwedge x \psi(x_1, \dots, x_n, x)$ y que la relación definida por ψ está en $\text{Df}(X, n+1)$. Entonces

$$s \in R \leftrightarrow \neg X \models \bigvee x \neg \psi[s(0), \dots, s(n-1)].$$

Sea S la relación definida por $\neg \psi$, que cumple $S \in \text{Df}(X, n+1)$. Así

$$\begin{aligned} s \in R &\leftrightarrow \neg \bigvee x \in XX \models \neg \psi[s(0), \dots, s(n-1), x] \\ &\leftrightarrow \neg \bigvee x \in X (s(0), \dots, s(n-1), x) \in S \leftrightarrow \neg \bigvee t \in S t|_n = s \\ &\leftrightarrow \neg t \in \text{Proy}(X, S, n) \leftrightarrow t \in X^n \setminus \text{Proy}(X, S, n). \end{aligned}$$

Por el teorema anterior tenemos que $\text{Proy}(X, S, n)$ está en $\text{Df}(X, n)$ y $R = X^n \setminus \text{Proy}(X, S, n)$ también.

Ahora veamos que todas las relaciones de $\text{Df}(X, n)$ están definidas por una fórmula. Concretamente, probaremos por inducción sobre k que todas las relaciones de $\text{Df}_k(X, n)$ están definidas por una fórmula. Las relaciones de $\text{Df}_0(X, n)$ son las definidas por fórmulas de tipo $x_i \in x_j$ o $x_i = x_j$.

Supuesto que las relaciones de $\text{Df}_k(X, n)$ están definidas por una fórmula (para todo n) consideramos una relación de $\text{Df}_{k+1}(X, n)$. Si está en $\text{Df}_k(X, n)$ no hay nada que probar, si es el complementario de una relación de $\text{Df}_k(X, n)$ entonces está definida por la negación de la fórmula que define a ésta, si es la intersección de dos relaciones de $\text{Df}_k(X, n)$ entonces está definida por la conjunción de las dos fórmulas que definen a éstas y si es la proyección de una relación de $\text{Df}_k(X, n+1)$ definida por una fórmula $\phi(x_1, \dots, x_{n+1})$, entonces está definida por la fórmula $\bigvee x_{n+1} \phi$. ■

Definición 3.5 Llamaremos conjunto de las *partes definibles* de un conjunto X al conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}X &= \{x \mid \bigvee n s R (n \in \omega \wedge s \in X^n \wedge R \in \text{Df}(X, n+1)) \\ &\quad \wedge x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\}\}. \end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{D}X \subset \mathcal{P}X$, pero $\mathcal{D}X$ es un conjunto sin necesidad de suponer que $\mathcal{P}X$ lo es. En efecto, es una imagen del conjunto

$$\bigcup_{n \in \omega} (X^n \times \text{Df}(X, n+1)).$$

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata del anterior, y nos muestra que $\mathcal{D}X$ es justo lo que queríamos definir:

Teorema 3.6 *Sea X un conjunto. Entonces $\mathcal{D}X$ está formado por los conjuntos $x \subset X$ tales que existe una fórmula $\phi(x_0, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_0)$ y existen $a_1, \dots, a_n \in X$ de modo que*

$$x = \{u \in X \mid X \models \phi[u, a_1, \dots, a_n]\}.$$

En otras palabras, $\mathcal{D}X$ contiene a los subconjuntos de X que pueden definirse mediante una fórmula con parámetros en X . En la práctica nos será útil la siguiente versión metamatemática de este teorema:

Teorema 3.7 *Sea $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$ una fórmula de \mathcal{L}_m con a lo sumo las variables libres indicadas. Entonces en $\text{ZF}-\text{AP}$ se demuestra que si X es un conjunto transitivo y $\emptyset \in X$ entonces*

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in X \{x \in X \mid \phi^X(x, x_1, \dots, x_n)\} \in \mathcal{D}X.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos cambiar ϕ por una fórmula equivalente sin descriptores con las mismas variables libres (porque X verifica los axiomas de extensionalidad y del conjunto vacío). Equivalentemente, podemos suponer que ϕ no tiene descriptores, con lo que podemos considerar la fórmula $\ulcorner \phi \urcorner \in \mathcal{L}_0$. Por el teorema 1.17, dados $x_1, \dots, x_n \in X$ tenemos que

$$\{x \in X \mid \phi^X(x, x_1, \dots, x_n)\} = \{x \in X \mid X \models \ulcorner \phi \urcorner [x, x_1, \dots, x_n]\},$$

y basta aplicar el teorema anterior. ■

Ejercicio: Adaptar el argumento del teorema [9.6] para probar que si M es un modelo transitivo de todo ZFC entonces $\mathcal{D}M$ es un modelo transitivo de todo NBG.

Éstas son las propiedades básicas del conjunto de partes definibles.

Teorema 3.8 *Sea X un conjunto. Entonces*

- a) $\mathcal{D}X \subset \mathcal{P}X$,
- b) $X \in \mathcal{D}X$,
- c) Si X es transitivo entonces $X \subset \mathcal{D}X$,
- d) Si $x \subset X$ y x es finito entonces $x \in \mathcal{D}X$,
- e) Si X es finito entonces $\mathcal{D}X = \mathcal{P}X$,
- f) [AE] Si X es infinito entonces $|\mathcal{D}X| = |X|$.

DEMOSTRACIÓN: a) es evidente.

b) $X = \{x \in X \mid (x = x)^X\} \in \mathcal{D}X$.

c) Si $u \in X$, entonces $u = \{x \in X \mid (x \in u)^X\} \in \mathcal{D}X$.

d) Sea $x = \{a_1, \dots, a_n\}$ Consideremos la fórmula

$$\phi = x_0 = x_1 \vee \cdots \vee x_0 = x_n \in \mathcal{L}_0.$$

Es claro que $x = \{u \in X \mid X \models \phi[u, a_1, \dots, a_n]\} \in \mathcal{D}X$.

e) es consecuencia de d).

f) Se sigue fácilmente de 3.6, pues cada elemento de $\mathcal{D}X$ está determinado por una fórmula de \mathcal{L}_0 y una sucesión finita de elementos de X . El conjunto de las fórmulas de \mathcal{L}_0 es numerable y el cardinal del conjunto de sucesiones finitas de X es el mismo que el de X . ■

Terminamos demostrando que los conceptos que acabamos de introducir son absolutos:

Teorema 3.9 *Los términos $\text{Df}(X, n)$ y $\mathcal{D}X$ son absolutos para modelos transitivos de ZF-AP.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo de ZF-AP. Es inmediato comprobar que si $X, R, n, i, j \in M$, entonces $\text{Proy}(X, R, n)^M = \text{Proy}(X, R, n)$, $\text{Diag}_\in(X, n, i, j)^M = \text{Diag}_\in(X, n, i, j)$ y $\text{Diag}_=(X, n, i, j)^M = \text{Diag}_=(X, n, i, j)$.

De aquí se sigue que $\text{Df}_0(X, n)^M = \text{Df}_0(X, n)$ y por inducción sobre k se concluye que $\bigwedge k \in \omega \text{Df}_k(X, n)^M = \text{Df}_k(X, n)$. A su vez, esto implica que $\text{Df}(X, n)^M = \text{Df}(X, n)$, es decir, que $\text{Df}(X, n)$ es absoluto para M .

Es un teorema de ZF-AP que

$$\bigwedge X x (x \in \mathcal{D}X \leftrightarrow \bigvee nsR (n \in \omega \wedge s \in X^n \wedge R \in \text{Df}(X, n+1) \\ \wedge x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\})).$$

Por lo tanto, M cumple la relativización de este teorema:

$$\bigwedge X \in M \bigwedge x (x \in \mathcal{D}^M X \leftrightarrow \bigvee nsR (n \in \omega \wedge s \in X^n \wedge R \in \text{Df}(X, n+1) \\ \wedge x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\}^M)).$$

Notemos que no hace falta exigir $n, s, R \in M$ porque esto ya se sigue de $n \in \omega, s \in X^n = (X^n)^M, R \in \text{Df}(X, n+1) = \text{Df}(X, n+1)^M$. Igualmente, tanto $x \in \mathcal{D}^M X$ como $x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\}^M$ implican ya que $x \in M$.

Relativizando el teorema

$$\bigwedge snRu (u \in \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\} \leftrightarrow u \in X \wedge s \cup \{(n, u)\} \in R)$$

concluimos que $\{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\}^M = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\}$, con lo que, en definitiva, tenemos que

$$\bigwedge X \in M \bigwedge x (x \in \mathcal{D}^M X \leftrightarrow x \in \mathcal{D}X),$$

es decir, $\bigwedge X \in M \mathcal{D}^M X = \mathcal{D}X$, luego $\mathcal{D}X$ es absoluto para M . ■

3.2 La jerarquía constructible

Ahora ya podemos definir L exactamente como habíamos anticipado en la introducción al capítulo:

Definición 3.10 La clase L de los *conjuntos constructibles* se define mediante la siguiente recursión transfinita:

$$L_0 = \emptyset, \quad \bigwedge \alpha L_{\alpha+1} = \mathcal{D}L_\alpha, \quad \bigwedge \lambda L_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} L_\delta, \quad L = \bigcup_{\alpha \in \Omega} L_\alpha.$$

La jerarquía constructible, así definida, comparte sus propiedades básicas con la jerarquía regular:

Teorema 3.11 *Se cumple:*

- a) Cada L_α es un conjunto transitivo.
- b) L es una clase transitiva.
- c) Si $\alpha \leq \beta$ entonces $L_\alpha \subset L_\beta$.
- d) $L_\alpha \subset V_\alpha$.
- e) $\bigwedge n \in \omega L_n = V_n$.
- f) $L_\omega = V_\omega$.
- g) Si $x \subset L_\alpha$ es finito, entonces $x \in L_{\alpha+1}$.
- h) $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$.
- i) $L_\alpha \cap \Omega = \alpha$.
- j) $\Omega \subset L$.

DEMOSTRACIÓN: a) Se prueba por inducción. Si L_α es transitivo y $x \in L_{\alpha+1}$ entonces $x \in \mathcal{D}L_\alpha$, luego $x \subset L_\alpha \subset L_{\alpha+1}$ por 3.8 c).

- b) Es obvio. c) es consecuencia de que, como hemos visto en a), $L_\alpha \subset L_{\alpha+1}$.
- d) Se demuestra por inducción: Si $L_\alpha \subset V_\alpha$ entonces

$$L_{\alpha+1} = \mathcal{D}L_\alpha \subset \mathcal{P}L_\alpha \subset \mathcal{P}V_\alpha = V_{\alpha+1}.$$

- e) Se prueba inmediatamente por inducción teniendo en cuenta 3.8 e).
- f) es consecuencia inmediata de e).
- g) y h) se siguen claramente de 3.8.

i) Se prueba por inducción: si $L_\alpha \cap \Omega = \alpha$, entonces todo $\beta \in L_{\alpha+1} \cap \Omega$ ha de cumplir $\beta \subset L_\alpha \cap \Omega = \alpha$, es decir, $\beta \leq \alpha$ y, por consiguiente, $\beta \in \alpha + 1$. Para probar la otra inclusión basta ver que $\alpha \in L_{\alpha+1}$. Ahora bien:

$$\alpha = \{x \in L_\alpha \mid (x \text{ es un ordinal})^{L_\alpha}\},$$

pues ser un ordinal es una propiedad Δ_0 y L_α es transitivo.

- j) Se sigue de i). ■

Conviene también destacar las diferencias entre las jerarquías regular y constructible. Según acabamos de ver, ambas coinciden hasta $L_\omega = V_\omega$. Sin embargo, a partir de aquí se comportan de forma diferente: mientras $V_{\omega+1}$ contiene todos los subconjuntos de V_ω , en $L_{\omega+1}$ sólo están los definibles. Si suponemos el axioma de elección la diferencia es clara: $|V_{\omega+1}| = 2^{\aleph_0}$ y $|L_{\omega+1}| = \aleph_0$. Esto no significa que L_ω sólo tenga \aleph_0 subconjuntos constructibles, pues en pasos posteriores de la jerarquía aparecerán más subconjuntos de L_ω . En $L_{\omega+2}$ aparecerán los subconjuntos de L_ω definibles en $L_{\omega+1}$, en $L_{\omega+3}$ aparecerán los subconjuntos de L_ω definibles en $L_{\omega+2}$ y así sucesivamente. En general, los subconjuntos constructibles de un conjunto constructible dado no entran todos en un paso de la jerarquía constructible, sino que entran gradualmente, a medida que los más complejos pueden ser definidos a partir de conjuntos más sencillos. En cualquier caso no podemos garantizar que todos los subconjuntos de un conjunto constructible dado sean constructibles, por lo que no todos tienen por qué entrar en la jerarquía.

Teorema 3.12 *La clase L es un modelo transitivo de ZF menos el axioma de partes, o de todo ZF si suponemos el axioma de partes.*

DEMOSTRACIÓN: Como L es transitiva cumple el axioma de extensionalidad. El axioma de regularidad se cumple en cualquier clase. El axioma del par se cumple porque si $x, y \in L_\alpha$ entonces $\{x, y\} \subset L_\alpha$ y, como es un conjunto finito, $\{x, y\} \in L_{\alpha+1}$. Para probar el axioma de la unión tomamos $x \in L_\alpha$ y observamos que, por transitividad, $\bigcup_{y \in x} y \subset L_\alpha$ y

$$\bigcup_{y \in x} y = \{u \in L_\alpha \mid (\forall y \in x \ u \in y)^{L_\alpha}\} \in L_{\alpha+1}.$$

Para probar el axioma del reemplazo tomamos $F : A \subset L \longrightarrow L$ definida mediante una fórmula $F(x) = y \leftrightarrow \phi^L(x, y, x_1, \dots, x_n)$, donde $x_1, \dots, x_n \in L$. Tomamos $a \in L$ y hemos de ver que $F[a] \in L$. Sea α un ordinal suficientemente grande como para que $x_1, \dots, x_n, a \in L_\alpha$ y $F[a] \subset L_\alpha$. De este modo

$$F[a] = \{y \in L_\alpha \mid \forall x \in a \ \phi^L(x, y)\}.$$

Si en vez de ϕ^L tuviéramos ϕ^{L_α} tendríamos que $F[a] \in L_{\alpha+1}$. Aplicamos el teorema 1.24, según el cual existe un ordinal límite $\lambda > \alpha$ tal que ϕ es absoluta para $L_\lambda - L$. Así

$$\begin{aligned} F[a] &= \{y \in L_\lambda \mid \forall x \in a \ \phi^L(x, y)\} = \{y \in L_\lambda \mid \forall x \in a \ \phi^{L_\lambda}(x, y)\} \\ &= \{y \in L_\lambda \mid (\forall x \in a \ \phi(x, y))^{L_\lambda}\} \in L_{\lambda+1}. \end{aligned}$$

Como $\Omega \subset L$ es claro que L cumple el axioma del conjunto vacío y el axioma de infinitud. Supongamos ahora el axioma de partes y veamos que también se cumple en L . Dado $x \in L$, tenemos que $\mathcal{P}x \cap L$ es un subconjunto de L , luego existe un ordinal α tal que $x \in L_\alpha$ y $\mathcal{P}x \cap L \subset L_\alpha$. Entonces

$$\mathcal{P}x \cap L = \{u \in L_\alpha \mid (u \subset x)^{L_\alpha}\} \in L_{\alpha+1}.$$

■

Ahora demostraremos L verifica también el axioma de constructibilidad, es decir, $V = L$, y luego veremos que éste implica el axioma de elección, con lo que de hecho L será un modelo de todo ZFC (supuesto el axioma de partes, pero no el axioma de elección). En definitiva, hemos de probar que en L todo conjunto es constructible, y hemos de comprender que esto no es evidente. Con más detalle, el axioma de constructibilidad es $\bigwedge x \ x$ es constructible, luego lo que hemos de probar es $(\bigwedge x \ x \text{ es constructible})^L$, es decir, $\bigwedge x \in L \ x$ es constructible ^{L} . Lo que es evidente es que $\bigwedge x \in L \ x$ es constructible, pero no es evidente que “ x es constructible” equivalga a “ x es constructible ^{L} ”, o sea, que la constructibilidad sea absoluta para L . De hecho, la constructibilidad no es absoluta para modelos transitivos de ZFC en general.

Teorema 3.13 *El término L_α es absoluto para modelos transitivos de ZF–AP.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo de ZF–AP. Se demuestra por inducción sobre α que $\bigwedge \alpha \in \Omega^M \ L_\alpha^M = L_\alpha$.

En efecto, para $\alpha = 0$ tenemos que $L_0^M = \emptyset^M = \emptyset = L_0$. Supuesto cierto para α , tenemos que $L_{\alpha+1}^M = (\mathcal{D}L_\alpha)^M = \mathcal{D}^M L_\alpha^M = \mathcal{D}L_\alpha = L_{\alpha+1}$, donde hemos usado que $\mathcal{D}X$ es absoluto y la hipótesis de inducción. Finalmente, si $\lambda < \Omega^M$ y $\bigwedge \delta < \lambda \ L_\delta^M = L_\delta$, al relativizar la definición de L_λ tenemos que

$$\bigwedge x (x \in L_\lambda^M \leftrightarrow \bigvee \delta < \lambda \ x \in L_\delta^M),$$

y como podemos cambiar L_δ^M por L_δ , concluimos que $L_\lambda^M = L_\lambda$. ■

Sin embargo, de este teorema no se deduce que la constructibilidad sea absoluta para modelos transitivos cualesquiera. La situación es la siguiente:

Teorema 3.14 *Sea M un modelo transitivo de ZF–AP. Entonces*

a) *Si M es una clase propia entonces $L \subset M$ y*

$$\bigwedge x \in M (x \text{ es constructible}^M \leftrightarrow x \in L).$$

b) *Si M es un conjunto y $\lambda = \Omega^M$, entonces $L_\lambda \subset M$ y*

$$\bigwedge x \in M (x \text{ es constructible}^M \leftrightarrow x \in L_\lambda).$$

DEMOSTRACIÓN: Relativizamos a M la sentencia

$$\bigwedge x (x \text{ es constructible} \leftrightarrow \bigvee \alpha \ x \in L_\alpha)$$

teniendo en cuenta que L_α es absoluto. El resultado es

$$\bigwedge x \in M (x \text{ es constructible}^M \leftrightarrow \bigvee \alpha \in \Omega^M \ x \in L_\alpha).$$

Por el teorema 1.38, si M es una clase propia entonces $\Omega^M = \Omega$, luego queda la equivalencia del enunciado. Si M es un conjunto también llegamos a la equivalencia correspondiente. ■

De este modo, la constructibilidad es absoluta para clases propias, pero no necesariamente para conjuntos. Puede darse el caso de que $L_\lambda \subsetneq M \subset L$, de modo que todos los conjuntos de M sean constructibles pero sólo los de L_λ sean constructibles ^{M} . La idea es que para construir un conjunto $x \in M \setminus L_\lambda$ hacen falta más ordinales de los que hay en M , por lo que alguien que “viva” en M “ve” el resultado de la construcción, pero no puede “ver” la construcción misma.

Por otra parte, conviene resaltar que el teorema anterior afirma que L es la menor clase propia que es un modelo de ZF (o de ZFC, según veremos enseguida). Esto puede interpretarse como que al quedarnos con los conjuntos constructibles nos quedamos con los conjuntos imprescindibles para tener un modelo de la teoría de conjuntos. Más exactamente, habría que decir “los imprescindibles para tener un modelo con unos ordinales dados”. Tenemos modelos menores si nos quedamos con menos ordinales:

Teorema 3.15 *Si M es un modelo transitivo de $ZF-AP+V=L$, entonces $M=L$ si M es una clase propia o bien $M=L_\lambda$ con $\lambda=\Omega^M$ si M es un conjunto.*

Ha de quedar claro que L es ciertamente un modelo de $ZF(-AP)+V=L$, mientras que no todo conjunto L_λ tiene por qué serlo. De hecho ningún L_λ tiene por qué cumplir todos los axiomas de ZF. Lo que tenemos (por el teorema de reflexión) es que hay conjuntos L_λ que cumplen cualquier conjunto finito de axiomas de $ZF(-AP)+V=L$ prefijado.

Para probar que el axioma de constructibilidad implica el axioma de elección demostraremos de hecho que existe una fórmula explícita $x \preceq y$ con x e y como únicas variables libres que determina un buen orden sobre L .

En efecto, observemos que, para todo conjunto X , podemos definir explícitamente un buen orden en cada conjunto $\text{Df}(X, n)$. Por ejemplo, ordenamos $\text{Df}_0(X, n)$ estableciendo que las relaciones $\text{Diag}_\in(X, n, i, j)$ son todas menores que las relaciones $\text{Diag}_=(X, n, i, j)$ y, para comparar dos del mismo tipo, comparamos primero i y, en caso de coincidencia, comparamos j . Llamemos a este orden $\leq_{X, n, 0}$. Ciertamente es un buen orden. Supuesto definido un buen orden $\leq_{X, n, k}$ en $\text{Df}_k(X, n)$, definimos $\leq_{X, n, k+1}$ estableciendo que si $R, S \in \text{Df}_k(X, n)$ entonces $R \leq_{X, n, k+1} S$ si y sólo si $R \leq_{X, n, k} S$; que toda relación en $\text{Df}_k(X, n)$ es menor que toda relación en $\text{Df}_{k+1}(X, n) \setminus \text{Df}_k(X, n)$; que si tenemos dos relaciones en $\text{Df}_{k+1}(X, n) \setminus \text{Df}_k(X, n)$, será menor la que se pueda expresar como complemento de una relación de $\text{Df}_k(X, n)$, si las dos pueden expresarse así, será menor la que pueda expresarse como complemento de una relación menor respecto a $\leq_{X, n, k}$; si ninguna puede expresarse como complemento, será menor la que pueda expresarse como intersección de dos relaciones de $\text{Df}_k(X, n)$, si las dos pueden expresarse así, buscamos las mínimas relaciones respecto a $\leq_{X, n, k}$ que nos dan cada una de ellas como intersección y comparamos la menor para una con la menor para la otra, si son iguales comparamos las segundas; en caso de que ninguna de las relaciones dadas se pueda expresar como intersección, es que ambas son proyecciones de sendas relaciones en $\text{Df}_k(X, n+1)$, y en tal

caso buscamos la mínima posible para cada una y las comparamos con el orden $\leq_{X,n+1,k}$. Es claro que así tenemos un buen orden $\leq_{X,n,k+1}$ en $\text{Df}_{k+1}(X,n)$ respecto al cual $\text{Df}_k(X,n)$ es un segmento inicial. Uniendo todos estos buenos órdenes formamos un buen orden $\leq_{X,n}$ en $\text{Df}(X,n)$.

De este modo, $R \leq_{X,n} S$ es una fórmula con tan sólo las cuatro variables libres indicadas.

Por otra parte, un buen orden \leq en un conjunto X induce un buen orden \leq_ω en el conjunto $X^{<\omega}$ de todas las sucesiones finitas en X . Basta considerar que una sucesión es menor que otra si su longitud es menor y, en caso de tener la misma longitud, comparamos con \leq el primer elemento en el que difieran.

Ahora, si \leq es un buen orden en un conjunto transitivo X , definimos un buen orden \leq_X^* en $\mathcal{D}X$ del modo siguiente: dos conjuntos en X cumplen la relación \leq_X^* si y sólo si cumplen la relación dada \leq ; todo conjunto de X es \leq_X^* que todo conjunto de $\mathcal{D}X \setminus X$; si dos conjuntos están en $\mathcal{D}X \setminus X$, uno es menor que el otro si puede definirse con menos parámetros; si el mínimo número de parámetros es n para ambos, será menor el conjunto que pueda definirse con la menor relación de $\text{Df}(X,n)$ respecto al orden $\leq_{X,n}$; si ambos se definen con la misma mínima relación, será menor el que requiera la menor sucesión de parámetros respecto al orden \leq_ω en $X^{<\omega}$.

De este modo, $x \leq_X^* y$ es una fórmula con tan sólo las cuatro variables libres indicadas (x, y, X y \leq), y es claro que si \leq es un buen orden en un conjunto transitivo X entonces \leq_X^* es un buen orden en $\mathcal{D}X$ respecto al cual X es un segmento inicial.

Finalmente, definimos por recursión transfinita la sucesión \trianglelefteq_α mediante

$$\trianglelefteq_0 = \emptyset \wedge \bigwedge \alpha \quad \trianglelefteq_{\alpha+1} = \trianglelefteq_{\alpha L_\alpha}^* \wedge \bigwedge \lambda \quad \trianglelefteq_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \trianglelefteq_\delta .$$

$$\trianglelefteq = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \trianglelefteq_\alpha .$$

Una simple inducción muestra que cada \trianglelefteq_α es un buen orden en L_α de modo que cada $\trianglelefteq_{\alpha+1}$ extiende a \trianglelefteq_α y L_α es un segmento inicial de $L_{\alpha+1}$. Por consiguiente la clase \trianglelefteq es un buen orden de L y la fórmula $x \trianglelefteq y$ es una fórmula con x e y como únicas variables libres que determina un buen orden en L .

Si suponemos que $V = L$ tenemos un buen orden sobre la clase universal, que a su vez se restringe a un buen orden sobre cada conjunto. En definitiva, hemos probado:

Teorema 3.16 *La clase L es un modelo de ZFC–AP, o de todo ZFC si suponemos AP.*

Por consiguiente, si ZF es consistente, también lo es ZFC. En NBG podemos decir algo más fino: si NBG sin el axioma de elección es consistente, entonces también lo es NBG más el axioma de elección de Gödel, es decir, la existencia de una función de elección $F : V \longrightarrow V$. En efecto, si NBG sin el axioma de

elección es consistente, también lo es $\text{NBG}+V=L$, y entonces \trianglelefteq permite definir la función F . El axioma de elección de Gödel no puede formularse en ZF.

A menudo se critica al axioma de elección porque postula la existencia de conjuntos que no sabemos definir explícitamente. En ello hay gran parte de verdad, pero no es toda la verdad. Es cierto que no sabemos construir explícitamente, digamos, una base de \mathbb{R} como espacio vectorial sobre \mathbb{Q} , por lo que alguien podría sospechar que no existe tal cosa y que el axioma de elección nos lleva a creer en fantasmas. Ahora bien, un hipotético número real no constructible es algo no menos extraño que una hipotética base de \mathbb{R} sobre \mathbb{Q} , de modo que, puestos a descartar objetos extraños, podemos hacer dos cosas: o renunciamos al axioma de elección, con lo que no tenemos bases extrañas, pero indirectamente estamos postulando la existencia de extraños números reales no constructibles, o bien negamos la existencia de números reales no constructibles, en cuyo caso, no es que aceptemos indirectamente la existencia de bases extrañas, sino que podemos definir explícitamente una base, a través del orden constructible \trianglelefteq . La definición será complicada porque el orden constructible es complicado, pero no por ello deja de ser explícita. En cualquier caso, es verdad que no podría calificarse de “constructiva” en el sentido usual porque involucra una recursión transfinita.

En resumen podríamos decir que, para alguien que “viva” en L no hay conjuntos “grises” indistinguibles entre sí, sino que cada conjunto tiene alguna propiedad peculiar que lo distingue del resto, una o varias definiciones que nos proporcionan siempre criterios para escoger unos conjuntos frente a otros.

Aunque a partir de aquí trabajaremos ya en ZFC o NBG, lo cierto es que el teorema siguiente puede probarse sin el axioma de partes ni el axioma de elección:

Teorema 3.17 *Para todo ordinal infinito α , se cumple que $|L_\alpha| = |\alpha|$.*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos primero suponiendo $V=L$. En particular tenemos el axioma de elección. Ciertamente $|L_\omega| = |\omega|$, pues L_ω es unión numerable de conjuntos finitos. Una simple inducción basada en 3.8 f) nos da el resultado.

Sin suponer $V=L$ lo que tenemos es que el teorema se cumple relativizado a L , es decir,

$$(\bigwedge \alpha \bigvee f : \alpha \longrightarrow L_\alpha \text{ biyectiva})^L,$$

pero esto equivale a

$$\bigwedge \alpha \bigvee f \in L \ f : \alpha \longrightarrow L_\alpha \text{ biyectiva},$$

lo cual implica, en particular, que $|L_\alpha| = |\alpha|$. ■

Otro resultado notable que puede demostrarse sin necesidad del axioma de elección es la existencia de modelos transitivos numerables de ZFC. En efecto:

Teorema 3.18 *Si Γ es una colección finita de teoremas de $ZFC+V=L$, en ZF se demuestra que existe un conjunto transitivo numerable M (de hecho $M=L_\lambda$, para un ordinal numerable λ) tal que $M \models \Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN: Según 1.27, en $ZFC+V=L$ se demuestra que

$$\forall M (M \text{ transitivo} \wedge |M| = \aleph_0 \wedge M \models \Gamma).$$

Por otra parte, en ZF se demuestra que L cumple $ZFC+V=L$, luego también se demuestra la relativización a L de esta sentencia, es decir,

$$\forall M \in L (M \text{ transitivo} \wedge (|M| = \aleph_0)^L \wedge (M \models \Gamma)^L).$$

La fórmula $(|M| = \aleph_0)^L$ significa que $\forall f \in L f : \omega \rightarrow M$ biyectiva, luego en particular M es numerable. Por otra parte, $(M \models \Gamma)^L$ significa que para cada una de las sentencias γ de Γ se cumple $(\gamma^M)^L$, pero esta sentencia se obtiene acotando cada variable por $x \in M$ primero y por $x \in L$ después, y como $M \in L$, resulta que $x \in M$ ya implica $x \in L$, por lo que la relativización a L es redundante. En definitiva, $(\gamma^M)^L$ es equivalente a γ^M , por lo que tenemos que $M \models \gamma$.

El teorema anterior junto con 3.15 muestra que ha de ser $M=L_\lambda$, donde λ es un ordinal límite numerable. ■

3.3 Cardinales y constructibilidad

En esta sección trabajamos en NBG con el axioma de elección (o en ZFC) y vamos a estudiar las repercusiones del axioma de constructibilidad en el comportamiento de los cardinales. El resultado más importante será que $V=L$ implica la hipótesis del continuo generalizada, es decir, $\bigwedge \alpha 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Esto está de acuerdo con el carácter “minimal” del modelo constructible: si reducimos los conjuntos a los mínimos necesarios, $\mathcal{P}X$ tiene el mínimo cardinal posible.

Según ya hemos comentado, los subconjuntos constructibles de L_α no aparecen todos en $L_{\alpha+1}$, sino que éste sólo contiene los subconjuntos definibles con parámetros en L_α , mientras que en pasos posteriores pueden aparecer más subconjuntos definibles con parámetros más complejos. El teorema siguiente pone cota al número de pasos necesarios para obtener todos los subconjuntos de L_α . Recordemos que α^+ es el menor cardinal mayor que α .

Teorema 3.19 $[V=L] \bigwedge \alpha \mathcal{P}L_\alpha \subset L_{\alpha^+}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha < \omega$ es trivial, pues $\mathcal{P}L_\alpha = L_{\alpha+1}$. Supongamos, pues, que α es infinito. Tomemos $c \in \mathcal{P}L_\alpha$ y veamos que $c \in L_{\alpha^+}$. Llamemos $x = L_\alpha \cup \{c\}$. Observemos que x es transitivo. Vamos a refinar la prueba del teorema 1.27. Aplicando el teorema 1.24 a la jerarquía constructible obtenemos un ordinal límite λ tal que $x \subset L_\lambda$ y L_λ es un modelo de (cualquier colección finita prefijada de axiomas de) $ZFC+V=L$. Ahora sea S el núcleo de Skolem

de x en L_λ , que es un modelo no necesariamente transitivo de $ZFC+V=L$ y según 1.9 y 3.17 cumple $|S| = |x| = |L_\alpha| = |\alpha|$ (pues \mathcal{L}_0 es numerable). Siguiendo el argumento de 1.27, consideramos el colapso transitivo M de S . Sea $G: S \rightarrow M$ la función colapsante.

Una simple \in -inducción en x muestra que G es la identidad en x . En efecto, si $v \in x$ y se cumple $G(u) = u$ para todo $u \in v$, entonces, como $v \subset x \subset S$,

$$G(v) = \{G(u) \mid u \in v \cap S\} = \{G(u) \mid u \in v\} = v.$$

Por consiguiente $x \subset M$, y el particular $c \in M$. Por otra parte, M es un modelo isomorfo a S , luego M es un modelo transitivo de $ZFC+V=L$. Por el teorema 3.15 concluimos que $M = L_{\lambda'}$, para cierto ordinal límite λ' , pero $|\lambda'| = |L_{\lambda'}| = |M| = |S| = |\alpha|$, luego $\lambda' < \alpha^+$. Así pues, hemos probado que $c \in L_{\lambda'} \subset L_{\alpha^+}$. ■

Como consecuencia:

Teorema 3.20 $V = L \rightarrow \bigwedge \alpha \ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

DEMOSTRACIÓN: Por 3.17 sabemos que $|L_{\aleph_\alpha}| = \aleph_\alpha$, luego por el teorema anterior

$$2^{\aleph_\alpha} = |\mathcal{P}L_{\aleph_\alpha}| \leq |L_{\aleph_\alpha^+}| = \aleph_{\alpha+1}.$$

■

Una interpretación que ayudaría mucho a entender este hecho si no fuera errónea es la siguiente: en principio no sabemos cuántos números reales hay, eso depende de lo “generosa” que sea nuestra interpretación del término “conjunto”. Ahora bien, existen únicamente \aleph_1 números reales constructibles, de modo que si suponemos $V=L$ entonces el cardinal de \mathbb{R} resulta ser \aleph_1 .

En este razonamiento hay una falacia. Hemos demostrado que si $V=L$ entonces $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, pero esto no equivale a que (sin $V=L$) el cardinal de $\mathbb{R}^L = \mathbb{R} \cap L$ sea \aleph_1 . Lo que sabemos sin $V=L$ es que la sentencia $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ es verdadera en L , es decir, $(\forall f \ f: \aleph_1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ biyectiva})^L$, pero esto se traduce en que

$$\forall f \in L \ f: \aleph_1^L \rightarrow \mathbb{R} \cap L \text{ biyectiva,}$$

luego $|\mathbb{R} \cap L| = |\aleph_1^L|$. Ahora bien, ¿qué es \aleph_1^L ? Por definición \aleph_1 es el menor ordinal no numerable, luego \aleph_1^L es el menor ordinal no numerable^L, es decir, el menor ordinal no biyectable con ω mediante una biyección $f \in L$. Ciertamente, \aleph_1 no es biyectable con ω con ninguna biyección constructible o no, pero esto sólo prueba que $\aleph_1^L \leq \aleph_1$. Más adelante (teorema 4.35) demostraremos que es consistente que $\aleph_1^L < \aleph_1$, es decir, que el menor ordinal no numerable^L sea en realidad un ordinal numerable (sólo que todas las biyecciones de éste con ω son no constructibles, luego no las ve nadie que “viva” en L). En particular, hay a lo sumo \aleph_1 números reales constructibles, pero también es consistente que sólo haya \aleph_0 . En cualquier caso, alguien que “viva” en L verá \aleph_1 porque si se da este último caso, las biyecciones de \mathbb{R}^L con ω quedan fuera de su alcance.

Vamos a mostrar ahora que el axioma de constructibilidad es compatible con la existencia de cardinales inaccesibles. Recordemos ante todo que en [14.28] probamos que si κ es un cardinal fuertemente inaccesible entonces $V_\kappa \models \ulcorner ZFC \urcorner$. De hecho la prueba se simplifica enormemente con los resultados que conocemos ahora sobre modelos transitivos. Observemos ahora la estructura lógica de los conceptos relacionados con los cardinales:

Teorema 3.21 *Las fórmulas siguientes son Π_1^{ZFC} :*

- a) “ κ es un cardinal”,
- b) “ κ es regular”,
- c) “ κ es no numerable”,
- d) “ κ es un cardinal límite”,
- e) “ κ es un cardinal inaccesible”.

DEMOSTRACIÓN: Claramente:

$$\kappa \text{ es un cardinal} \leftrightarrow \kappa \in \Omega \wedge \neg \forall f \alpha (\alpha \in \kappa \wedge f : \alpha \longrightarrow \kappa \text{ biyectiva}),$$

$$\begin{aligned} \kappa \text{ es regular} \leftrightarrow \kappa \in K \wedge \bigwedge x \alpha f (x \subset \kappa \wedge \alpha \in \kappa \wedge f : \alpha \longrightarrow \kappa \text{ biyectiva} \\ \rightarrow \forall \beta \in \kappa \bigwedge \gamma \in x \gamma < \beta), \end{aligned}$$

$$\kappa \text{ es no numerable} \leftrightarrow \kappa \in K \wedge \neg \forall f \alpha (\alpha = \omega \wedge f : \kappa \longrightarrow \alpha \text{ inyectiva}),$$

$$\begin{aligned} \kappa \text{ es un cardinal límite} \leftrightarrow \kappa \in K \wedge \neg \forall F \mu (\mu < \kappa \wedge \\ \bigwedge \alpha \in \kappa \forall f \in F f : \alpha \longrightarrow \mu \text{ inyectiva}). \end{aligned}$$

Ser un cardinal inaccesible es la conjunción de las fórmulas anteriores, luego también es Π_1 . ■

Según la observación tras el teorema 1.36, si κ es un cardinal, entonces es un cardinal^L, si κ es regular, entonces es regular^L, etc., si bien los recíprocos no son necesariamente ciertos (aunque ahora no estamos en condiciones de probarlo). Ahora es evidente el teorema siguiente:

Teorema 3.22 *Si es consistente que exista un cardinal débilmente inaccesible, entonces es consistente $V = L$ más la existencia de un cardinal débilmente inaccesible, luego también es consistente la existencia de un cardinal fuertemente inaccesible.*

DEMOSTRACIÓN: Si suponemos que existe un cardinal débilmente inaccesible κ , entonces κ es inaccesible^L, por las observaciones precedentes, luego L es un modelo de $ZFC+V = L+\forall \kappa \kappa$ inaccesible, luego tenemos la prueba de consistencia del enunciado. La segunda parte se debe a que bajo el axioma de constructibilidad tenemos la hipótesis del continuo generalizada, luego los cardinales débilmente inaccesibles son también fuertemente inaccesibles. ■

El hecho de que si κ es fuertemente inaccesible entonces $V_\kappa \models \ulcorner ZFC \urcorner$ implica, junto con el segundo teorema de incompletitud de Gödel, que no es posible probar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles en ZFC (supuesto, naturalmente, que ZFC sea consistente). Más aún, tampoco es posible demostrar la consistencia de que existan tales cardinales, pues si pudiéramos demostrar

$$\text{Consis} \ulcorner ZFC \urcorner \rightarrow \text{Consis}(\ulcorner ZFC \urcorner + \text{FI}),$$

donde FI es la existencia de un cardinal fuertemente inaccesible, entonces, dado que en ZFC+FI se demuestra $\text{Consis} \ulcorner ZFC \urcorner$, en ZFC+FI podríamos demostrar $\text{Consis}(\ulcorner ZFC \urcorner + \text{FI})$ y el segundo teorema de incompletitud nos daría que ZFC+FI sería contradictorio (luego también ZFC).

El teorema anterior nos da una prueba indirecta de que tampoco podemos demostrar la consistencia de que existan cardinales débilmente inaccesibles a partir de la consistencia de ZFC, no obstante, podemos obtener argumentos directos.

Teorema 3.23 *Si $V = L$ y κ es un cardinal inaccesible, entonces $V_\kappa = L_\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos en general que $L_\kappa \subset V_\kappa$. Si no se diera la inclusión contraria, podríamos tomar un \in -minimal de $V_\kappa \setminus L_\kappa$, es decir, $x \in V_\kappa \setminus L_\kappa$ pero $x \cap (V_\kappa \setminus L_\kappa) = \emptyset$. Como $x \subset V_\kappa$, de hecho $x \subset L_\kappa$.

Por [14.27] tenemos que $|x| < \kappa$, luego la aplicación que a cada $u \in x$ le asigna el mínimo $\alpha < \kappa$ tal que $u \in L_\alpha$ está acotada en κ , es decir, existe un $\delta < \kappa$ tal que $x \subset L_\delta$. Pero entonces 3.19 nos da que $x \in L_{\delta^+} \subset L_\kappa$, contradicción. ■

Así pues, razonando en ZFC, si κ es un cardinal débilmente inaccesible, se cumple que κ es fuertemente inaccesible^L, luego $(V_\kappa \models \ulcorner ZFC \urcorner)^L$, y por el teorema anterior esto es lo mismo que $(L_\kappa \models \ulcorner ZFC \urcorner)^L$. Podemos suponer que $\mathcal{L}_0 \in L$, con lo que el carácter absoluto de la relación \models (y el de $\ulcorner ZFC \urcorner$) nos da el teorema siguiente:

Teorema 3.24 [ZFC] *Si κ es un cardinal débilmente inaccesible entonces*

$$L_\kappa \models \ulcorner ZFC \urcorner.$$

Esto permite adaptar todos los razonamientos anteriores sobre cardinales fuertemente inaccesibles al caso de los cardinales débilmente inaccesibles sin más que sustituir V_κ por L_κ .

3.4 Constructibilidad relativa

En [12.31] definimos la jerarquía regular relativa a un conjunto arbitrario X y en el capítulo anterior hemos usado los modelos $R(A)$, donde A es el conjunto de todos los átomos para mostrar la independencia del axioma de elección (supuesta la existencia de átomos). Ahora definiremos la noción de constructibilidad relativa a un conjunto arbitrario X , y en el capítulo VI la usaremos para

construir un modelo de ZF (sin átomos) en el que no se cumplirá el axioma de elección. La definición es completamente análoga a la de la regularidad relativa.

Definición 3.25 Dado un conjunto X , definimos la clase $L(X)$ de los conjuntos constructibles sobre X mediante la siguiente recursión transfinita:

$$L_0(X) = \text{ct } X, \quad \bigwedge \alpha L_{\alpha+1}(X) = \mathcal{D}L_\alpha(X), \quad \bigwedge \lambda L_\lambda(X) = \bigcup_{\delta < \lambda} L_\delta(X),$$

$$L(X) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} L_\alpha(X).$$

Es importante no confundir la clase $L(X)$ así definida con la clase $L[X]$ que introduciremos en el capítulo XIII. Los teoremas básicos sobre la constructibilidad relativa se demuestran exactamente igual que los correspondientes a la constructibilidad absoluta, así que no repetiremos las pruebas. Por ejemplo, el teorema siguiente se prueba (en ZF–AP) exactamente igual que 3.11:

Teorema 3.26 *Sea X un conjunto. Entonces:*

- a) *Cada $L_\alpha(X)$ es un conjunto transitivo.*
- b) *$L(X)$ es una clase transitiva.*
- c) *Si $\alpha \leq \beta$ entonces $L_\alpha(X) \subset L_\beta(X)$.*
- d) *$L_\alpha \subset L_\alpha(X) \subset V_\alpha(X)$.*
- e) *$L \subset L(X)$.*
- f) *Si $x \subset L_\alpha(X)$ es finito, entonces $x \in L_{\alpha+1}(X)$.*
- g) *$L_\alpha(X) \in L_{\alpha+1}(X)$.*
- h) *$X \in L(X)$.*

No es cierto en general que $L_\alpha(X) \cap \Omega = \alpha$, pues si X contiene ordinales éstos aparecerán “antes de tiempo” en la jerarquía (están desde el principio), pero en cualquier caso $\Omega \subset L \subset L(X)$.

El teorema siguiente se prueba exactamente igual que 3.12:

Teorema 3.27 *Si X es un conjunto, la clase $L(X)$ es un modelo transitivo de ZF–AP, o de todo ZF si suponemos AP.*

Igualmente se prueba que el término $L_\alpha(X)$ es absoluto para modelos transitivos de ZF–AP. El teorema 3.14 queda ahora así:

Teorema 3.28 *Sea X un conjunto y M un modelo transitivo de ZF–AP tal que $X \in M$. Entonces*

- a) *Si M es una clase propia entonces $L(X) \subset M$ y*

$$\bigwedge x \in M (x \in L(X)^M \leftrightarrow x \in L(X)).$$

b) Si M es un conjunto y $\lambda = \Omega^M$, entonces $L_\lambda(X) \subset M$ y

$$\bigwedge x \in M (x \in L(X)^M \leftrightarrow x \in L_\lambda(X)).$$

En particular, $L(X)$ es la menor clase propia que contiene a X y es un modelo de ZF–AP. Del teorema se sigue también que $(V = L(X))^{L(X)}$. Supongamos ahora el axioma de partes y observemos que

$$(V = L(\mathcal{P}\omega))^{L(\mathcal{P}\omega)},$$

si bien esto no es consecuencia inmediata de la observación precedente. En efecto, si llamamos $\phi(X) \equiv V = L(X)$ y $X = \mathcal{P}\omega$, lo que sabemos es que $(V = L(X))^{L(\mathcal{P}\omega)}$, es decir, $\phi^{L(\mathcal{P}\omega)}(\mathcal{P}\omega)$, mientras que lo que queremos probar es

$$\phi(\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{P}\omega)} \equiv \phi^{L(\mathcal{P}\omega)}((\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{P}\omega)}).$$

Por consiguiente, nos falta demostrar que $\mathcal{P}\omega = (\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{P}\omega)}$. Ahora bien, esto es fácil:

$$(\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{P}\omega)} = \mathcal{P}\omega \cap L(\mathcal{P}\omega) = \mathcal{P}\omega.$$

Si el lector todavía no ve por qué era necesaria esta comprobación tal vez le ayude pensarlo así: sabíamos que alguien que “viva” en $L(\mathcal{P}\omega)$ “creerá” que $V = L(X)$, pero faltaba comprobar que al ver el conjunto $X = \mathcal{P}\omega$ “sabe” que está viendo el conjunto $\mathcal{P}\omega$. Con esto hemos probado:

Teorema 3.29 [ZF] $L(\mathcal{P}\omega)$ es un modelo transitivo de ZF+ $V = L(\mathcal{P}\omega)$.

Ejercicio: Probar que $L = L(X)$ si y sólo si $X \in L$.

En general no puede probarse que $L(X)$ cumpla el axioma de elección ni siquiera suponiendo este axioma. Esto lo demostraremos en 6.13, pero ahora vamos a entender cuál es el problema.

Teorema 3.30 Si X es un conjunto, entonces la clase $L(X)$ cumple el axioma de elección si y sólo si $\text{ct } X$ tiene un buen \leq tal que $\leq \in L(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que $L(X)$ es un modelo de ZF–AP+ $V = L(X)$, podemos trabajar en esta teoría y demostrar que el axioma de elección equivale a que $\text{ct } X$ pueda ser bien ordenada. Con más detalle, si suponiendo $V = L(X)$ demostramos que

$$AE \leftrightarrow \bigvee R R \text{ es un buen orden en } \text{ct } X,$$

en ZF–AP podremos demostrar la relativización de este teorema a $L(X)$, es decir,

$$AE^{L(X)} \leftrightarrow \bigvee R \in L(X) R \text{ es un buen orden en } \text{ct } X,$$

donde hemos usado que “ser un buen orden” y $\text{ct } X$ son absolutos.

Una implicación es obvia. Supongamos ahora que $\text{ct } X$ admite un buen orden \leq y veamos que todo conjunto puede ser bien ordenado. Para ello basta definir

$$\leq_0 = \leq \wedge \bigwedge \alpha \leq_{\alpha+1} = \leq_{\alpha}^* \wedge \bigwedge \lambda \leq_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \leq_\delta .$$

$$\leq = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \leq_\alpha .$$

Una simple inducción transfinita muestra que \leq es un buen orden sobre V , que se restringe a un buen orden sobre cada conjunto. ■

Vemos, pues, que si suponemos el axioma de elección, lo máximo que podemos probar es que $\text{ct } X$ puede ser bien ordenada, pero eso no garantiza que $L(X)$ cumpla el axioma de elección, pues para ello hace falta que algún buen orden de $\text{ct } X$ esté en $L(X)$ (si no, alguien que “viva” en $L(X)$ se creará que X no puede ser bien ordenado, porque él no verá ninguno de sus buenos órdenes, por más que éstos existan fuera de $L(X)$).

Ejercicio: Probar que en $L(\mathcal{P}\omega)$ todo conjunto puede ser totalmente ordenado. Partir de un orden total en $\mathcal{P}\omega$ obtenido a partir de una inyección de $\mathcal{P}\omega$ en \mathbb{R} .

Hay un caso de especial interés en el que podemos garantizar que $L(X)$ cumple el axioma de elección, y es cuando X es un conjunto de ordinales:

Teorema 3.31 *Si X es un conjunto de ordinales entonces $L(X)$ es un modelo transitivo de ZF–AP (o de todo ZF si suponemos AP).*

DEMOSTRACIÓN: Razonamos en $\text{ZF–AP}+V = L(X)$ y observamos que si $X \subset \Omega$ entonces $\text{ct } X \subset \Omega$, y el buen orden de Ω se restringe a un buen orden en X . ■

Capítulo IV

Extensiones genéricas

Según sabemos, la hipótesis del continuo es indecidible a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos, si bien hasta ahora sólo hemos demostrado la mitad de esta afirmación. Hemos probado que es irrefutable, y nos falta probar que es indemostrable. Puesto que el axioma de constructibilidad implica la hipótesis generalizada del continuo, un modelo en el que se cumpla algo como $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ cumplirá necesariamente $V \neq L$. Esto ya nos impone ciertas restricciones a priori sobre el modo en que podremos construir tal modelo. Es imposible demostrar en NBG la existencia de una clase propia M que sea un modelo transitivo de ZFC y tal que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, pues según las observaciones previas y el teorema 3.14 concluiríamos entonces que $L \subsetneq M \subset V$. En definitiva, habríamos demostrado que $V \neq L$, y esto es imposible (salvo que NBG sea contradictoria, claro).

Por otro lado, nada de esto indica que no podamos encontrar un modelo transitivo N de $\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ que sea un conjunto. En tal caso, lo único que sucedería es que $L_{\Omega^N} \subsetneq N$, lo cual no contradice que N pueda estar contenido en L y, en particular, la posibilidad de que $V = L$.

En este capítulo nos centraremos en la construcción de un modelo N en estas condiciones, si bien, como veremos en los capítulos posteriores, la técnica que emplearemos es muy potente, y nos permitirá, de hecho, construir modelos “a medida” que satisfagan las propiedades más variadas. Se trata de la técnica de las extensiones genéricas (más conocida por “forcing”) descubierta por P. Cohen.

4.1 Conjuntos preordenados

Profundizando un poco más en la línea que acabamos de esbozar, la teoría de extensiones genéricas nos permite partir de un modelo transitivo M de ZFC (preferentemente numerable) y construir otro modelo N tal que $M \subsetneq N$ pero $\Omega^M = \Omega^N$. Si llamamos λ a este ordinal, lo que tendremos entonces es que $L_\lambda \subset M \subsetneq N$, con lo que N será un modelo donde $V \neq L$. Más aún, todos los conjuntos que habremos añadido a M para pasar a N serán no constructibles en N . La enorme potencia de esta teoría reside en que las propiedades de la

extensión N estarán completamente determinadas por M en el sentido de que alguien que “viva” en M estará en condiciones de determinar qué pasa en N aunque no “vea” buena parte de los conjuntos de N .

Para motivar las definiciones básicas desarrollaremos un ejemplo concreto a la par de la teoría general. Supongamos que M es un modelo transitivo numerable de ZFC y vamos a construir un modelo N con los mismos ordinales y que contenga un conjunto $A \subset \omega$ que no esté en M . En lugar de trabajar con A conviene considerar su función característica $\chi_A : \omega \rightarrow 2$.

Nota Observemos que si N es un modelo transitivo de ZF, entonces $A \in N$ si y sólo si $\chi_A \in N$. Destacamos esto porque el razonamiento que lo prueba es completamente estándar y en lo sucesivo lo emplearemos sin más aclaración:

Formalmente, para una implicación basta observar que el término χ_A es absoluto para modelos transitivos de ZF. En efecto, relativizamos la sentencia

$$\bigwedge A (A \subset \omega \rightarrow \chi_A : \omega \rightarrow 2 \wedge \bigwedge n \in \omega (\chi_A(n) = 1 \leftrightarrow n \in A)),$$

lo que nos da

$$\bigwedge A \in N (A \subset \omega \rightarrow \chi_A^N : \omega \rightarrow 2 \wedge \bigwedge n \in \omega (\chi_A^N(n) = 1 \leftrightarrow n \in A)),$$

de donde se sigue que si $A \in N$ y $A \subset \omega$ entonces $\chi_A = \chi_A^N \in N$.

El recíproco se prueba igualmente usando ahora que $A = \chi_A^{-1}[\{1\}]$ y que el término $f^{-1}[\{0\}]$ es absoluto para modelos transitivos de ZF.

En general, cuando queremos probar que si unos conjuntos x_1, \dots, x_n están en un modelo N otro conjunto x construido a partir de ellos también lo está, lo que hemos de hacer es escribir explícitamente la fórmula que determina x a partir de los conjuntos dados, relativizarla a M y comprobar que la relativización determina el mismo conjunto x .

En la práctica, si uno está suficientemente familiarizado con los modelos transitivos piensa simplemente que alguien que en un modelo N pueda ver un conjunto A , tiene que ver necesariamente χ_A , porque tiene suficientes datos como para “no equivocarse” al calcular χ_A . Ésto puede parecer ambiguo, pero la clave está en que “suficientes datos” siempre significa lo mismo: no hay —en principio— suficientes datos para calcular algo exactamente cuando el cálculo involucra conjuntos externos al modelo M , lo cual sucede habitualmente porque involucra subconjuntos arbitrarios de algún elemento de M , pues alguien que “viva” en un modelo tiene a su alcance todos los elementos de cualquiera de ellos, pero no todos sus subconjuntos. Más adelante comentaremos otros ejemplos. ■

Así pues, nuestro problema es construir un modelo N que contenga una función $f : \omega \rightarrow 2$ que no esté en M , con lo cual habremos añadido el conjunto $A = f^{-1}[\{1\}]$. La ventaja de este planteamiento es que va a ser crucial que desde M se pueda hablar de lo que sucede en N , en particular del conjunto A y de qué números naturales están y cuáles no están en A . Para ello es más útil la

función característica f porque nos permite considerar aproximaciones finitas. Definimos

$$\mathbb{P} = \{p \mid p \subset \omega \times 2 \wedge p \text{ es una función } \wedge p \text{ es finito}\}.$$

Se cumple¹ que $\mathbb{P} \in M$. A sus elementos los llamaremos *condiciones*. La idea básica es que si nosotros vivimos en M pero sabemos de la existencia del modelo N que aún no hemos construido, no podremos ver la función f , pero podremos especular sobre las consecuencias que tendría que una condición dada p estuviera contenida en f . Si llamamos “verdaderas” a las condiciones contenidas en f , podremos decir, por ejemplo, que si la condición $p = \{(3, 0), (8, 1)\}$ es verdadera entonces $f(3) = 0$ y $f(8) = 1$ (o, equivalentemente, que $3 \notin A$ y $8 \in A$). Esto es informal. En la práctica habremos de definir de algún modo la noción de “condición verdadera” y a partir de ésta definir f .

Conviene pensar en términos probabilísticos: si estamos en M y, por consiguiente, no tenemos ningún criterio para determinar qué condiciones son verdaderas o falsas (porque no podemos ver f) será razonable afirmar que cuanto más información proporcione una condición menos probable será. Por ello conviene escribir $p \leq q$ para indicar que $q \subset p$. La inversión del orden se debe, según esto, a que $p \leq q$ no significa “ p es más pequeño que q ”, sino “ p es menos probable que q ”. El conjunto vacío es trivialmente una condición, y es la única de la que podemos asegurar que es verdadera con probabilidad 1. Por ello la representaremos por $\mathbf{1}$. Ya tenemos suficientes ideas para motivar las primeras definiciones:

Definición 4.1 Un *conjunto preordenado con máximo* es una terna $(\mathbb{P}, \leq, \mathbf{1})$ tal que \leq es una relación reflexiva y transitiva en el conjunto \mathbb{P} y $\mathbf{1} \in \mathbb{P}$ cumple que $\bigwedge p \in \mathbb{P} p \leq \mathbf{1}$. A los elementos de \mathbb{P} los llamaremos *condiciones*. Cuando dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$ cumplen $p \leq q$ se dice que la condición p *extiende* a la condición q .

No exigimos que la relación sea antisimétrica porque en ningún momento nos ayudaría en nada esta exigencia y en algunas construcciones más avanzadas es útil técnicamente no tener que garantizarla. En lo sucesivo, cuando hablemos de un conjunto preordenado \mathbb{P} (abreviadamente, c.p.o.) se sobrentenderá que es un conjunto preordenado con máximo en el sentido de la definición anterior.

Si \mathbb{P} es un c.p.o., diremos que dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$ son *compatibles* si tienen una extensión común, es decir, si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. En caso contrario diremos que son *incompatibles* y lo representaremos por $p \perp q$.

En nuestro ejemplo, en el que \mathbb{P} es el conjunto de funciones parciales finitas de ω en 2 , vemos que dos condiciones p y q son compatibles si y sólo si coinciden en su dominio común, en cuyo caso $p \cup q$ es una extensión común. Por el contrario, son incompatibles si asignan imágenes distintas a un mismo número. De este modo, dos condiciones incompatibles no pueden ser ambas verdaderas.

¹Porque el término \mathbb{P} es absoluto para modelos transitivos de ZF, como se comprueba relativizando la fórmula $\bigwedge p(p \in \mathbb{P} \leftrightarrow \dots)$

Un *filtro* en un c.p.o. \mathbb{P} es un conjunto $G \subset \mathbb{P}$ tal que

- a) $\mathbf{1} \in G$,
- b) $\bigwedge p \in G \bigwedge q \in \mathbb{P} (p \leq q \rightarrow q \in G)$,
- c) $\bigwedge pq \in G \bigvee r \in G (r \leq p \wedge r \leq q)$.

En nuestro ejemplo, el conjunto

$$G = \{p \in \mathbb{P} \mid p \subset f\}$$

de todas las condiciones verdaderas es un filtro de \mathbb{P} , de modo que las propiedades que definen los filtros pueden pensarse así: “la condición $\mathbf{1}$ es verdadera, toda condición que tiene una extensión verdadera es verdadera y dos condiciones verdaderas tienen una extensión verdadera”. En la práctica usaremos un filtro G para definir la función f como

$$f = \bigcup_{p \in G} p.$$

Ahora bien, no todo filtro en \mathbb{P} define de este modo una función $f : \omega \rightarrow 2$. Basta pensar en $G = \{\mathbf{1}\}$. Para garantizar que un filtro define una función le exigiremos una propiedad muy fuerte que, de hecho, nos permitirá construir el modelo de ZFC que estamos buscando.

Definición 4.2 Si \mathbb{P} es un c.p.o., un conjunto $D \subset \mathbb{P}$ es *denso* en \mathbb{P} si toda condición de \mathbb{P} tiene una extensión en D , es decir, si $\bigwedge p \in \mathbb{P} \bigvee q \in D q \leq p$.

Un filtro G en \mathbb{P} es *\mathbb{P} -genérico* sobre un conjunto M si G corta a todo conjunto denso en \mathbb{P} que pertenezca a M .

En nuestro ejemplo, el conjunto

$$A = \{p \in \mathbb{P} \mid (3, 0) \in p\}$$

no es denso en \mathbb{P} , pues la condición $q = \{(3, 1), (2, 0)\}$ no tiene una extensión en A , mientras que el conjunto

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee n \in \omega (n, 0) \in p\}$$

sí que es denso en \mathbb{P} . Otros ejemplos de conjuntos densos son el conjunto de condiciones con un n dado en su dominio, o el conjunto de condiciones que toman los valores 0, 1, 1 sobre tres naturales consecutivos, o el conjunto de las condiciones que coinciden en un intervalo de números naturales con una codificación binaria del “Quijote”.

La definición de filtro genérico está relativizada a un conjunto M porque en general no existen filtros genéricos absolutos (es decir, filtros que corten a todo conjunto denso), pero el teorema siguiente bastará para nuestros fines:

Teorema 4.3 Si \mathbb{P} es un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y M es un conjunto numerable, entonces existe un filtro G \mathbb{P} -genérico sobre M tal que $p \in G$.

DEMOSTRACIÓN: El conjunto M contiene a lo sumo una cantidad numerable de subconjuntos densos en \mathbb{P} . Digamos que son $\{D_n\}_{n \in \omega}$. (Si no hubiera ninguno o hubiera un número finito completamos la sucesión con otros cualesquiera, admitiendo repeticiones.)

Definimos $p_0 = p$ y, supuesto definido p_n , tomamos $p_{n+1} \in D_n$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$. Ahora basta definir

$$G = \{q \in \mathbb{P} \mid \forall n \in \omega \ p_n \leq q\}.$$

Es inmediato comprobar que G es un filtro en \mathbb{P} que contiene a p y, como $p_n \in G \cap D_n$, es claramente \mathbb{P} -genérico sobre M . ■

Ahora ya podemos plantear nuestro ejemplo en un orden lógico: Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC, consideramos el c.p.o. $\mathbb{P} \in M$ de las funciones finitas parciales de ω en 2 y tomamos un filtro G \mathbb{P} -genérico sobre M . Definimos

$$f = \bigcup_{p \in G} p.$$

Ahora es fácil probar que $f : \omega \rightarrow 2$. El hecho de que las condiciones de G sean compatibles dos a dos prueba que f es una función. Para cada $n \in \omega$, el conjunto

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall i \in 2 \ (n, i) \in p\} \in M$$

y es denso en \mathbb{P} . En efecto, la densidad es clara y D_n está en M porque la definición es absoluta:

$$\bigwedge n (n \in \omega \wedge p \in \mathbb{P} \rightarrow (p \in D_n \leftrightarrow \forall i \in 2 \ (n, i) \in p)).$$

Al relativizar queda:

$$\bigwedge n (n \in \omega \wedge p \in \mathbb{P} \rightarrow (p \in D_n^M \leftrightarrow \forall i \in 2 \ (n, i) \in p)),$$

luego $D_n = D_n^M \in M$. Por consiguiente, existe $p \in G \cap D_n$, de donde se sigue que n está en el dominio de f .

En general, los objetos construidos a partir de filtros genéricos como acabamos de hacer con f a partir de G se llaman también “genéricos”. Así, f es una función genérica de ω en 2 y $A = f^{-1}[\{1\}]$ es un subconjunto genérico de ω . La idea básica es que la función genérica f cumple cualquier propiedad que no se pueda refutar con una condición particular. Por ejemplo, no podemos asegurar que $f(5) = 1$, pues la condición $p = \{(5, 0)\}$ lo refuta, en el sentido de que si $p \in G$ necesariamente $f(5) = 0$ (y siempre podemos tomar un filtro G que contenga a p). Por el contrario, sí que podemos asegurar que f toma el valor 1 en algún número natural, pues ninguna condición puede refutar esto (lo cual es otra forma de decir que el conjunto de las condiciones p que fuerzan $\forall n \in \omega \ f(n) = 1$ —en el sentido de que $p \in G$ implica esto— es denso en \mathbb{P}). Del mismo modo puede probarse que la función f toma el valor 1 siete veces seguidas y que, en un cierto intervalo, contiene una codificación binaria del “Quijote”. Nuestro objetivo es demostrar que existe un modelo transitivo numerable N de ZFC tal que $M \subset N$ y $G \in N$, de modo que también $f \in N$ y $A = f^{-1}[\{1\}] \in N$. En primer lugar probaremos que esto garantiza que $N \neq M$.

Definición 4.4 Si \mathbb{P} es un c.p.o. y $p \in \mathbb{P}$, diremos que p es un *átomo* si

$$\neg \forall qr \in \mathbb{P} (q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r).$$

Diremos que \mathbb{P} es *no atómico* si no tiene átomos, es decir, si toda condición tiene extensiones incompatibles.

El claro que el preorden del ejemplo que estamos considerando es no atómico.

Teorema 4.5 Si M es un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. no atómico y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M entonces $G \notin M$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathbb{P} \in M$, entonces $D = \mathbb{P} \setminus G \in M$ y es un conjunto denso en \mathbb{P} . En efecto, dada $p \in \mathbb{P}$, existen dos extensiones incompatibles q y r , de las cuales una al menos no puede estar en G , digamos q , con lo que $q \leq p \wedge q \in D$. Por definición de filtro genérico debería ser $G \cap D \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. ■

La versión absoluta de este teorema afirma simplemente que no existen filtros genéricos sobre un c.p.o. no atómico. En el caso de nuestro ejemplo, si existiera un filtro G que cortara a todos los subconjuntos densos de \mathbb{P} , éste generaría una función genérica $f : \omega \rightarrow 2$ que debería ser distinta de todas las funciones de ω en 2. En efecto, si $g : \omega \rightarrow 2$ es arbitraria el conjunto

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall n \in \text{Dominio de } p \ p(n) \neq f(n)\}$$

es denso en \mathbb{P} , luego existe $p \in G \cap D$, luego $\forall n \in \omega \ p(n) \neq f(n)$, luego $f \neq g$.

Si particularizamos este razonamiento a un modelo M obtenemos un argumento directo en virtud del cual una función genérica sobre M ha de ser diferente de todas las funciones de M .

Terminamos la sección con algunos resultados útiles sobre los conceptos que hemos introducido. En primer lugar vemos que la definición de filtro genérico puede debilitarse:

Teorema 4.6 Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y $G \subset \mathbb{P}$. Entonces G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M si y sólo si cumple

- a) $\bigwedge pq \in G \ \neg p \perp q$,
- b) $\bigwedge p \in G \bigwedge q \in \mathbb{P} (p \leq q \rightarrow q \in G)$,
- c) $\bigwedge D \in M (D \text{ es denso en } \mathbb{P} \rightarrow G \cap D \neq \emptyset)$.

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathbb{P} \in M$ es denso en \mathbb{P} , la condición c) implica que G es no vacío, y entonces b) implica que $\mathbf{1} \in G$. Sólo falta probar que

$$\bigwedge pq \in G \bigvee r \in G (r \leq p \wedge r \leq q).$$

Lo que sabemos por a) es $\bigwedge pq \in G \bigvee r \in \mathbb{P} (r \leq p \wedge r \leq q)$. Tomemos dos condiciones $p, q \in G$ y sea $D = \{r \in \mathbb{P} \mid r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leq p \wedge r \leq q)\}$. Es fácil ver que $D = D^M \in M$ y es denso en \mathbb{P} , pues si $t \in \mathbb{P}$, o bien $t \perp p$, en

cuyo caso $t \in D$, o bien existe una condición $s \leq t \wedge s \leq p$. En este caso, o bien $s \perp q$, con lo que $s \in D \wedge s \leq t$, o bien existe una condición $u \leq s \wedge u \leq q$, con lo que $u \leq t \wedge u \in D$. En cualquier caso concluimos que t tiene una extensión en D .

Por c) concluimos que $G \cap D \neq \emptyset$, pero un $r \in G \cap D$ no puede cumplir ni $r \perp p$ ni $r \perp q$, por la condición a), luego $r \leq p \wedge r \leq q$. ■

Por otra parte, vamos a ver que un filtro genérico cumple un poco más de lo que indica la definición:

Definición 4.7 Si \mathbb{P} es un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y $E \subset \mathbb{P}$, diremos que E es *denso bajo* p si $\bigwedge q \in \mathbb{P}(q \leq p \rightarrow \bigvee r \in E r \leq q)$.

Teorema 4.8 Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea $E \in M$ un subconjunto de \mathbb{P} y G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces

- a) O bien $G \cap E \neq \emptyset$, o bien $\bigvee q \in G \bigwedge r \in E r \perp q$.
- b) Si $p \in G$ y E es denso bajo p , entonces $G \cap E \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN: a) Consideremos el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid (\bigvee r \in E q \leq r) \vee (\bigwedge r \in E r \perp q)\} \in M.$$

Ciertamente D es denso en \mathbb{P} , pues si $q \in \mathbb{P}$ y $q \notin D$, entonces $\bigvee r \in E \neg r \perp q$, luego $\bigvee p \in \mathbb{P}(p \leq r \wedge p \leq q)$ y, como $r \in E \wedge p \leq r$, tenemos que $\bigvee p \in D p \leq q$. Por consiguiente $G \cap D \neq \emptyset$, luego $\bigvee q \in G((\bigvee r \in E q \leq r) \vee (\bigwedge r \in E r \perp q))$. De aquí se sigue $\bigvee r \in G \cap E \vee \bigvee q \in G \bigwedge r \in E r \perp q$.

b) Si $G \cap E = \emptyset$, por a) tenemos que existe $q \in G$ tal que $\bigwedge r \in E r \perp q$. Sea $q' \in G$ tal que $q' \leq p \wedge q' \leq q$. Como E es denso bajo p , existe una condición $r \in E$ tal que $r \leq q' \leq q$, luego $\neg r \perp q$, contradicción. ■

Como consecuencia obtenemos que los filtros genéricos cumplen una condición de maximalidad:

Teorema 4.9 Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea G_1 un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y sea G_2 un filtro en \mathbb{P} tal que $G_1 \subset G_2$. Entonces $G_1 = G_2$.

DEMOSTRACIÓN: Si existiera una condición $p \in G_2 \setminus G_1$, como $G_1 \cap \{p\} = \emptyset$, el teorema anterior nos da que existe $q \in G_1$ tal que $p \perp q$, pero p y q están ambos en G_2 , luego no pueden ser incompatibles. ■

4.2 El modelo genérico

Ahora estamos en condiciones de extender un modelo transitivo M (en principio numerable) a un modelo N que contenga a un filtro genérico prefijado. Lo que no será fácil es demostrar que N es ciertamente un modelo. Parte de la

prueba tendrá que esperar a la sección siguiente. La construcción se basa en el concepto siguiente. Recordemos que una relación no es más que un conjunto de pares ordenados.

Definición 4.10 Si \mathbb{P} es un c.p.o., diremos que un conjunto σ es un \mathbb{P} -nombre si σ es una relación y

$$(\tau, p) \in \sigma \rightarrow p \in \mathbb{P} \wedge \tau \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre.}$$

Esta definición está justificada por el principio de \in -recursión [12.26]: definimos la función característica $H : V \rightarrow 2$ de la clase de los \mathbb{P} -nombres sobre un conjunto σ supuesto que H ya está definida sobre la clausura transitiva de σ , de modo que

$$H(\sigma) = 1 \leftrightarrow \bigwedge x \in \sigma \bigvee \tau p (p \in \mathbb{P} \wedge \tau \in \text{ct } \sigma \wedge x = (\tau, p) \wedge H(\tau) = 1).$$

Así pues, un \mathbb{P} -nombre es un conjunto de pares ordenados cuyas primeras componentes son otros \mathbb{P} -nombres y sus segundas componentes son condiciones. Por ejemplo, es inmediato que $\sigma = \emptyset$ es un \mathbb{P} -nombre. Si p y q son condiciones, entonces $\tau = \{(\emptyset, p), (\emptyset, q)\}$ es otro \mathbb{P} -nombre, como también lo es $\{(\emptyset, \mathbf{1}), (\tau, p), (\tau, q)\}$, etc.

Llamaremos $V^{\mathbb{P}}$ a la clase de todos los \mathbb{P} -nombres. No es difícil ver que es una clase propia. De todos modos pronto será evidente. Una simple \in -inducción demuestra que la fórmula “ σ es un \mathbb{P} -nombre” es absoluta para modelos transitivos de ZF. Si M es un modelo transitivo de ZF, llamaremos $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M$, es decir, a la clase de los \mathbb{P} -nombres que “ve” alguien que “viva” en M .

La idea subyacente a todo esto es que un \mathbb{P} -nombre (en un modelo M) es una descripción parcial de un conjunto de la extensión N que pretendemos construir. Es parcial porque el precio que hemos de pagar por que sea accesible desde M es sustituir el conocimiento exacto de los elementos del conjunto por un conocimiento probabilístico. Esto se entenderá mejor tras la definición siguiente:

Definición 4.11 Sea \mathbb{P} un c.p.o. y G un filtro en \mathbb{P} . Definimos el *valor* de un \mathbb{P} -nombre σ respecto de G como

$$\text{val}(\sigma, G) = \sigma_G = \{\tau_G \mid \bigvee p \in G (\tau, p) \in \sigma\}.$$

De nuevo esta definición ha de entenderse por \in -recursión. También es fácil ver que σ_G es absoluto para modelos transitivos de ZF.

Por ejemplo, es inmediato que $\emptyset_G = \emptyset$. Si $\sigma = \{(\emptyset, p)\}$, entonces

$$\sigma_G = \begin{cases} \emptyset & \text{si } p \notin G, \\ \{\emptyset\} & \text{si } p \in G. \end{cases}$$

En general, cuando un par (τ, p) está en un nombre σ , podemos pensar que la condición p indica la “probabilidad” de que el valor de τ pertenezca al valor de σ . Alguien que no conozca G , no podrá saber si $\tau_G \in \sigma_G$, pero sabrá que

esto sucede si $p \in G$. Notemos que no podemos decir “si y sólo si”, pues en principio σ podría contener otro par (τ, q) , con lo que para que $\tau_G \in \sigma_G$ no es necesario que $p \in G$. Bastaría también con que $q \in G$. Más aún, puede ocurrir que σ contenga otro par (ρ, r) de modo que $\rho_G = \sigma_G$, con lo que decidir en la práctica cuáles son los elementos del valor de un nombre puede ser complicado. En cualquier caso la idea fundamental es que cada elemento $(\tau, p) \in \sigma$ da una información parcial sobre un posible elemento de σ_G .

Definición 4.12 Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Definimos la *extensión genérica* de M por G como el conjunto

$$M[G] = \{\sigma_G \mid \sigma \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

Demostremos que $M[G]$ es el modelo que estamos buscando. Claramente $M[G]$ es numerable si M lo es. La transitividad es fácil de probar:

Teorema 4.13 Si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $M[G]$ es un conjunto transitivo.

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $x \in y \in M[G]$ y hemos de probar que $x \in M[G]$. Tenemos que $y = \sigma_G$, para un $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$, y entonces existen $p \in G$ y $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ de modo que $(\tau, p) \in \sigma$ y $x = \tau_G$. Por la transitividad de M ha de ser $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, luego $x = \tau_G \in M[G]$. ■

Ahora hemos de probar que $M \subset M[G]$. Para ello hemos de asignar un nombre a cada conjunto de M .

Definición 4.14 Si \mathbb{P} es un c.p.o., definimos el \mathbb{P} -nombre canónico de un conjunto x como

$$\check{x} = \{(\check{y}, \mathbb{1}) \mid y \in x\}.$$

De nuevo se trata de una definición por \in -recursión. Relativizando a un modelo transitivo la fórmula

$$\bigwedge u(u \in \check{x} \leftrightarrow \bigvee y \in x u = (\check{y}, \mathbb{1}))$$

y razonando por \in -inducción se concluye inmediatamente que \check{x} es absoluto para modelos transitivos de ZF. En particular, si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P} \in M$ y $x \in M$, entonces $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$. Una simple inducción demuestra así mismo que si G es un filtro sobre \mathbb{P} entonces $\bigwedge x \check{x}_G = x$. Incidentalmente, esto muestra que la aplicación $V \rightarrow V^{\mathbb{P}}$ dada por $x \mapsto \check{x}$ es inyectiva, por lo que $V^{\mathbb{P}}$ es una clase propia.

Teorema 4.15 Si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $M \subset M[G]$.

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in M$, entonces $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$, luego $x = \check{x}_G \in M[G]$. ■

Para probar que $G \in M[G]$ hemos de encontrar un nombre para G :

Definición 4.16 Si \mathbb{P} es un c.p.o., definimos el *nombre canónico de un filtro genérico* para \mathbb{P} como

$$\Gamma = \{(\check{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\} \in V^{\mathbb{P}}.$$

Es inmediato comprobar que Γ es absoluto para modelos transitivos de ZF, así como que si G es un filtro en \mathbb{P} entonces $\Gamma_G = G$. Como consecuencia:

Teorema 4.17 Si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M entonces $M[G]$ es un conjunto transitivo, $M \subset M[G]$, $G \in M[G]$ y si N es un modelo transitivo de ZF tal que $M \subset N$ y $G \in N$ entonces $M[G] \subset N$.

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\Gamma = \Gamma^M \in M^{\mathbb{P}}$, luego $G = \Gamma_G \in M[G]$. Sólo falta probar la afirmación sobre N . Ahora bien, si $x \in M[G]$ entonces $x = \sigma_G$, para cierto $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Como $\sigma, G \in N$, concluimos que $x = \sigma_G = (\sigma_G)^N \in N$. ■

Así pues, cuando hayamos probado que $M[G]$ es un modelo de ZF tendremos de hecho que es el menor modelo de ZF que contiene a M como subconjunto y a G como elemento. De acuerdo con las observaciones que hemos hecho al comienzo del capítulo, el hecho siguiente será fundamental:

Teorema 4.18 Si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $\Omega^M = \Omega^{M[G]}$, es decir, M y $M[G]$ contienen los mismos ordinales.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que si \mathbb{P} es un c.p.o. arbitrario, $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ y G es un filtro en \mathbb{P} , entonces $\text{rang } \sigma_G \leq \text{rang } \sigma$.

En efecto, razonamos por \in -inducción. Si es cierto para los nombres de la clausura transitiva de σ , llamamos $A = \{\tau \in V^{\mathbb{P}} \mid \bigvee p \in G (\tau, p) \in \sigma\}$. Así

$$\text{rang } \sigma_G = \bigcup_{x \in \sigma_G} (\text{rang } x + 1) = \bigcup_{\tau \in A} (\text{rang } \tau_G + 1) \leq \bigcup_{\tau \in A} (\text{rang } \tau + 1).$$

Ahora bien, si $\tau \in A$ entonces hay un $p \in G$ tal que $(\tau, p) \in \sigma$, luego

$$\text{rang } \tau < \text{rang } (\tau, p) < \text{rang } \sigma.$$

Concluimos, pues, que $\text{rang } \sigma_G \leq \text{rang } \sigma$.

Teniendo esto en cuenta, si tomamos un ordinal $\alpha \in \Omega^{M[G]}$, entonces $\alpha = \sigma_G$, para un cierto $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Según hemos probado, $\alpha = \text{rang } \sigma_G \leq \text{rang } \sigma \in \Omega^M$, luego también $\alpha \in \Omega^M$. La inclusión $\Omega^M \subset \Omega^{M[G]}$ es consecuencia inmediata de la inclusión $M \subset M[G]$. ■

No estamos en condiciones de demostrar que $M[G]$ es un modelo de ZF, pero sí podemos probar que cumple la mayoría de los axiomas:

Teorema 4.19 Si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $M[G]$ cumple los axiomas de extensionalidad, par, unión regularidad, vacío e infinitud.

DEMOSTRACIÓN: El axioma de extensionalidad se cumple porque $M[G]$ es transitivo. Suponiendo el axioma de regularidad, éste se cumple en cualquier clase. Vacío e infinitud se cumplen en $M[G]$ porque $\emptyset, \omega \in M \subset M[G]$.

Para probar el axioma del par observamos que si $x, y \in M[G]$, digamos $x = \sigma_G, y = \tau_G$, con $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $\rho = \{(\sigma, \mathbb{1}), (\tau, \mathbb{1})\} \in M^{\mathbb{P}}$ cumple $\rho_G = \{x, y\} \in M[G]$.

Para el axioma de la unión tomamos un conjunto $x = \sigma_G \in M[G]$ y definimos

$$\pi = \{(\rho, p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge \bigvee \tau q r ((\tau, q) \in \sigma \wedge (\rho, r) \in \tau \wedge p \leq r \wedge p \leq q)\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Basta probar que $\pi_G = \bigcup_{y \in x} y$.

Tomemos $z \in \bigcup_{y \in x} y$, de modo que existe un $y \in x$ tal que $z \in y$. Como $y \in \sigma_G$, ha de ser $y = \tau_G$, de modo que $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ y existe un $q \in G$ tal que $(\tau, q) \in \sigma$. Como $z \in \tau_G$ ha de ser $z = \rho_G$, donde $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ y existe $r \in G$ tal que $(\rho, r) \in \tau$. Puesto que G es un filtro existe un $p \in G$ tal que $p \leq q \wedge p \leq r$. Claramente, $(\rho, p) \in \pi$, luego $z = \rho_G \in \pi_G$.

Recíprocamente, si $z \in \pi_G$ entonces $z = \rho_G$, para cierto $\rho \in M^{\mathbb{P}}$, y existe un $p \in G$ tal que $(\rho, p) \in \pi$. Sean τ, q, r según la definición de π . Como G es un filtro se cumple que $q, r \in G$, luego $z = \rho_G \in \tau_G \in \sigma_G = x$, con lo que $z \in \bigcup_{y \in x} y$. ■

Queda pendiente demostrar que $M[G]$ cumple los axiomas de reemplazo y partes, así como el axioma de elección supuesto que lo cumpla M . De ello nos ocuparemos en la sección siguiente. Terminamos ésta extrayendo y generalizando la idea que hemos empleado para probar que $M[G]$ cumple el axioma del par:

Definición 4.20 Si \mathbb{P} es un c.p.o. y $\sigma, \tau \in V^{\mathbb{P}}$, definimos los nombres

$$\text{pd}(\sigma, \tau) = \{(\sigma, \mathbb{1}), (\tau, \mathbb{1})\}, \quad \text{po}(\sigma, \tau) = \text{pd}(\text{pd}(\sigma, \sigma), \text{pd}(\sigma, \tau)).$$

Es inmediato comprobar que estas definiciones son absolutas para modelos transitivos de ZF, así como que si G es un filtro en \mathbb{P} entonces

$$\text{pd}(\sigma, \tau)_G = \{\sigma_G, \tau_G\}, \quad \text{po}(\sigma, \tau)_G = (\sigma_G, \tau_G).$$

4.3 El teorema fundamental

Para probar que una extensión genérica $M[G]$ de un modelo transitivo M de ZF es un modelo de ZF necesitamos demostrar primero un resultado central en la teoría de extensiones, en virtud del cual alguien que sólo vea los conjuntos de M tiene mucha más información sobre lo que sucede en $M[G]$ de lo que en principio podría pensarse. Para precisar esto conviene introducir el concepto siguiente:

Definición 4.21 Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula (metamatemática) con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$ y sea $p \in \mathbb{P}$. Diremos que p fuerza $\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ si

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \equiv \bigwedge G (G \text{ es } \mathbb{P}\text{-genérico sobre } M \wedge p \in G \\ \rightarrow \phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG})).$$

Es decir, p fuerza $\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ si el mero hecho de que p esté en un filtro genérico G implica que ϕ es cierta en $M[G]$ cuando sus variables libres se interpretan con los valores de los nombres $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Por ejemplo, si $\sigma = \{(\emptyset, p)\}$, entonces $p \Vdash \sigma = 1$.

En estos términos, el teorema fundamental de la teoría de extensiones genéricas afirma dos cosas: en primer lugar, cualquier afirmación verdadera en una extensión genérica es forzada por una cierta condición p , es decir, cualquier problema sobre $M[G]$ puede reducirse a la cuestión de si una cierta condición está o no en el filtro G ; en segundo lugar, para decidir si una condición fuerza o no una afirmación es suficiente conocer M . Esto es especialmente sorprendente, pues en principio la definición de \Vdash involucra la totalidad de los filtros genéricos sobre el c.p.o. considerado, ninguno de los cuales está en M . Más precisamente, esta última afirmación significa que la fórmula $p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ es equivalente a una fórmula relativizada a M . Nuestro objetivo inmediato será construir esa fórmula.

Teorema 4.22 *Existe una fórmula (metamatemática) $p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$ con las variables libres $p, \mathbb{P}, \leq, \mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2$ que es absoluta para modelos transitivos de ZF y que verifica:*

Si \mathbb{P} es un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_1, \sigma_2 \in V^{\mathbb{P}}$, entonces $p \Vdash^ \sigma_1 = \sigma_2$ si y sólo si*

a) *Para todo $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$, el conjunto*

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2 ((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))\}$$

es denso bajo p .

b) *Para todo $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$, el conjunto*

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_2 \rightarrow \bigvee \pi_1 s_1 ((\pi_1, s_1) \in \sigma_1 \wedge q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))\}$$

es denso bajo p .

DEMOSTRACIÓN: Definimos $H : V^{\mathbb{P}} \times V^{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{P}$ de modo que $H(\sigma_1, \sigma_2)$ es el conjunto de todas las condiciones $p \in \mathbb{P}$ tales que

a) Para todo $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$, el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2 ((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \in H(\pi_1, \pi_2)))\}$$

es denso bajo p .

b) Para todo $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$, el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_2 \rightarrow \bigvee \pi_1 s_1 ((\pi_1, s_1) \in \sigma_1 \wedge q \leq s_1 \wedge q \in H(\pi_1, \pi_2)))\}$$

es denso bajo p .

Se trata de una definición por recursión sobre la relación bien fundada

$$(\pi_1, \pi_2) R (\sigma_1, \sigma_2) \leftrightarrow \pi_1 \in \text{ct } \sigma_1 \wedge \pi_2 \in \text{ct } \sigma_2.$$

Basta definir $p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2 \equiv p \in H(\sigma_1, \sigma_2)$. El carácter absoluto de esta fórmula se demuestra fácilmente por inducción sobre la misma relación bien fundada. ■

Hemos de probar que, fijado un modelo transitivo numerable M de ZF, un c.p.o. en M y dos nombres $\sigma_1, \sigma_2 \in M^{\mathbb{P}}$, la fórmula $p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$ es equivalente a $p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$, con la diferencia de que la primera es absoluta para M , luego sólo depende de lo que sucede en M y no de los filtros genéricos sobre M . Antes de ello definiremos \Vdash^* para fórmulas arbitrarias.

Definición 4.23 Si \mathbb{P} es un c.p.o. y $\sigma_1, \sigma_2 \in V^{\mathbb{P}}$, definimos

$$p \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2 \equiv \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee \pi s ((\pi, s) \in \sigma_2 \wedge q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma_1)\}$$

es denso bajo p .

Para cada fórmula metamatemática $\phi(x_1, \dots, x_n)$ sin descriptores definimos la fórmula $p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ como la construida según las reglas siguientes:

- $p \Vdash^* \sigma_i = \sigma_j$ y $p \Vdash^* \sigma_i \in \sigma_j$ son las ya definidas,
- $p \Vdash^* \neg \phi \equiv \neg \bigvee q \in \mathbb{P} (q \leq p \wedge q \Vdash^* \phi)$,
- $p \Vdash^* \phi \rightarrow \psi \equiv \{q \in \mathbb{P} \mid q \Vdash^* \phi \rightarrow q \Vdash^* \psi\}$ es denso bajo p ,
- $p \Vdash^* \bigwedge x \phi(x) \equiv \{r \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \sigma (\sigma \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre} \rightarrow r \Vdash^* \phi(\sigma))\}$ es denso bajo p .

Los teoremas siguientes van encaminados a probar que \Vdash^{*M} es equivalente a \Vdash . Ponemos entre paréntesis la hipótesis “sin descriptores” porque después veremos que todos los resultados son igualmente válidos para fórmulas con descriptores.

Teorema 4.24 Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula (sin descriptores). Sea \mathbb{P} un c.p.o., sea $p \in \mathbb{P}$ y sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- $p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$,
- $\bigwedge r \in \mathbb{P} (r \leq p \rightarrow r \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))$,
- $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\}$ es denso bajo p .

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato que b) \rightarrow a) y que b) \rightarrow c). Probaremos las implicaciones a) \rightarrow b) y c) \rightarrow a) por inducción sobre la longitud de ϕ .

Supongamos que $\phi \equiv \sigma_1 = \sigma_2$.

a) \rightarrow b). Sea $r \leq p$. Por a) y el teorema 4.22, si $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ el conjunto

$$D_p = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2 ((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))\}$$

es denso bajo p .

Sea $s \leq r$. Entonces existe $q \in D_p$ tal que $q \leq s \leq r$ y, claramente, $q \in D_r$, luego tenemos que D_r es denso bajo r . Esto prueba la parte a) de 4.22 para la fórmula $r \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$. Igualmente se comprueba la parte b), con lo que concluimos que $r \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$.

c) \rightarrow a). Supongamos que $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2\}$ es denso bajo p . Sea $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ y $t \leq p$. Entonces existe $r \leq t$ tal que $r \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$. Por 4.22, el conjunto D_r es denso bajo r , luego existe un $q \in D_r$ tal que $q \leq r \leq t \leq p$. Entonces $q \in D_p$, lo que prueba que D_p es denso bajo p . Esto es la parte a) de 4.22, e igualmente se prueba la parte b), con lo que concluimos que $p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$.

Supongamos ahora que $\phi \equiv \sigma_1 \in \sigma_2$.

a) \rightarrow b). Sea $r \leq p$. Por a) tenemos que el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee \pi s ((\pi, s) \in \sigma_2 \wedge q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma_1)\}$$

es denso bajo p , luego también es denso bajo r , lo que prueba que $r \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2$.

c) \rightarrow a). Supongamos que $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2\}$ es denso bajo p . Si $t \leq p$, entonces existe un $r \leq t$ tal que $r \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2$, luego el conjunto D es denso bajo r , luego existe un $q \in D$ tal que $q \leq r \leq s \leq p$. Esto prueba que D es denso bajo p , luego $p \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2$.

Supongamos el teorema para ϕ y veámoslo para $\neg\phi$.

a) \rightarrow b). Suponemos que $p \Vdash^* \neg\phi$. Entonces $\neg\bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash^* \phi)$ luego, dado $r \leq p$, también se cumple $\neg\bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq r \wedge q \Vdash^* \phi)$, de donde $r \Vdash^* \neg\phi$.

c) \rightarrow a). Suponemos que $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash^* \neg\phi\}$ es denso bajo p . Hemos de probar que $\neg\bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash^* \phi)$. Si existiera tal q , podríamos tomar $r \leq q$ tal que $r \Vdash^* \neg\phi$. Por hipótesis de inducción se cumple a) \rightarrow b) para ϕ , luego $r \Vdash^* \phi$, pero esto contradice la definición de $r \Vdash^* \neg\phi$.

Supongamos el teorema para ϕ y ψ y veámoslo para $\phi \rightarrow \psi$.

a) \rightarrow b). Suponemos que $p \Vdash^* \phi \rightarrow \psi$. Esto significa que $\{q \in \mathbb{P} \mid q \Vdash^* \phi \rightarrow q \Vdash^* \psi\}$ es denso bajo p , luego es denso bajo q para todo $q \leq p$ y, por consiguiente, todo $q \leq p$ cumple $q \Vdash^* \phi \rightarrow \psi$.

c) \rightarrow a). Supongamos que el conjunto $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash^* \phi \rightarrow \psi\}$ es denso bajo p . Hemos de probar que el conjunto $D = \{q \in \mathbb{P} \mid q \Vdash^* \phi \rightarrow q \Vdash^* \psi\}$ es denso bajo p y, en efecto, dado $q \leq p$, existe un $r \leq q$ tal que $r \Vdash^* \phi \rightarrow \psi$, de donde D es denso bajo r . Por consiguiente, existe un $s \leq r \leq q$ tal que $s \in D$.

Supongamos el teorema para ϕ y veámoslo para $\bigwedge x \phi(x)$.

a) \rightarrow b). Supongamos que $p \Vdash^* \bigwedge x \phi(x)$. Esto significa que el conjunto

$$D = \{r \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \sigma \in V^{\mathbb{P}} r \Vdash^* \phi(\sigma)\}$$

es denso bajo p , luego es denso bajo r para todo $r \leq p$, luego todo $r \leq p$ cumple $r \Vdash^* \bigwedge x \phi(x)$.

c) \rightarrow a). Supongamos que $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash^* \bigwedge x \phi(x)\}$ es denso bajo p . Si $s \leq p$, existe un $r \leq s$ tal que $r \Vdash^* \bigwedge x \phi(x)$, luego el conjunto D anterior es denso bajo r , luego existe un $q \leq s \leq p$ tal que $q \in D$. Esto para todo $s \leq p$, luego D es denso bajo p , y esto significa que $p \Vdash^* \bigwedge x \phi(x)$. ■

El paso crucial es el siguiente:

Teorema 4.25 *Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula (sin descriptores) con la lo sumo x_1, \dots, x_n como variables libres. Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$ y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces*

- a) *Si $p \in G$ y $(p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M$, entonces $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG})$.*
- b) *Si $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG})$, entonces $\bigvee p \in G (p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M$.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre la longitud de ϕ . Supongamos primero que $\phi \equiv \sigma_1 = \sigma_2$.

a) Si $(p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2)^M$, de hecho tenemos que $p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$, pues la fórmula es absoluta. Suponemos además que $p \in G$ y hemos de probar que se cumple $(\sigma_{1G} = \sigma_{2G})^{M[G]}$, es decir, que $\sigma_{1G} = \sigma_{2G}$.

Consideramos en $M^{\mathbb{P}} \times M^{\mathbb{P}}$ la relación dada por $(\pi_1, \pi_2) R (\sigma_1, \sigma_2)$ si y sólo si cada π_i está en el dominio del correspondiente σ_i . Obviamente está bien fundada. Demostraremos el teorema por inducción sobre R . Tomamos σ_1 y $\sigma_2 \in M^{\mathbb{P}}$ y suponemos como hipótesis de inducción que si π_i está en el dominio de σ_i , $q \in G$ y $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ entonces $\pi_{1G} = \pi_{2G}$. Suponemos así mismo que $p \in G$ cumple $p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$ y hemos de probar que $\sigma_{1G} = \sigma_{2G}$. Por simetría basta probar una inclusión.

Tomamos $x \in \sigma_{1G}$, con lo que existe $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ de modo que $x = \pi_{1G}$ y $s_1 \in G$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p \wedge r \leq s_1$. Por el teorema anterior $r \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$, lo que significa que el conjunto

$$E = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq r \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2 ((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))\}$$

es denso bajo r . Claramente $E = E^M \in M$, y el teorema 4.8 nos da que existe un $q \in G \cap E$. Entonces $q \leq r \leq s_1$, luego existe $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$ según la definición de E . En particular $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$, luego por hipótesis de inducción $x = \pi_{1G} = \pi_{2G}$. Por otra parte, $q \leq s_2$, luego $s_2 \in G$, lo que implica que $x = \pi_{2G} \in \sigma_{2G}$, como queríamos probar.

b) Supongamos ahora como hipótesis de inducción que si π_i está en el dominio de σ_i y $\pi_{1G} = \pi_{2G}$ entonces existe un $q \in G$ tal que $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$.

Suponemos también que $\sigma_{1G} = \sigma_{2G}$. Sea D el conjunto de las condiciones $r \in \mathbb{P}$ tales que $r \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$ o bien cumplen una de las dos afirmaciones siguientes:

a') $\bigvee \pi_1 s_1 ((\pi_1, s_1) \in \sigma_1 \wedge r \leq s_1 \wedge \bigwedge \pi_2 s_2 q ((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \in \mathbb{P} \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2 \rightarrow q \perp r))$,

b') $\bigvee \pi_2 s_2 ((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge r \leq s_2 \wedge \bigwedge \pi_1 s_1 q ((\pi_1, s_1) \in \sigma_1 \wedge q \in \mathbb{P} \wedge q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2 \rightarrow q \perp r))$,

Se tiene que $D \in M$ porque la fórmula que lo define es absoluta. Veamos que es denso en \mathbb{P} . Para ello tomamos $p \in \mathbb{P}$ y observamos que, o bien $p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$, en cuyo caso $p \in D$, o bien no se cumple una de las dos propiedades a) o b) del teorema 4.22. Supongamos, por ejemplo, que no se cumple a). Esto significa que existe un par $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ tal que el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2 ((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))\}$$

no es denso bajo p . Por consiguiente existe un $r \leq p$ tal que

$$\bigwedge q \in \mathbb{P} (q \leq r \rightarrow (q \leq s_1 \wedge \bigwedge \pi_2 s_2 ((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \rightarrow \neg(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)))).$$

Vamos a probar que r cumple a'), con lo que $r \in D \wedge r \leq p$. La propiedad anterior aplicada a $q = r$ nos da que $r \leq s_1$. Si $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$, $q \in \mathbb{P}$, $q \leq s_2$ y $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$, entonces $q \perp r$, pues si existiera una extensión común $q' \leq q \wedge q' \leq r$ entonces tendríamos $q' \leq r \wedge q' \leq s_1 \wedge q' \leq s_2 \wedge q' \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$.

Así pues, D es denso en \mathbb{P} , luego existe $r \in D \cap G$. Ahora bien, r no puede cumplir a') ni b'), pues si, por ejemplo, existiera un par $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ según a') tendríamos que $r \leq s_1$, luego $s_1 \in G$, luego $\pi_{1G} \in \sigma_{1G} = \sigma_{2G}$, luego $\pi_{1G} = \pi_{2G}$ con $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$ y $s_2 \in G$. Por hipótesis de inducción existe $q_0 \in G$ tal que $q_0 \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$. Sea $q \in G$ tal que $q \leq q_0 \wedge q \leq s_2$. Por el teorema anterior $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ y entonces, por a'), $q \perp r$, lo cual es absurdo porque ambos están en G .

Supongamos ahora que $\phi \equiv \sigma_1 \in \sigma_2$. Como $p \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2$ es absoluta para modelos transitivos, podemos olvidar las relativizaciones que aparecen en el enunciado.

a) Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2$. Entonces el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee \pi s ((\pi, s) \in \sigma_2 \wedge q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma_1)\}$$

es denso bajo p y claramente $D \in M$. Sea $q \in G \cap D$. Sea $(\pi, s) \in \sigma_2$ tal que $q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma_1$. Como $q \leq s$ se cumple que $s \in G$, luego $\pi_G \in \sigma_{2G}$. Como $q \in G$ y $q \Vdash^* \pi = \sigma_1$, por a) para la fórmula $\pi = \sigma_1$ se cumple que $\pi_G = \sigma_{1G}$, y así $\sigma_{1G} \in \sigma_{2G}$.

b) Suponemos ahora que $\sigma_{1G} \in \sigma_{2G}$. Entonces $\sigma_{1G} = \pi_G$, con $(\pi, s) \in \sigma_2$ y $s \in G$. Por b) para la fórmula $\pi = \sigma_1$ existe un $r \in G$ tal que $r \Vdash^* \pi = \sigma_1$. Sea $p \in G$ tal que $p \leq s$ y $p \leq r$. Veamos que el conjunto D anterior es denso bajo p , y así tendremos que $p \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2$.

Si $q \leq p$ existe $(\pi, s) \in \sigma_2$ (el par que ha habíamos elegido) de modo que $q \leq p \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma_1$ (pues $q \leq p \leq r \wedge r \Vdash^* \pi = \sigma_1$), luego $q \in D$.

Supongamos el teorema para ϕ y veámoslo para $\neg\phi$.

a) Sea $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \neg\phi)^M$, es decir, $\neg\forall q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge (q \Vdash^* \phi)^M)$. Hemos de probar $\neg\phi^{M[G]}$. Si se cumpliera $\phi^{M[G]}$, por a) existe un $r \in G$ tal que $(r \Vdash^* \phi)^M$. Sea $q \in G$ tal que $q \leq p \wedge q \leq r$. Entonces tenemos $(q \leq r \wedge r \Vdash^* \phi)^M$. Por el teorema anterior relativizado a M concluimos que $(q \Vdash^* \phi)^M$, contradicción.

b) Supongamos $\neg\phi^{M[G]}$ y sea $D = \{p \in \mathbb{P} \mid (p \Vdash^* \phi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\phi)^M\}$. Entonces $D \in M$ y es denso por definición de $p \Vdash^* \neg\phi$. Sea $p \in D \cap G$. No puede ser $(p \Vdash^* \phi)^M$ ya que entonces por a) tendríamos $\phi^{M[G]}$. Por consiguiente $(p \Vdash^* \neg\phi)^M$.

Supongamos el teorema para ϕ y ψ y demostrémoslo para $\phi \rightarrow \psi$.

a) Si $p \in G$ cumple $(p \Vdash^* \phi \rightarrow \psi)^M$, hemos de probar que $\phi^{M[G]} \rightarrow \psi^{M[G]}$, luego suponemos $\phi^{M[G]}$. Por b) existe $q \in G$ tal que $(q \Vdash^* \phi)^M$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p \wedge r \leq q$. Tenemos que el conjunto $\{s \in \mathbb{P} \mid (s \Vdash^* \phi)^M \rightarrow (s \Vdash^* \psi)^M\}$ es denso bajo p , luego el conjunto $\{s \in \mathbb{P} \mid s \leq r \wedge (s \Vdash^* \phi)^M \rightarrow (s \Vdash^* \psi)^M\}$ es denso bajo r y está en M , por lo que podemos tomar $s \in G$ tal que $s \leq r \wedge (s \Vdash^* \phi)^M \rightarrow (s \Vdash^* \psi)^M$. Como $s \leq r \leq q$, se cumple que $(s \Vdash^* \phi)^M$ y así también $(s \Vdash^* \psi)^M$. Como $s \in G$, por a) concluimos $\psi^{M[G]}$.

b) Supongamos $\phi^{M[G]} \rightarrow \psi^{M[G]}$, es decir, $\neg\phi^{M[G]} \vee \psi^{M[G]}$. Distinguimos los dos casos.

Si $\neg\phi^{M[G]}$, por el caso de $\neg\phi$ ya demostrado, contamos con a) y b) para $\neg\phi$. Así pues, existe un $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \neg\phi)^M$. Veamos que $(p \Vdash^* \phi \rightarrow \psi)^M$, para lo cual hemos de probar que el conjunto $D = \{q \in \mathbb{P} \mid (q \Vdash^* \phi)^M \rightarrow (q \Vdash^* \psi)^M\}$ es denso bajo p . Ahora bien, si $q \leq p$ entonces $(q \Vdash^* \neg\phi)^M$, luego $\neg(q \Vdash^* \phi)^M$ y trivialmente $(q \Vdash^* \phi)^M \rightarrow (q \Vdash^* \psi)^M$. Así pues, $q \in D$.

Si $\psi^{M[G]}$ existe un $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \psi)^M$. Como antes, D es denso bajo p , pues si $q \leq p$ entonces $(q \Vdash^* \psi)^M$ y también $(q \Vdash^* \phi)^M \rightarrow (q \Vdash^* \psi)^M$.

Supongamos el teorema para $\phi(x)$ y probémoslo para $\bigwedge x \phi(x)$.

a) Sea $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \bigwedge x \phi(x))^M$. Entonces el conjunto

$$D = \{r \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \phi(\sigma))^M\}$$

es denso bajo p . Como $D \in M$ existe un $r \in D \cap G$. Para todo $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tenemos que $(r \Vdash^* \phi(\sigma))^M$, luego por a) se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$. Así pues, concluimos que $\bigwedge x \in M[G] \phi^{M[G]}(x)$.

b) Si $\bigwedge x \in M[G] \phi^{M[G]}(x)$, hemos de encontrar una condición $p \in G$ tal que el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \sigma \in M^{\mathbb{P}}(q \Vdash^* \phi(\sigma))^M\}$$

sea denso bajo p . De hecho basta probar que existe un $p \in D \cap G$, pues en tal caso todo $q \leq p$ está en D . Supongamos, por reducción al absurdo, que

$D \cap G = \emptyset$. Por el teorema 4.8, si $D \cap E = \emptyset$, existe un $p \in G$ incompatible con todas las condiciones de D . Sea $E = \{q \in \mathbb{P} \mid \forall \sigma \in M^{\mathbb{P}} (q \Vdash^* \neg \phi(\sigma))^M\} \in M$ y veamos que es denso bajo p .

En efecto, si $q \leq p$ se cumple que q es incompatible con todos los elementos de D y, en particular, $q \notin D$. Por lo tanto existe un $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\neg(q \Vdash^* \phi(\sigma))^M$. Ha de existir un $r \leq q$ tal que $(r \Vdash^* \neg \phi(\sigma))^M$ o, de lo contrario, por definición de $r \Vdash^* \neg \phi$, para todo $r \leq q$ existiría un $s \leq r$ tal que $(s \Vdash^* \phi(\sigma))^M$. Esto significaría que el conjunto $\{r \in \mathbb{P} \mid (r \Vdash^* \phi(\sigma))^M\}$ sería denso bajo q , y tendríamos así que $(q \Vdash^* \phi(\sigma))^M$, contradicción.

Sea, pues, $r \leq q$ tal que $(r \Vdash^* \neg \phi(\sigma))^M$. Así $r \leq q \wedge r \in E$.

Como G es genérico y $p \in G$, existe un $q \in E \cap G$, luego $(q \Vdash^* \neg \phi(\sigma))^M$ para un cierto $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Por a) aplicado a $\neg \phi$ (usamos el paso ya probado de la inducción correspondiente a $\neg \phi$) obtenemos $\neg \phi(\sigma_G)^{M[G]}$, en contradicción con la hipótesis. ■

Antes de sacar consecuencias vamos a extender la definición de \Vdash^* a fórmulas con descriptores.

Definición 4.26 Sea ϕ una fórmula metamatemática y sea ψ una fórmula sin descriptores que sea equivalente a ϕ bajo los axiomas de extensionalidad y del conjunto vacío (podemos dar un procedimiento explícito para fijar una en concreto). Definimos

$$p \Vdash^* \phi \equiv p \Vdash^* \psi.$$

Del teorema siguiente se desprende en particular que la elección de ψ es irrelevante. La hipótesis entre paréntesis que excluye a los axiomas de reemplazo y partes es provisional. La podremos eliminar en cuanto sepamos que las extensiones genéricas satisfacen todo ZFC.

Teorema 4.27 Sean $\phi(x_1, \dots, x_n)$ y $\psi(x_1, \dots, x_n)$ fórmulas equivalentes en ZF (sin los axiomas de reemplazo y partes). Si \mathbb{P} es un c.p.o. $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ son \mathbb{P} -nombres se cumple

$$p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \leftrightarrow p \Vdash^* \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que ϕ y ψ no tienen descriptores. Si se cumpliera $p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ pero $\neg p \Vdash^* \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, entonces existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash^* \neg \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. En efecto, en caso contrario para todo $q \leq p$ se tendría $\neg q \Vdash^* \neg \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, luego existiría un $r \leq q$ tal que $r \Vdash^* \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Esto significa que el conjunto $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash^* \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\}$ sería denso bajo p y, por lo tanto, se cumpliría $p \Vdash^* \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Así pues, se cumple la sentencia

$$\begin{aligned} \bigvee \mathbb{P} \sigma_1 \cdots \sigma_n p q (\mathbb{P} \text{ es un c.p.o.} \wedge \sigma_1, \dots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}} \wedge p \in \mathbb{P} \wedge q \in \mathbb{P} \wedge q \leq p \wedge \\ p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \wedge q \Vdash^* \neg \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)). \end{aligned}$$

Por el teorema 1.27 existe un modelo transitivo numerable M de ZFC tal que esta sentencia es absoluta para M y, por lo tanto, es verdadera en M . Entonces

tenemos un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$, nombres $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$ y condiciones $q \leq p$ tales que

$$(p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M \wedge (q \Vdash^* \neg\psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M.$$

Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M tal que $q \in G$ (y por lo tanto $p \in G$). Por el teorema anterior debería cumplirse $\phi^{M[G]} \wedge \neg\psi^{M[G]}$, pero $M[G]$ es un modelo de ZF (menos los axiomas de partes y reemplazo), luego $\phi^{M[G]}$ es equivalente a $\psi^{M[G]}$, contradicción.

Ahora es claro que la definición anterior no depende de la elección de ψ , es decir, si ϕ es una fórmula con descriptores y ψ y ψ' son fórmulas sin descriptores equivalentes a ϕ bajo los axiomas de extensionalidad y vacío, entonces ψ y ψ' son equivalentes entre sí bajo estos axiomas, luego acabamos de probar que $p \Vdash^* \psi$ es equivalente a $p \Vdash^* \psi'$. Similarmente se llega ahora al caso general del teorema. ■

Es fácil ver que todas las propiedades de \Vdash^* que teníamos para fórmulas sin descriptores (incluyendo las que hemos usado como definición) valen ahora para fórmulas arbitrarias. Consideremos, por ejemplo, la afirmación

$$p \Vdash^* \neg\phi \leftrightarrow \neg\bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash^* \phi),$$

con la que hemos definido $p \Vdash^* \neg\phi$. Si ϕ tiene descriptores y ψ es una fórmula equivalente sin descriptores, tenemos que $\neg\psi$ es equivalente a $\neg\phi$, luego $p \Vdash^* \neg\phi$ es equivalente a $p \Vdash^* \neg\psi$ por el teorema anterior. Por definición ésta fórmula equivale a $\neg\bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash^* \psi)$ y, de nuevo por el teorema anterior, ésta equivale a $\neg\bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash^* \phi)$. Igualmente se razona con todas las demás.

Finalmente podemos probar el resultado que perseguíamos:

Teorema 4.28 (Teorema fundamental de la teoría de extensiones) *Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$.*

a) *Si M es numerable, entonces para todo $p \in \mathbb{P}$ se cumple*

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \leftrightarrow (p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M.$$

b) *Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M entonces*

$$\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \bigvee p \in G p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

DEMOSTRACIÓN: a) Si $p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, consideremos el conjunto

$$D = \{r \in \mathbb{P} \mid (r \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M\} \in M.$$

Veamos que D es denso bajo p . En caso contrario existiría un $q \leq p$ tal que $\neg\bigvee r \in \mathbb{P}(r \leq q \wedge r \in D)$, o sea, $\neg\bigvee r \in \mathbb{P}(r \leq q \wedge r \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M$, y esto implica que $(q \Vdash^* \neg\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M tal que $q \in G$ (aquí usamos que M es numerable). Como $q \leq p$, también $p \in G$, pero entonces el teorema 4.25 nos da que $\phi^{M[G]} \wedge \neg\phi^{M[G]}$, contradicción.

Por consiguiente (D es denso bajo p) ^{M} y el teorema 4.24 nos permite concluir que $(p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M$.

Supongamos ahora que $(p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M$. Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $p \in G$, entonces el teorema 4.25 nos da $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG})$, luego ciertamente $p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. (Esta implicación no requiere la numerabilidad de M .)

b) Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y supongamos $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG})$. Entonces 4.25 nos da que $\forall p \in G (p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^M$ y la parte a) ya demostrada implica que $\forall p \in G p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. El recíproco es inmediato por la definición de \Vdash . ■

La primera parte del teorema fundamental afirma que la relación \Vdash es equivalente a \Vdash^{*M} . La primera tiene una interpretación natural, mientras que la segunda es en principio compleja y artificial, pero tiene la sorprendente cualidad de que no depende de nada externo a M . Esto quiere decir que para comprobar una afirmación del tipo $p \Vdash \phi$ basta analizar la estructura de los nombres involucrados en ϕ tal y como se indica en la definición de \Vdash^* . En la práctica lo único que necesitaremos saber de \Vdash^* es que existe. Podemos olvidarnos de su compleja definición.

La segunda parte del teorema fundamental afirma que cualquier cuestión sobre $M[G]$ puede reducirse a determinar si una cierta condición está en el filtro genérico G . Pronto podremos comprobar que estos dos hechos conjuntamente determinan una estrecha relación entre un modelo M y sus extensiones genéricas. De momento vamos a probar los hechos básicos sobre la relación \Vdash .

Teorema 4.29 Sean ϕ y ψ fórmulas cuyas variables libres estén a lo sumo entre $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ salvo que se indique alguna más. Sea M un modelo transitivo numerable de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sean $p, q \in \mathbb{P}$ y sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$. Entonces:

- a) $\neg(p \Vdash \phi \wedge p \Vdash \neg\phi)$,
- b) $p \Vdash \phi \wedge q \leq p \rightarrow q \Vdash \phi$,
- c) $\neg p \Vdash \phi \leftrightarrow \forall q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \neg\phi)$,
- d) $p \Vdash \neg\phi \leftrightarrow \neg\forall q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \phi)$,
- e) $p \Vdash \phi \wedge \psi \leftrightarrow p \Vdash \phi \wedge p \Vdash \psi$,
- f) $p \Vdash \phi \vee \psi \leftrightarrow \bigwedge q \in \mathbb{P}(q \leq p \rightarrow \forall r \in \mathbb{P}(r \leq q \wedge (r \Vdash \phi \vee r \Vdash \psi)))$,
- g) $p \Vdash (\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \bigwedge q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \phi \rightarrow q \Vdash \psi)$,
- h) $p \Vdash \bigwedge x \phi(x) \leftrightarrow \bigwedge \sigma \in M^{\mathbb{P}} p \Vdash \phi(\sigma)$,
- i) $p \Vdash \bigvee x \phi(x) \leftrightarrow \bigwedge q \in \mathbb{P}(q \leq p \rightarrow \forall r \in \mathbb{P} \forall \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \leq q \wedge r \Vdash \phi(\sigma)))$,
- j) $\{p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \phi \vee p \Vdash \neg\phi\}$ es denso en \mathbb{P} ,

k) $p \Vdash \bigvee x \in \sigma \phi(x) \rightarrow \bigvee q \in \mathbb{P} \bigvee \pi \in \text{Dominio}(\sigma) (q \leq p \wedge q \Vdash \phi(\pi))$.

DEMOSTRACIÓN: a) Si $p \Vdash \phi \wedge p \Vdash \neg\phi$, tomando un filtro genérico G llegaríamos a que $\phi^{M[G]} \wedge \neg\phi^{M[G]}$, contradicción.

b) Si $p \Vdash \phi \wedge q \leq p$, tomamos un filtro genérico G que contenga a q , con lo que también $p \in G$, luego $\phi^{M[G]}$. Esto prueba que $q \Vdash \phi$.

c) Si $\neg p \Vdash \phi$ entonces existe un filtro genérico G tal que $p \in G$ pero $\neg\phi^{M[G]}$. Por el teorema fundamental existe $r \in G$ tal que $r \Vdash \neg\phi$. Sea $q \in G$ tal que $q \leq p \wedge q \leq r$. De este modo $q \leq p \wedge q \Vdash \neg\phi$. El recíproco es trivial por a) y b).

d) Si $p \Vdash \neg\phi$ y existiera un $q \leq p$ tal que $q \Vdash \phi$ entonces $p \Vdash \phi \wedge p \Vdash \neg\phi$, contradicción.

Si $\neg p \Vdash \neg\phi$ entonces existe un $q \leq p$ tal que $q \Vdash \neg\neg\phi$, lo que claramente implica $q \Vdash \phi$, contradicción.

e) Si $p \Vdash \phi \wedge \psi$ y G es un filtro genérico que contenga a p , entonces tenemos $\phi^{M[G]} \wedge \psi^{M[G]}$. Esto prueba que $p \Vdash \phi \wedge p \Vdash \psi$. El recíproco es idéntico.

f) Si $p \Vdash \phi \vee \psi$ y $q \in \mathbb{P}$ extiende a p , tomemos un filtro genérico G que contenga a q . Entonces $p \in G$, luego $\phi^{M[G]} \vee \psi^{M[G]}$. Sea $s \in G$ tal que $s \Vdash \phi \vee s \Vdash \psi$ según cuál sea el caso. Sea $r \in G$ tal que $r \leq q \wedge r \leq s$. De este modo $r \leq q \wedge (r \Vdash \phi \vee r \Vdash \psi)$.

Recíprocamente, el término derecho de f) afirma que el conjunto de condiciones que fuerzan ϕ o que fuerzan ψ es denso bajo p , luego si G es un filtro genérico que contenga a p existe una condición $r \in G$ tal que $r \Vdash \phi \vee r \Vdash \psi$, y en cualquier caso se cumple $(\phi \vee \psi)^{M[G]}$.

g) Si $p \Vdash \phi \rightarrow \psi$ y $q \leq p$ cumple $q \Vdash \phi$, tomamos un filtro genérico G que contenga a q , con lo que también $p \in G$, de modo que $\phi^{M[G]}$ y $\phi^{M[G]} \rightarrow \psi^{M[G]}$. Así pues, $\psi^{M[G]}$ y esto prueba que $q \Vdash \psi$.

Recíprocamente, por c), si $\neg p \Vdash \phi \rightarrow \psi$, existe una condición $q \leq p$ de modo que $q \Vdash \phi \wedge \neg\psi$. En particular $q \Vdash \phi$ y $q \Vdash \neg\psi$. Por hipótesis también $q \Vdash \psi$, contradicción.

h) Si $p \Vdash \bigwedge x \phi(x)$ y $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$, sea G un filtro genérico que contenga a p . Entonces $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$, luego $p \Vdash \phi(\sigma)$.

Recíprocamente, si G es un filtro genérico que contenga a G , para todo $x \in M[G]$ tenemos que $x = \sigma_G$, para cierto $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Por hipótesis $p \Vdash \phi(\sigma)$, luego $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$. Esto prueba $(\bigwedge x \phi(x))^{M[G]}$, luego $p \Vdash \bigwedge x \phi(x)$.

i) Si $p \Vdash \bigvee x \phi(x)$ y $q \in \mathbb{P}$ cumple $q \leq p$, tomemos un filtro genérico G que contenga a q . Entonces $p \in G$, luego existe un $x \in M[G]$ tal que $\phi^{M[G]}(x)$. Digamos que $x = \sigma_G$, con $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Existe un $s \in G$ tal que $s \Vdash \phi(\sigma)$ y tomando $r \in G$ tal que $r \leq q \wedge r \leq s$ tenemos $r \leq q \wedge r \Vdash \phi(\sigma)$.

Recíprocamente, si se cumple $\neg p \Vdash \bigvee x \phi(x)$, existe una condición $q \leq p$ tal que $q \Vdash \bigwedge x \neg\phi(x)$. Por hipótesis existe $r \leq q$ y existe $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ de modo que $r \Vdash \phi(\sigma)$. Si G es un filtro genérico que contenga a r , también $q \in G$ con lo que tenemos $\bigwedge x \in M[G] \neg\phi^{M[G]}(x)$ y también $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$, contradicción.

j) es inmediato por c).

k) Si $p \Vdash \bigvee x \in \sigma \phi(x)$, sea G un filtro genérico que contenga a p . Entonces existe $x \in \sigma_G$ tal que $\phi(x)$. Concretamente, $x = \pi_G$, donde $(\pi, r) \in \sigma$, $r \in G$. Existe $q \in G$, (y lo podemos tomar $q \leq p$) tal que $q \Vdash \phi(\pi)$. ■

El teorema de reflexión junto con el teorema fundamental permite traducir el teorema anterior a propiedades sobre la relación \Vdash^* . Por ejemplo, en correspondencia con la propiedad e) tenemos el teorema siguiente:

Sean ϕ y ψ fórmulas cuyas variables libres estén a lo sumo entre $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Si \mathbb{P} es un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$, entonces

$$p \Vdash^* \phi \wedge \psi \leftrightarrow p \Vdash^* \phi \wedge p \Vdash^* \psi.$$

En efecto, si llamamos χ a esta sentencia (es decir a la sentencia “para todo \mathbb{P} , p , $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, si \mathbb{P} es un c.p.o., etc”) el teorema de reflexión 1.27 nos da un modelo transitivo numerable M de ZFC tal que $\chi \leftrightarrow \chi^M$ (observemos que χ sólo habla de conjuntos, por lo que $\chi \leftrightarrow \chi^V$). Ahora bien, por el teorema fundamental resulta que χ^M es precisamente el apartado e) del teorema anterior, luego se cumple χ .

4.4 El teorema del modelo genérico

Finalmente estamos en condiciones de probar que las extensiones genéricas son modelos de ZFC. Recordemos que sólo nos falta demostrar los axiomas de reemplazo, partes y elección.

Teorema 4.30 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZF (ZFC), $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces $M[G]$ es un modelo transitivo de ZF (ZFC).*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que $M[G]$ satisface el caso particular de reemplazo correspondiente a la fórmula $\phi(x, y, x_1, \dots, x_n)$, donde las variables libres son exactamente las indicadas. Hemos de ver que

$$\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bigwedge \bar{x} \bar{y} \bar{z} (\phi^{M[G]}(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi^{M[G]}(\bar{x}, \bar{z}) \rightarrow \bar{y} = \bar{z}) \rightarrow \bigwedge \bar{a} \bar{b} \bar{y} (\bar{y} \in \bar{b} \leftrightarrow \bigvee \bar{x} \in \bar{a} \phi^{M[G]}(\bar{x}, \bar{y}))).$$

Fijamos $\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG} \in M[G]$. Supongamos

$$\bigwedge \bar{x} \bar{y} \bar{z} (\phi^{M[G]}(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi^{M[G]}(\bar{x}, \bar{z}) \rightarrow \bar{y} = \bar{z})$$

y sea $\bar{a} = \sigma_G \in M[G]$. Definimos

$$b = \{\bar{y} \in M[G] \mid \bigvee \bar{x} \in \bar{a} \phi^{M[G]}(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Basta probar que $b \in M[G]$, para lo cual hemos de encontrarle un nombre en $M^{\mathbb{P}}$.

Observemos que si $\bar{y} \in b$, entonces $y = \tau_G$, para un $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Sea $\bar{x} \in \bar{a}$ tal que $\phi^{M[G]}(\bar{x}, \bar{y})$. Entonces $x \equiv \pi_G$, con $(\pi, s) \in \sigma$ y $s \in G$. De este modo tenemos $\pi_G \in \sigma_G \wedge \phi^{M[G]}(\pi_G, \tau_G)$, luego existe una condición $p \in G$ tal que $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau))$. Recíprocamente, si $p \in G$ cumple $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau))$, entonces $\tau_G \in b$.

En vista de esto parece razonable definir

$$\rho = \{(\tau, p) \mid \tau \in M^{\mathbb{P}} \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \forall \pi \in \text{Dominio}(\sigma) p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau))\}$$

y demostrar que $b = \rho_G$. No es difícil probar que $b = \rho_G$, pero el problema es que $\rho \notin M$. Más concretamente, el conjunto ρ resulta ser “una clase propia en M ”, en el mismo sentido en que lo son, por ejemplo, Ω^M o el propio M .

Ello se debe esencialmente a que existe una clase propia de nombres τ que nombran a un mismo conjunto: para cada $\bar{y} \in b$ existen “demasiados” τ tales que $(\tau, p) \in \rho$ para cierto p . Observemos que no se nos plantea el mismo problema con π porque podemos tomarlo en el dominio de σ , el cual es un conjunto en M . Vamos a hacer algo similar con τ , es decir, vamos a probar que los nombres para los $\bar{y} \in b$ los podemos tomar en un cierto conjunto de nombres en M . Para ello observamos que la sentencia siguiente es un teorema de ZF:

$$\begin{aligned} \bigwedge \mathbb{P} \leq \mathbb{1} \sigma \sigma_1 \cdots \sigma_n ((\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}) \text{ es un c.p.o. } \wedge \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}} \rightarrow \\ \bigvee S (\bigwedge x \in S x \in V^{\mathbb{P}} \wedge \bigwedge p p \Vdash (\pi \in \text{Dominio}(\sigma) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \tau \in V^{\mathbb{P}} \wedge \\ p \Vdash^* (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau)) \rightarrow \bigvee \mu \in S p \Vdash^* (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))))). \end{aligned}$$

En efecto, para cada $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ y cada $p \in \mathbb{P}$ sea $\alpha(\pi, p)$ el mínimo ordinal α tal que existe un $\tau \in V_\alpha \cap V^{\mathbb{P}}$ de modo que $p \Vdash^* (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau))$ o bien $\alpha(\pi, p) = 0$ si no existe ningún τ . Entonces $\{\alpha(\pi, p) \mid \pi \in \text{Dominio}(\sigma) \wedge p \in \mathbb{P}\}$ es un conjunto (por ser imagen de $\text{Dominio}(\sigma) \times \mathbb{P}$), luego tiene supremo $\alpha \in \Omega$. Basta tomar $S = V^{\mathbb{P}} \cap V_\alpha$.

La relativización a M de la sentencia anterior nos da que existe un conjunto $S \in M$ tal que $S \subset M^{\mathbb{P}}$ y

$$\begin{aligned} \bigwedge p p \Vdash (\pi \in \text{Dominio}(\sigma) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \tau \in M^{\mathbb{P}} \wedge \\ p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau)) \rightarrow \bigvee \mu \in S p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))). \end{aligned}$$

Ahora podemos definir

$$\rho = \{(\mu, p) \mid \mu \in S \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \forall \pi \in \text{Dominio}(\sigma) p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))\}.$$

Veamos que ahora sí que se cumple $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Para ello se define

$$x \equiv \{(\mu, p) \mid \mu \in S \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \forall \pi \in \text{Dominio}(\sigma) p \Vdash^* (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))\}$$

y se comprueba sin dificultad que $\rho = x^M \in M^{\mathbb{P}}$. Aquí es crucial que \Vdash es equivalente a \Vdash^{*M} . En general, el teorema fundamental garantiza que los conjuntos definidos como ρ —en términos de \Vdash — son definibles en M y, por consiguiente, pertenecen a M . Veamos que $b = \rho_G \in M[G]$.

Si $\bar{y} = \tau_G \in b$, como antes obtenemos un $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ y un $p \in G$ de modo que $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau))$. Por la construcción del conjunto S existe un $\mu \in S$ tal que $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))$, de donde $(\mu, p) \in \rho$, y por lo tanto $\mu_G \in \rho_G$. Como $p \in G$ se cumple $\pi_G \in \sigma_G \wedge \phi^{M[G]}(\pi_G, \mu_G)$, pero también tenemos $\phi^{M[G]}(\pi_G, \tau_G)$, con lo que la hipótesis de unicidad nos da que $\bar{y} = \tau_G = \mu_G \in \rho_G$.

Recíprocamente, si $\bar{y} \in \rho_G$ tenemos que $\bar{y} = \mu_G$ con $(\mu, p) \in \rho \wedge p \in G$. Entonces $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))$, con lo que $\pi_G \in \sigma_G \wedge \phi^{M[G]}(\pi_G, \mu_G)$, es decir, $\pi_G \in \bar{a} \wedge \phi^{M[G]}(\pi_G, \bar{y})$, lo que prueba que $\bar{y} \in b$.

La relativización del axioma de partes es $\bigwedge \bar{x} \bigvee \bar{y} \bigwedge \bar{u} (\bar{u} \in \bar{y} \leftrightarrow \bar{u} \subset \bar{x})$, pero en realidad basta probar que $\bigwedge \bar{x} \bigvee \bar{y} \bigwedge \bar{u} (\bar{u} \subset \bar{y} \rightarrow \bar{u} \in \bar{x})$, pues de aquí se deduce el axioma de partes mediante el teorema de especificación, que ya sabemos que se cumple en $M[G]$ (se deduce del axioma de reemplazo sin necesidad del axioma de partes).

Sea $\bar{x} = \sigma_G \in M[G]$. Definimos

$$S = \{\mu \in M^{\mathbb{P}} \mid \text{Dominio}(\mu) \subset \text{Dominio}(\sigma)\} = (\mathcal{P}(\text{Dominio}(\sigma) \times \mathbb{P}))^M \in M.$$

El conjunto S va a desempeñar la misma función que el correspondiente conjunto en la prueba del axioma de reemplazo, sólo que esta vez ha sido más fácil obtenerlo. Sea $\rho = S \times \{\mathbb{1}\} \in M^{\mathbb{P}}$ y llamemos $\bar{y} = \rho_G \in M[G]$. Vamos a ver que \bar{y} cumple lo pedido. Para ello tomamos $\bar{u} \in M[G]$ tal que $\bar{u} \subset \bar{x}$. Sea $\bar{u} = \tau_G \subset \sigma_G$. No podemos asegurar que $\tau \in S$, pero vamos a ver que $\tau_G = \mu_G$ con $\mu \in S$.

Sea $\mu = \{(\pi, p) \mid \pi \in \text{Dominio}(\sigma) \wedge p \Vdash \pi \in \tau\} \in S$. Notemos que efectivamente $\mu \in M$, pues es un subconjunto de $\text{Dominio}(\sigma) \times \mathbb{P} \in M$ definible en M (por el teorema fundamental). Sólo falta probar que $\bar{u} = \tau_G = \mu_G$.

Si $a \in \tau_G$ entonces $a = \pi_G$, con $(\pi, s) \in \tau$ y $s \in G$. Como $\pi_G \in \tau_G$ existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \pi \in \tau$, de donde $(\pi, p) \in \mu$ y así $a = \pi_G \in \mu_G$.

Si $a \in \mu_G$, entonces $a = \pi_G$ con $(\pi, p) \in \tau$ y $p \in G$, luego $p \Vdash \pi \in \tau$ y, en consecuencia, $a = \pi_G \in \tau_G$. Así pues, $\tau_G = \mu_G$.

Supongamos finalmente que M cumple el axioma de elección y veamos que lo mismo le sucede a $M[G]$. Basta demostrar que en $M[G]$ se cumple

$$\bigwedge x \bigvee \alpha \in \Omega \bigvee f (f \text{ es una función } \wedge \text{Dominio}(f) = \alpha \wedge x \subset \text{Rango}(f)),$$

pues esto implica que todo conjunto puede ser bien ordenado.

Sea $x = \sigma_G \in M$. Sean $\alpha, g \in M$ tales que $g : \alpha \rightarrow \text{Dominio}(\sigma)$ biyectiva (existen en virtud del axioma de elección relativizado a M). Ahora definimos $\tau = \{\text{p.o.}(\check{\beta}, g(\beta)) \mid \beta < \alpha\} \times \mathbb{1} \in M^{\mathbb{P}}$. Claramente

$$f = \tau_G = \{(\beta, g(\beta)_G) \mid \beta < \alpha\}$$

cumple lo pedido. ■

Ahora sabemos que en el teorema 4.27 no es necesario exceptuar los axiomas de reemplazo y partes (ni elección si lo suponemos en M). Así mismo tenemos:

Teorema 4.31 *Sea ϕ un teorema de ZFC (sin variables libres) y sea \mathbb{P} un c.p.o. Entonces $\mathbb{1} \Vdash^* \phi$.*

DEMOSTRACIÓN: Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y \mathbb{P} es un c.p.o. en M se cumple $\mathbb{1} \Vdash \phi$ por el teorema anterior y por la definición de \Vdash . Ahora basta aplicar el teorema de reflexión exactamente igual que al final de la sección anterior. ■

El teorema siguiente recoge todo lo que hemos obtenido sobre las extensiones genéricas:

Teorema 4.32 (Teorema del modelo genérico) *Sea M un modelo transitivo de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M .*

- a) $M[G]$ es un modelo transitivo de ZFC.
- b) $M \subset M[G]$ y $G \in M[G]$.
- c) $\Omega^M = \Omega^{M[G]}$.
- d) Si N es un modelo transitivo de ZF tal que $M \subset N$ y $G \in N$ entonces $M[G] \subset N$.

Sólo hay que probar a) (pues no estamos suponiendo que M sea numerable). El resto es el teorema 4.17. Ahora bien, si ϕ es un axioma de ZFC (podemos suponerlo sin variables libres), por el teorema anterior tenemos que $(\mathbb{1} \Vdash^* \phi)^M$, luego por 4.25 se cumple $\phi^{M[G]}$. ■

Si nos fijamos en la prueba del teorema anterior y en la de los teoremas en que se basa, observaremos que en ningún momento hemos exigido que M sea un conjunto. Tiene perfecto sentido hablar de extensiones genéricas de clases propias transitivas, si bien la existencia de filtros genéricos sólo está garantizada para modelos numerables.

Si \mathbb{P} es un c.p.o. no atómico, el teorema 4.5 afirma que no puede existir un filtro \mathbb{P} -genérico sobre V . Sin embargo, la relación \Vdash^* nos permite hablar en cierto sentido de una extensión genérica de la clase universal. En efecto, si Γ es el nombre definido en 4.16, aplicando el teorema de reflexión concluimos que

$$\mathbb{1} \Vdash^* \Gamma \text{ es un filtro en } \check{\mathbb{P}}$$

y si D es un subconjunto denso en \mathbb{P} entonces

$$\mathbb{1} \Vdash^* \Gamma \cap \check{D} \neq \emptyset.$$

Es posible desarrollar toda la teoría de extensiones genéricas sin hablar en ningún momento de modelos, tratando exclusivamente con la relación \Vdash^* . No obstante, es más intuitivo y cómodo trabajar como lo estamos haciendo. De todos modos tiene interés saber que existe esta posibilidad, sobre todo porque así es como se ven las cosas desde nuestro modelo base M , y nos conviene tener una idea lo más clara posible de cómo piensa alguien que viva en M .

De aquí en adelante ya no distinguiremos entre las relaciones \Vdash^* y \Vdash , sino que el contexto siempre dejará claro cuándo debemos sobrentender una estrella.

4.5 Aplicaciones y hechos adicionales

Los resultados que hemos probado hasta aquí nos permiten formalizar fácilmente nuestro proyecto de probar la independencia del axioma de constructibilidad. Según apuntábamos, la clave está en que las extensiones genéricas tienen los mismos ordinales que los modelos base. Esto se traduce en lo siguiente:

Teorema 4.33 *Sea M un modelo transitivo de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro genérico sobre M . Entonces*

$$\bigwedge x \in M[G] (x \text{ es constructible}^{M[G]} \leftrightarrow x \in M \wedge x \text{ es constructible}^M).$$

En particular, si M cumple $V = L$ entonces

$$\bigwedge x \in M[G] (x \text{ es constructible}^{M[G]} \leftrightarrow x \in M).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $L^M = L$ si M es una clase propia y $L^M = L_{\Omega^M}$ si M es un conjunto. Según el teorema 3.14 tenemos que $L^M \subset M \subset M[G]$ y

$$\bigwedge x \in M (x \text{ es constructible}^M \leftrightarrow x \in L^M),$$

$$\bigwedge x \in M[G] (x \text{ es constructible}^{M[G]} \leftrightarrow x \in L^M).$$

A partir de aquí el teorema es obvio. ■

El teorema anterior puede abreviarse en la igualdad $L^M = L^{M[G]}$. Ahora es evidente que cualquier extensión genérica $M[G]$ respecto a un c.p.o. no atómico de un modelo M de $\text{ZFC}+V=L$ es un modelo de $\text{ZFC}+V \neq L$, luego el axioma de constructibilidad no puede probarse en ZFC (salvo que éste sea contradictorio, claro).

Ejemplo Un ejemplo de c.p.o. no atómico es el c.p.o. \mathbb{P} que considerábamos al principio del capítulo. Según hemos visto, a partir de un filtro genérico G podíamos construir una función genérica $f = \bigcup_{p \in G} p : \omega \rightarrow 2$ y a partir de

ésta un conjunto $A = f^{-1}[\{1\}] \subset \omega$. Es claro que $A \in M[G] \setminus M$, pues si A estuviera en M también estaría f y por lo tanto G . La conclusión es que no sólo es consistente que $V \neq L$, sino, más concretamente, que exista un subconjunto de ω no constructible. De aquí se sigue fácilmente la existencia de un número real no constructible. ■

Si M es un modelo de $\text{ZFC}+V=L$ y $M[G]$ es cualquier extensión genérica, es claro que $(V \text{ es una extensión genérica de } L)^{M[G]}$, en el sentido de que existe un filtro G sobre \mathbb{P} que corta a todos los conjuntos constructibles densos en \mathbb{P} y de modo que todo conjunto es el valor respecto a G de un nombre constructible. En resumen, si ZFC es consistente, también lo es ZFC más

$$\bigvee G (G \text{ es un filtro } \mathbb{P}\text{-genérico sobre } L \wedge V = L[G]),$$

donde \mathbb{P} es cualquier c.p.o. constructible prefijado. Así mismo será consistente NBG más la hipótesis de que V es una extensión genérica de L , pero esta

hipótesis implica el axioma de elección de Gödel, es decir, la existencia de un buen orden (o una función de elección) sobre la clase universal. En efecto, basta observar que tenemos una aplicación inyectiva $V \rightarrow L$ que a cada conjunto le asigna su mínimo nombre constructible.

En el capítulo anterior vimos que el axioma de elección de Gödel era consecuencia de $V = L$ y ahora hemos probado que el recíproco no es cierto:

Teorema 4.34 *Si NBG es consistente, también lo es NBG (con el axioma de elección de Gödel) más $V \neq L$.*

Notemos que no podemos demostrar que existan filtros genéricos sobre L (por ejemplo, no existen si $V = L$), pero ahora sabemos que es consistente suponer que existen.

Ahora podemos demostrar un resultado habíamos anticipado tras la prueba del teorema 3.20:

Teorema 4.35 *Si ZFC es consistente también lo es $ZFC + \aleph_1^L < \aleph_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$\mathbb{P} = \{p \subset \omega \times \omega_1 \mid p \text{ es una función} \wedge |p| < \aleph_0\}.$$

Consideramos el conjunto \mathbb{P}^L , cuyos elementos son las funciones de un subconjunto finito de ω en ω_1^L . Es claro que \mathbb{P}^L es un c.p.o. con la relación inversa de la inclusión y con máximo $\mathbf{1} = \emptyset$. Sabemos que si ZFC es consistente, también lo es suponer que $V = L[G]$, donde G es un filtro \mathbb{P}^L -genérico sobre L . (Más detalladamente, si M es un modelo transitivo numerable de $ZFC + V = L$ y G es un filtro \mathbb{P}^M -genérico sobre M , entonces en $M[G]$ se cumple que G es un filtro \mathbb{P}^L -genérico sobre L y $V = L[G]$, pues $(\mathbb{P}^L)^{M[G]} = \mathbb{P}^M$.)

Sea $f = \bigcup_{p \in G} p$. Si $n < \omega$, es claro que el conjunto de las condiciones que tienen a n en su dominio es constructible y denso en \mathbb{P} , luego corta a G . Esto se traduce en que $f : \omega \rightarrow \omega_1^L$. Similarmente, si $\alpha < \omega_1^L$, el conjunto de las condiciones que tienen a α en su rango es constructible y denso en \mathbb{P} , lo cual se traduce en que $f : \omega \rightarrow \omega_1^L$ suprayectiva. Por consiguiente ω_1^L es un ordinal numerable. ■

En particular es consistente que existan sólo \aleph_0 subconjuntos de ω o números reales constructibles.

Terminamos el capítulo con un par de resultados técnicos sobre extensiones genéricas que a menudo resultan útiles.

Teorema 4.36 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Sea $f : A \rightarrow M$ tal que $f \in M[G]$. Entonces existe un $B \in M$ tal que $f : A \rightarrow B$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente existe un ordinal $\alpha \in M[G]$ tal que

$$f : A \longrightarrow V_\alpha^{M[G]} \cap M = V_\alpha^M = B.$$

■

Si comparamos los apartados h) e i) del teorema 4.29 observamos una clara asimetría. De acuerdo con h), cabría esperar que i) fuera

$$p \Vdash \forall x \phi(x) \leftrightarrow \forall \sigma \in M^{\mathbb{P}} p \Vdash \phi(\sigma).$$

La conjetura es cierta, pero no es evidente. Además para probarla hay que exigir que el modelo base M cumpla el axioma de elección. Antes necesitamos el resultado siguiente:

Teorema 4.37 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC tal que en M se cumpla: \mathbb{P} es un c.p.o., A es una anticadena² en \mathbb{P} y $\{\sigma_q\}_{q \in A}$ es una familia de \mathbb{P} -nombres. Entonces existe un $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $q \Vdash \pi = \sigma_q$ para todo $q \in A$.*

DEMOSTRACIÓN: Cuando decimos que en M se cumple “ \mathbb{P} es un c.p.o., etc.” queremos decir que se cumple la relativización a M de esta fórmula. Notemos que $\{\sigma_q\}_{q \in A}$ representa una función $f : A \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$, de modo que $\sigma_q = f(q)$. No hay que confundir la función f con su rango, es decir, con el conjunto $\{\sigma_q \mid q \in A\}$. La hipótesis es que $f \in M$, no sólo que $\{\sigma_q \mid q \in A\} \subset M$ o que $\{\sigma_q \mid q \in A\} \in M$. Definimos

$$\pi = \bigcup_{q \in A} \{(\tau, r) \mid \tau \in \text{Dominio}(\sigma_q) \wedge r \in \mathbb{P} \wedge r \leq q \wedge r \Vdash \tau \in \sigma_q\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Sea $q \in A$ y veamos que $q \Vdash \pi = \sigma_q$. Tomamos un filtro genérico G tal que $q \in G$ y hemos de ver que $\pi_G = \sigma_{qG}$.

Si $a \in \pi_G$, entonces $a = \tau_G$, con $(\tau, r) \in \pi \wedge r \in G$. Por definición de π existe $q' \in A$ tal que $r \leq q' \wedge \tau \in \text{Dominio}(\sigma_{q'}) \wedge r \Vdash \tau \in \sigma_{q'}$. Como $r \in G$, también $q' \in G$. Tenemos que q y q' están en A y en G , pero A es una anticadena, luego ha de ser $q = q'$. Por lo tanto $r \Vdash \tau \in \sigma_q$ y así $a = \tau_G \in \sigma_{qG}$.

Recíprocamente, si $a \in \sigma_{qG}$ entonces $a = \tau_G$ con $\tau \in \text{Dominio}(\sigma_q)$. Tenemos $\tau_G \in \sigma_{qG}$, luego existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \tau \in \sigma_q$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p \wedge r \leq q$. Entonces $r \Vdash \tau \in \sigma_q$, luego $(\tau, r) \in \pi$ y $a = \tau_G \in \pi_G$. Esto nos da la otra inclusión. ■

Teorema 4.38 *Sea $\phi(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ una fórmula cuyas variables libres estén entre las indicadas. Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$. Entonces*

$$p \Vdash \forall x \phi(x) \leftrightarrow \forall \sigma \in M^{\mathbb{P}} p \Vdash \phi(\sigma).$$

²Una anticadena en un c.p.o. es un conjunto de condiciones incompatibles dos a dos.

DEMOSTRACIÓN: Si $\bigvee \sigma \in M^{\mathbb{P}}$ $p \Vdash \phi(\sigma)$, dado un filtro genérico G tal que $p \in M$, se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$, luego $\bigvee x \in M[G] \phi(x)$. Así pues, $p \Vdash \bigvee x \phi(x)$.

Supongamos ahora que $p \Vdash \bigvee x \phi(x)$. Por el lema de Zorn en M existe un conjunto $A \in M$ tal que:

- a) A es una anticadena en \mathbb{P} ,
- b) $\bigwedge q \in A (q \leq p \wedge \bigvee \sigma \in M^{\mathbb{P}} q \Vdash \phi(\sigma))$,
- c) A es maximal respecto a a) y b), es decir, no existe ningún B (en M) que cumpla a) y b) y que contenga estrictamente a A .

Por el axioma de elección en M podemos construir una familia $\{\sigma_q\}_{q \in A} \in M$ tal que $\bigwedge q \in A (\sigma_q \in M^{\mathbb{P}} \wedge q \Vdash \phi(\sigma_q))$. Por el teorema anterior existe $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\bigwedge q \in A q \Vdash \sigma = \sigma_q$. Así, si $q \in A$ tenemos que $q \Vdash \phi(\sigma_q) \wedge \sigma = \sigma_q$, luego $q \Vdash \phi(\sigma)$.

Veamos que $p \Vdash \phi(\sigma)$. En caso contrario existe un $r \leq p$ tal que $r \Vdash \neg \phi(\sigma)$. Como estamos suponiendo que $p \Vdash \bigvee x \phi(x)$, por 4.29 existen $q' \leq r$ y $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $q' \Vdash \phi(\pi)$.

Si $q \in A$ tenemos que $q \Vdash \phi(\sigma)$ y $q' \Vdash \neg \phi(\sigma)$ (pues $q' \leq r$), de donde $q \perp q'$ (una extensión común forzaría a la vez $\phi(\sigma)$ y $\neg \phi(\sigma)$). Por lo tanto $q' \notin A$ y el conjunto $A \cup \{q'\}$ contiene estrictamente a A y cumple las condiciones a) y b), contradicción. ■

Capítulo V

Cardinales en extensiones genéricas

En este capítulo demostraremos la independencia de la hipótesis del continuo, para lo cual construiremos extensiones genéricas en las que 2^{\aleph_0} tome cualquier valor razonable prefijado. A la hora de calcular el valor de 2^{\aleph_0} en una extensión genérica se nos plantea el problema de que los cardinales de la extensión no tienen por qué ser los mismos que los del modelo base. En efecto, en la prueba del teorema 4.35 construimos una extensión genérica en la que el cardinal \aleph_1 del modelo base pasaba a ser un ordinal numerable. Esto no tiene nada de extraño: si M es un modelo numerable, debemos tener presente que \aleph_1^M no es más que un ordinal numerable, un ordinal que parece no numerable a alguien que viva en M porque ninguna de las biyecciones entre él y ω pertenece a M . Ahora bien, puede ocurrir que una extensión genérica $M[G]$ sí contenga una de estas biyecciones, con lo que \aleph_1^M ya no pasará por cardinal en $M[G]$. No obstante, es posible dar condiciones sobre un c.p.o. para que esto no suceda, de modo que los cardinales de una extensión genérica sean los mismos que los del modelo base. Nos ocupamos de ello en la primera sección.

5.1 Conservación de cardinales

Observemos que si $M[G]$ es una extensión genérica de un modelo M de ZFC, entonces todo $\text{cardinal}^{M[G]}$ es un cardinal^M . En efecto, $\kappa \in M$ es un $\text{cardinal}^{M[G]}$ si es un ordinal y no existen biyecciones en $M[G]$ entre κ y un ordinal anterior. Si esto sucede, tampoco hay tales biyecciones en M , luego κ es un cardinal^M . El problema es garantizar el recíproco.

Cuando un cardinal^M continúa siendo un cardinal en $M[G]$ se dice que *se conserva*, mientras que si deja de serlo se dice que *se colapsa*. En estos términos, lo que buscamos son condiciones sobre un c.p.o. que garanticen la conservación de los cardinales en extensiones genéricas. Conviene introducir algunos conceptos más precisos:

Definición 5.1 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal ^{M} . Diremos que \mathbb{P} *conserva cardinales* $\geq \kappa$ ($\leq \kappa$) si para todo filtro genérico G y todo ordinal $\alpha \in M$ tal que $\alpha \geq \kappa$ ($\alpha \leq \kappa$) se cumple que

$$\alpha \text{ es un cardinal}^M \leftrightarrow \alpha \text{ es un cardinal}^{M[G]}.$$

Según acabamos de comentar, la implicación \leftarrow se da siempre, luego la conservación de cardinales equivale a que se dé la implicación \rightarrow . Así mismo es suficiente probarla para ordinales $\alpha > \omega$, pues ω y los números naturales son cardinales en todo modelo transitivo.

Diremos que \mathbb{P} *conserva cardinales* si esta implicación se cumple para todo ordinal $\alpha \in M$, es decir, si “ser un cardinal” es absoluto para $M - M[G]$.

Diremos que \mathbb{P} *conserva cofinalidades* $\geq \kappa$ ($\leq \kappa$) si para todo filtro genérico G y todo ordinal límite $\lambda \in M$ tal que $\text{cf}^M \lambda \geq \kappa$ ($\text{cf}^M \lambda \leq \kappa$) se cumple $\text{cf}^M \lambda = \text{cf}^{M[G]} \lambda$.

Diremos que \mathbb{P} *conserva cofinalidades* si esto se cumple para todo ordinal límite $\lambda \in M$, es decir, si $\text{cf} \lambda$ es absoluto para $M - M[G]$.

La conservación de cofinalidades y la conservación de cardinales están estrechamente relacionadas:

Teorema 5.2 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal ^{M} . Entonces:*

- a) *Si \mathbb{P} conserva cofinalidades $\geq \kappa$ y κ es regular ^{M} , entonces \mathbb{P} conserva cardinales $\geq \kappa$.*
- b) *Si \mathbb{P} conserva cofinalidades $\leq \kappa$ entonces \mathbb{P} conserva cardinales $\leq \kappa$.*
- c) *Si \mathbb{P} conserva cofinalidades entonces \mathbb{P} conserva cardinales.*

DEMOSTRACIÓN: Sea α un cardinal ^{M} , $\alpha \geq \kappa$, $\alpha > \omega$. Si α es regular ^{M} , entonces $\text{cf}^M \alpha = \alpha \geq \kappa$, luego $\text{cf}^{M[G]} \alpha = \text{cf}^M \alpha = \alpha$ y por lo tanto α es un cardinal regular ^{$M[G]$} .

Si α es singular ^{M} , como κ es regular ^{M} ha de ser $\alpha > \kappa$. Tenemos que α es un cardinal límite ^{M} , luego $\bigwedge \beta (\kappa < \beta < \alpha \rightarrow \bigvee \mu (\beta < \mu < \alpha \wedge \mu \text{ es regular}^M))$, pero $\kappa < \beta < \mu < \alpha \wedge \mu \text{ es regular}^M$ implica que $\kappa \leq \mu = \text{cf}^M \mu$, luego por hipótesis $\text{cf}^{M[G]} \mu = \text{cf}^M \mu = \mu$, luego μ es regular ^{$M[G]$} . Por consiguiente tenemos que $\bigwedge \beta (\kappa < \beta < \alpha \rightarrow \bigvee \mu (\beta < \mu < \alpha \wedge \mu \text{ es un cardinal}^{M[G]})$). Esto implica que α es un cardinal ^{$M[G]$} .

La prueba de b) es análoga.

c) Es consecuencia de a), pues conservar cofinalidades o cardinales es conservar cofinalidades o cardinales $\geq \aleph_1^M$. ■

En realidad para que un c.p.o. conserve cofinalidades basta con que cumpla lo siguiente:

Teorema 5.3 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal ^{M} . Entonces \mathbb{P} conserva cofinalidades $\geq \kappa$ ($\leq \kappa$) si y sólo si para todo filtro genérico G y todo ordinal $\alpha \in M$ tal que $\alpha \geq \kappa$ ($\alpha \leq \kappa$) se cumple

$$\alpha \text{ regular}^M \rightarrow \alpha \text{ regular}^{M[G]}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\lambda \in M$ tal que $\text{cf}^M \lambda \geq \kappa$ ($\leq \kappa$). Sea $f \in M$ tal que $f : \text{cf}^M \lambda \rightarrow \lambda$ cofinal creciente. Entonces $f \in M[G]$ y por [13.56] concluimos que $\text{cf}^{M[G]} \text{cf}^M \lambda = \text{cf}^{M[G]} \lambda$. Pero $\text{cf}^M \lambda$ es regular ^{M} , luego por hipótesis es regular ^{$M[G]$} , es decir, $\text{cf}^{M[G]} \text{cf}^M \lambda = \text{cf}^M \lambda$, de donde $\text{cf}^{M[G]} \lambda = \text{cf}^M \lambda$. ■

Resulta natural preguntarse si es posible que un c.p.o. conserve cardinales pero no conserve cofinalidades. Según el teorema anterior, para que esto ocurra es necesario que un cardinal regular ^{M} pase a ser singular ^{$M[G]$} . En particular será límite ^{$M[G]$} y, si el c.p.o. conserva cardinales, también será límite ^{M} . En resumen, ha de haber un cardinal límite regular ^{M} que pase a ser singular en $M[G]$. Obviamente este cardinal no puede ser \aleph_0 , luego llegamos a que M ha de contener un cardinal inaccesible. En otras palabras, en ausencia de cardinales inaccesibles, conservar cardinales equivale a conservar cofinalidades.

Ahora ya podemos dar condiciones para que un c.p.o. conserve cardinales y cofinalidades.

Definición 5.4 Una anticadena en un c.p.o. \mathbb{P} es un conjunto de condiciones incompatibles dos a dos. Si κ es un cardinal, se dice que \mathbb{P} cumple la *condición de cadena* κ (c.c. κ) si toda anticadena en \mathbb{P} tiene cardinal menor que κ .

La c.c. \aleph_1 se llama también *condición de cadena numerable*, pues equivale a que toda anticadena sea numerable.

Vamos a probar que todo c.p.o. con la condición de cadena κ conserva cofinalidades $\geq \kappa$. Para ello nos basaremos en el siguiente resultado técnico, que tiene interés y gran utilidad por sí mismo:

Teorema 5.5 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., $A, B \in M$ y κ un cardinal ^{M} tal que $(\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ) ^{M} . Sea G un filtro genérico y $f \in M[G]$ tal que $f : A \rightarrow B$. Entonces existe una aplicación $F : A \rightarrow (\mathcal{P}B)^M$ de modo que $F \in M$, $\bigwedge a \in A |F(a)|^M < \kappa$ y $\bigwedge a \in A f(a) \in F(a)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $f = \tau_G$ y sea $F : A \rightarrow (\mathcal{P}B)^M$ la aplicación dada por

$$F(a) = \{b \in B \mid \forall p \in \mathbb{P} p \Vdash (\tau : \check{A} \rightarrow \check{B} \wedge \tau(\check{a}) = \check{b})\}.$$

Claramente $F \in M$. Sea $a \in A$ y $b = f(a)$. Así $\tau_G : A \rightarrow B \wedge \tau_G(a) = b$, luego existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash (\tau : \check{A} \rightarrow \check{B} \wedge \tau(\check{a}) = \check{b})$, con lo que $b \in F(a)$.

Por el axioma de elección ^{M} existe una función $Q \in M$ tal que $Q : F(a) \rightarrow \mathbb{P}$ y para todo $b \in F(a)$ se cumple $Q(b) \Vdash (\tau : \check{A} \rightarrow \check{B} \wedge \tau(\check{a}) = \check{b})$.

Si $b, b' \in F(a)$, $b \neq b'$, entonces $Q(b) \perp Q(b')$, pues si existiera una extensión común $r \in \mathbb{P}$, existiría un filtro genérico H con $r \in H$, y en $M[H]$ se cumpliría que $\tau_H : A \rightarrow B$ y $b = \tau_H(a) = b'$, contradicción.

En particular Q es inyectiva y $Q[F(a)]$ es una anticadena en \mathbb{P} (en M). Por lo tanto $|F(a)|^M = |Q[F(a)]|^M < \kappa$. ■

En definitiva, el teorema anterior afirma que una aplicación f en una extensión genérica (con dominio en el modelo base M) no puede, por regla general, ser conocida desde M , pero sí puede ser “aproximada” por una función multivaluada. La aproximación será mejor cuanto menor sea la condición de cadena que cumple el c.p.o.

Teorema 5.6 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal regular ^{M} tal que $(\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ) ^{M} . Entonces \mathbb{P} conserva cofinalidades y cardinales $\geq \kappa$. En particular, si $(\mathbb{P}$ cumple la c.c.n.) ^{M} entonces \mathbb{P} conserva cofinalidades y cardinales.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que \mathbb{P} conserva cofinalidades $\geq \kappa$. En caso contrario existe un filtro genérico G y un cardinal ^{M} $\mu \geq \kappa$ tal que μ es regular ^{M} y singular ^{$M[G]$} . Sean entonces $\omega \leq \alpha < \mu$ y $f \in M[G]$ de modo que $f : \alpha \rightarrow \mu$ cofinal. Por el teorema anterior existe $F \in M$ de modo que $F : \alpha \rightarrow (\mathcal{P}\mu)^M$ y

$$\bigwedge \beta < \alpha |F(\beta)|^M < \kappa \wedge \bigwedge \beta < \alpha f(\beta) \in F(\beta).$$

Sea $S = \bigcup_{\beta < \alpha} F(\beta)$. En M , el conjunto S es una unión de menos de κ conjuntos de cardinal menor que κ . Por la regularidad de κ ha de ser $|S|^M < \kappa$. Ahora bien, para todo $\beta < \alpha$ tenemos que $f(\beta) \in S$, lo que implica que S no está acotado en κ . Esto es una contradicción, pues un cardinal regular no puede tener subconjuntos no acotados de cardinal menor que él mismo. ■

No todos los c.p.o.s que vamos a considerar cumplirán la condición de cadena numerable, así que vamos a dar otro criterio que nos garantice que un c.p.o. conserva cardinales y cofinalidades por debajo de un cardinal dado.

Definición 5.7 *Sea κ un cardinal. Diremos que un c.p.o. \mathbb{P} es κ -cerrado si para todo ordinal $\alpha < \kappa$ y toda sucesión $\{p_\beta\}_{\beta < \alpha}$ decreciente en \mathbb{P} (es decir, tal que $\beta < \gamma < \alpha \rightarrow p_\gamma \leq p_\beta$) se cumple que $\bigvee q \in \mathbb{P} \bigwedge \beta < \alpha q \leq p_\beta$.*

Vamos a probar que los c.p.o.s κ -cerrados conservan cofinalidades y cardinales $\leq \kappa$. Al igual que en el caso de la condición de cadena κ , demostraremos primero un resultado técnico de interés en sí mismo.

Teorema 5.8 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal ^{M} tal que $(\mathbb{P}$ es κ -cerrado) ^{M} . Sea G un filtro genérico y supongamos que $B \in M[G]$ cumple $B \subset M$ y $|B|^{M[G]} < \kappa$. Entonces $B \in M$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha = |B|^{M[G]} < \kappa$, sea $f \in M[G]$ tal que $f : \alpha \rightarrow B$ biyectiva. Por el teorema 4.36 existe un $A \in M$ tal que $f : \alpha \rightarrow A$. Es

suficiente probar que $f \in M$, pues entonces también estará en M su rango B . Llamemos $K = (A^\alpha)^M = A^\alpha \cap M$. Hemos de probar que $f \in K$. En caso contrario, si $f = \tau_G$, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash (\tau : \check{\alpha} \longrightarrow \check{A} \wedge \tau \notin \check{K})$.

Vamos a ver que existen sucesiones $\{p_\eta\}_{\eta \leq \alpha}$ y $\{z_\eta\}_{\eta < \alpha}$ en M tales que

- a) $p_\eta \in \mathbb{P} \wedge z_\eta \in A$,
- b) $p_0 = p$,
- c) $\bigwedge \epsilon \eta (\epsilon \leq \eta \leq \alpha \rightarrow p_\eta \leq p_\epsilon)$,
- d) $p_{\eta+1} \Vdash \tau(\check{\eta}) = \check{z}_\eta$.

En efecto, por recurrencia y usando el axioma de elección^M podemos construir las como sigue:

Tomamos $p_0 = p$ y supuestos definidos $\{p_\eta\}_{\eta \leq \beta}$ y $\{z_\eta\}_{\eta < \beta}$ para un $\beta < \alpha$ de modo que se cumplan las condiciones anteriores, entonces $p_\beta \leq p_0 = p$, luego $p_\beta \Vdash \tau : \check{\alpha} \longrightarrow \check{A}$, luego $p_\beta \Vdash \bigvee x \in \check{A} \tau(\check{\beta}) = x$. Por 4.29 k) existen una condición $p_{\beta+1} \leq p_\beta$ y un $z_\beta \in A$ tales que $p_{\beta+1} \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{z}_\beta$.

Supuestos definidos $\{p_\eta\}_{\eta < \lambda}$ y $\{z_\eta\}_{\eta < \lambda}$ para un ordinal límite $\lambda < \alpha$, como \mathbb{P} es κ -cerrado^M existe una condición $p_\lambda \in \mathbb{P}$ tal que $p_\lambda \leq p_\eta$ para todo $\eta < \lambda$, y entonces $\{p_\eta\}_{\eta \leq \lambda}$ y $\{z_\eta\}_{\eta < \lambda}$ cumplen todas las condiciones.

Sea $g = \{z_\eta\}_{\eta < \alpha} \in M$. Tenemos que $g \in K$. Sea H un filtro genérico tal que $p_\alpha \in H$ (con lo que $\bigwedge \eta \leq \alpha p_\eta \in H$). Por la propiedad c), $\bigwedge \eta < \alpha \tau_H(\eta) = z_\eta$, luego $\tau_H = g \in K$, cuando por otra parte $p_0 \Vdash \tau \notin \check{K}$, contradicción. ■

De este modo, en una extensión por un c.p.o. κ -cerrado no aparecen nuevos subconjuntos de un conjunto dado con cardinal menor que κ . Con esto es fácil probar que ningún cardinal menor que κ puede colapsarse:

Teorema 5.9 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal^M tal que $(\mathbb{P}$ es κ -cerrado)^M. Entonces \mathbb{P} conserva cofinalidades y cardinales $\leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que \mathbb{P} conserva cofinalidades $\leq \kappa$. Si no fuera así, por 5.3 existiría un filtro genérico G y un ordinal $\mu \leq \kappa$ de modo que μ es regular^M pero es singular^{M[G]}. Sea $\alpha < \mu$ y $f \in M[G]$ tal que $f : \alpha \longrightarrow \mu$ cofinal. Claramente $|f|^{M[G]} = |\alpha|^{M[G]} \leq \alpha < \kappa$, luego por el teorema anterior $f \in M$, en contradicción con que μ es regular^M. ■

Terminamos la sección con el siguiente teorema, cuya prueba es inmediata:

Teorema 5.10 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. que conserve cardinales y G un filtro genérico. Entonces, los términos α^+ y \aleph_α son absolutos para $M - M[G]$, es decir, para todo ordinal $\alpha < \Omega^M$ se cumple $(\alpha^+)^M = (\alpha^+)^{M[G]}$ y $\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha^{M[G]}$.*

5.2 Familias cuasidisjuntas

Intercalamos aquí la demostración de un principio combinatorio que nos hará falta en la sección siguiente:

Definición 5.11 Un conjunto A es una *familia cuasidisjunta* o un *sistema Δ* de raíz r si $\bigwedge xy \in A (x \neq y \rightarrow x \cap y = r)$. Se admite que r sea vacío, en cuyo caso los elementos de A son disjuntos dos a dos.

Teorema 5.12 (Lema de los sistemas Δ) Sea κ un cardinal infinito, $\mu > \kappa$ un cardinal regular tal que $\bigwedge \alpha < \mu |\alpha^{<\kappa}| < \mu$ y sea A un conjunto tal que $|A| \geq \mu$ y $\bigwedge x \in A |x| < \kappa$. Entonces existe una familia cuasidisjunta $B \subset A$ tal que $|B| = \mu$. En particular, toda familia numerable de conjuntos finitos posee una subfamilia cuasidisjunta no numerable.

DEMOSTRACIÓN: Tomando un subconjunto si es necesario, podemos suponer que $|A| = \mu$. Se cumple que

$$\left| \bigcup_{x \in A} x \right| \leq \sum_{x \in A} |x| \leq \sum_{x \in A} \kappa = \mu \cdot \kappa = \mu.$$

Como obviamente no importa cuáles sean los elementos de los elementos de A , no perdemos generalidad si suponemos que son ordinales. Más aún, podemos suponer que $\bigcup_{x \in A} x \subset \mu$.

Si $x \in A$, tenemos que $|x| < \kappa$, luego $\text{ord } x < \kappa$. Podemos descomponer

$$A = \bigcup_{\alpha < \kappa} \{x \in A \mid \text{ord } x = \alpha\}.$$

Como $|A| = \mu$ es regular y $\kappa < \mu$, es necesario que uno de los conjuntos que aparecen en la unión tenga cardinal μ , es decir, existe un ordinal $\rho < \kappa$ tal que el conjunto $\{x \in A \mid \text{ord } x = \rho\}$ tiene cardinal μ . Quedándonos con este subconjunto podemos suponer que $\bigwedge x \in A \text{ ord } x = \rho$.

Para cada $\alpha < \mu$ consideremos el conjunto $\{x \in A \mid x \subset \alpha\}$. A cada uno de sus elementos x le podemos asignar una biyección $g : |x| \rightarrow x$, que será un elemento de $\alpha^{<\kappa}$. Esto nos da una aplicación inyectiva, de modo que

$$|\{x \in A \mid x \subset \alpha\}| \leq |\alpha^{<\kappa}| < \mu.$$

Así pues, existe al menos un $x \in A$ que no está contenido en α . Equivalentemente, el conjunto $\bigcup_{x \in A} x$ no está acotado en μ , luego tiene cardinal μ .

Para cada $x \in A$ sea $f_x : \rho \rightarrow x$ la semejanza. Escribiremos $x(\xi) = f_x(\xi)$, de modo que $x = \{x(\xi) \mid \xi < \rho\}$. Como la unión

$$\bigcup_{x \in A} x = \bigcup_{\xi < \rho} \{x(\xi) \mid x \in A\}$$

tiene cardinal μ , alguno de los conjuntos de la derecha tiene que tener también cardinal μ . Llamemos ξ_0 al menor ordinal (quizá igual a 0) tal que

$$|\{x(\xi_0) \mid x \in A\}| = \mu.$$

La situación es la siguiente:

	⋮		⋮		⋮	
	$x(\xi_0)$		$y(\xi_0)$		$z(\xi_0)$	
ρ	⋮		⋮		⋮	
	$x(1)$		$y(1)$		$z(1)$	
	$x(0)$		$y(0)$		$z(0)$	
	A					

Cada elemento de A es un conjunto $x = \{x(0), x(1), \dots, x(\xi_0), \dots\}$, donde los $x(\xi)$ son ordinales distintos dos a dos (de hecho, si $\eta < \xi$ entonces $x(\eta) < x(\xi)$), pero dos conjuntos x e y pueden tener elementos en común. Por ejemplo, podría darse el caso de que $x(0)$ fuera el mismo ordinal para todo $x \in A$. La fila ξ_0 del esquema anterior es la primera fila en la que aparecen μ ordinales distintos. Sea

$$\alpha_0 = \bigcup_{\substack{x \in A \\ \eta < \xi_0}} x(\eta) + 1.$$

Notemos que si $\eta < \xi_0$ entonces el conjunto $\{x(\eta) \mid x(\eta) + 1 \mid x \in A\}$ está acotado en μ , luego $\bigcup_{x \in A} \{x(\eta) + 1 \mid x \in A\} \in \mu$. Por consiguiente α_0 es el supremo de un conjunto de ξ_0 ordinales menores que μ . Como μ es regular ha de ser $\alpha_0 < \mu$. De este modo, si $\eta < \xi_0$ y $x \in A$, entonces $x(\eta) < \alpha_0$, es decir, todos los ordinales que aparecen antes de la fila ξ_0 son menores que α_0 .

Para cada $x \in A$, llamemos $\bar{x} \in \mu$ a su supremo. Podemos definir recurrentemente una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha < \mu}$ de elementos de A de modo que

$$\bigwedge \alpha < \mu \ x_\alpha(\xi_0) > \alpha_0 \cup \bigcup_{\beta < \alpha} \bar{x}_\beta.$$

En particular, cada x_α es distinto de los anteriores, luego tenemos μ elementos distintos. Eliminando los restantes, podemos suponer que $A = \{x_\alpha \mid \alpha < \mu\}$.

	⋮		⋮		⋮	
	$x_0(\xi_0)$	$x_1(\xi_0)$	⋯	$x_\alpha(\xi_0)$	⋯	
ρ	⋮	⋮		⋮		
	$x_0(1)$	$x_1(1)$	⋯	$x_\alpha(1)$	⋯	
	$x_0(0)$	$x_1(0)$	⋯	$x_\alpha(0)$	⋯	
	A					

Ahora, si $x, y \in A$ son distintos, se cumple que $x \cap y \subset \alpha_0$, pues si $x = x_\alpha$, $y = y_\beta$, para $\alpha < \beta < \mu$, entonces $y(\xi_0) > \alpha_0 \cup \bar{x}$, luego los elementos comunes a x e y han de ser de la forma $y(\delta)$, con $\delta < \xi_0$, luego son todos menores que α_0 .

Para cada $x \in [\alpha_0]^{<\kappa}$ (representamos así el conjunto de los subconjuntos de α_0 de cardinal menor que κ) escogemos una biyección $g : |x| \rightarrow x$, de modo que

tenemos una aplicación inyectiva de $[\alpha_0]^{<\kappa}$ en $\alpha_0^{<\kappa}$. Así, $|[\alpha_0]^{<\kappa}| < |\alpha_0^{<\kappa}| < \mu$ (por hipótesis). En resumen, α_0 tiene menos de μ subconjuntos de cardinal menor que κ . Descomponemos

$$A = \bigcup_{r \in [\alpha_0]^{<\kappa}} \{x \in A \mid x \cap \alpha_0 = r\}.$$

Aplicando una vez más la regularidad de μ concluimos que existe un $r \subset \alpha_0$ tal que el conjunto $B = \{x \in A \mid x \cap \alpha_0 = r\}$ tiene cardinal μ . Ciertamente B es la familia cuasidisjunta que buscábamos, pues si $x, y \in B$, $x \neq y$, sabemos que $x \cap y \subset \alpha_0$, luego

$$x \cap y = x \cap y \cap \alpha_0 = (x \cap \alpha_0) \cap (y \cap \alpha_0) = r \cap r = r.$$

■

5.3 Extensiones con funciones parciales

Hasta ahora hemos visto únicamente dos ejemplos concretos de c.p.o.s, y ambos eran conjuntos de funciones parciales de un conjunto en otro. En esta sección estudiaremos con detalle este tipo de c.p.o.s y veremos que son suficientes para probar la consistencia de una gran variedad de afirmaciones.

Definición 5.13 Sea κ un cardinal infinito y sean I, J conjuntos tales que $\kappa \leq |I|$ y $2 \leq |J|$. Definimos

$$\text{Fn}(I, J, \kappa) = \{p \mid p \subset I \times J \wedge p \text{ es una función} \wedge |p| < \kappa\}.$$

Consideramos en $\text{Fn}(I, J, \kappa)$ el orden parcial dado por $p \leq q \leftrightarrow q \subset p$. De este modo $\text{Fn}(I, J, \kappa)$ es un c.p.o. con máximo $\mathbf{1} = \emptyset$. Claramente es no atómico.

Teorema 5.14 Sea κ un cardinal infinito y sean I, J conjuntos tales que $\kappa \leq |I|$ y $2 \leq |J|$. Entonces $\text{Fn}(I, J, \kappa)$ cumple la c.c. $(|J|^{<\kappa})^+$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu = (|J|^{<\kappa})^+$ y supongamos que $\{p_\alpha\}_{\alpha < \mu}$ es una anticadena en $\text{Fn}(I, J, \kappa)$. Supongamos primero que κ es regular. Entonces si $\alpha < \mu$ se cumple que $|\alpha| \leq |J|^{<\kappa}$, luego $|\alpha^{<\kappa}| = |\alpha|^{<\kappa} \leq (|J|^{<\kappa})^{<\kappa} = |J|^{<\kappa} < \mu$ (donde hemos usado [14.11]).

Tenemos, por tanto, que $\bigwedge \alpha < \mu \ |\alpha^{<\kappa}| < \mu$, por lo que κ y μ cumplen las hipótesis del lema de los sistemas Δ . Sea $D_\alpha = \text{Dominio}(p_\alpha)$. La familia $A = \{D_\alpha\}_{\alpha < \mu}$ tiene cardinal μ , pues $\{p_\alpha \mid \alpha < \mu\} \subset \bigcup_{x \in A} J^x$, luego la unión tiene cardinal μ , mientras que para todo $x \in A$ se cumple que $|x| < \kappa$, luego $|J^x| \leq |J|^{<\kappa} < \mu$. Esto obliga a que $|A| = \mu$.

Por el lema de los sistemas Δ existe un $x \subset \mu$ tal que $\{D_\alpha\}_{\alpha \in x}$ tiene cardinal μ y es una familia cuasidisjunta de raíz r . Sea $B = \{p_\alpha\}_{\alpha \in x}$.

Se cumple que $B \subset \bigcup_{u \in J^r} \{x \in B \mid x|_r = u\}$. Como $|J^r| \leq |J|^{<\kappa} < \mu$ y μ es regular, ha de existir un $u \in J^r$ tal que $|\{x \in B \mid x|_r = u\}| = \mu$. En particular

existen al menos dos elementos distintos $x, y \in B$ tales que $x|_r = y|_r = u$. Ahora bien, r es precisamente la intersección de los dominios de x e y , pues ambos están en B , y como x e y coinciden en su dominio común admiten como extensión la condición $x \cup y$, en contradicción con que ambos pertenecen a la anticadena de partida, luego deberían ser incompatibles.

Supongamos ahora que κ es singular. Entonces

$$\{p_\alpha | \alpha < \mu\} \subset \bigcup_{\nu < \kappa} \{p_\alpha | \alpha < \mu \wedge |p_\alpha| < \nu^+\}.$$

Como μ es regular, existe un $\nu < \kappa$ tal que $\{p_\alpha | \alpha < \mu \wedge |p_\alpha| < \nu^+\}$ tiene cardinal μ , y es una anticadena de cardinal mayor o igual que $(|J|^{<\nu^+})^+$ en $\text{Fn}(I, J, \nu^+)$, en contradicción con el caso ya probado. ■

No es difícil probar que $\text{Fn}(I, J, \kappa)$ tiene anticadenas de cardinal $|J|^{<\kappa}$, por lo que el teorema anterior no puede mejorarse. Por otra parte tenemos:

Teorema 5.15 *Sean I, J conjuntos y κ un cardinal regular tal que $\kappa \leq |I|$ y $2 \leq |J|$. Entonces $\text{Fn}(I, J, \kappa)$ es κ -cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha < \kappa$ y $\{p_\beta\}$ una sucesión decreciente en $\text{Fn}(I, J, \kappa)$. Sea $q = \bigcup_{\beta < \alpha} p_\beta$. Claramente q es una función y $q \subset I \times J$. Como κ es regular $|q| < \kappa$. Por lo tanto $q \in \text{Fn}(I, J, \kappa)$ y claramente $\bigwedge \beta < \alpha q \leq p_\beta$. ■

Ahora podemos aplicar los resultados que conocemos sobre conservación de cardinales:

Teorema 5.16 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sean $I, J \in M$ y κ un cardinal regular^M de modo que $2 \leq |J|$ y $\kappa \leq |I|^M$. Sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(I, J, \kappa)^M$.*

- a) \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades $\leq \kappa$,
- b) Si se cumple $(|J| \leq 2^{<\kappa})^M$, entonces \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades $\geq ((2^{<\kappa})^+)^M$,
- c) Si se cumple $(|J| \leq \kappa \wedge 2^{<\kappa} = \kappa)^M$, entonces \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades.

DEMOSTRACIÓN: a) y b) son aplicaciones inmediatas de 5.6 y 5.9 y los dos teoremas anteriores. Para el apartado b) observamos que (en M) se cumple que $|J|^{<\kappa} \leq (2^{<\kappa})^{<\kappa} = 2^{<\kappa} \leq |J|^{<\kappa}$, luego $|J|^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$ y tenemos que \mathbb{P} cumple la condición de cadena $(2^{<\kappa})^+$.

En el caso c) tenemos por a) y b) que \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades $\leq \kappa$ y $\geq (\kappa^+)^M$, luego conserva cardinales y cofinalidades. ■

En resumen, las condiciones que han de darse para que el c.p.o. $\text{Fn}(I, J, \kappa)^M$ conserve cardinales y cofinalidades son que en M :

$$2 \leq |J| \leq \kappa = 2^{<\kappa} \leq |I|.$$

La condición $\kappa = 2^{<\kappa}$ se da, por ejemplo, si se cumple la hipótesis del continuo generalizada bajo κ , es decir, si $2^\mu = \mu^+$ para todo cardinal infinito $\mu < \kappa$.

Ahora estamos en condiciones de estudiar la función del continuo en una extensión genérica respecto a un preorden de funciones parciales. El hecho básico es que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} = \text{Fn}(I, J, \kappa)^M$ y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces

$$f_G = \bigcup_{p \in G} p \in M[G]$$

cumple que $f_G : I \rightarrow J$, pues para cada $i \in I$ el conjunto

$$D_i = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall j \in J (i, j) \in p\} \in M$$

es denso en \mathbb{P} , luego $G \cap D_i \neq \emptyset$ y esto se traduce en que f_G está definida en i .

Ya hemos usado esto en varias ocasiones, pero el argumento se puede refinar. En efecto, supongamos ahora que $\mathbb{P} = \text{Fn}(\alpha \times \kappa, 2, \kappa)^M$, donde $\alpha \in M$ es un ordinal y κ es un cardinal^M infinito. En principio tenemos una función $f_G : \alpha \times \kappa \rightarrow 2$, a partir de la cual podemos definir, para cada $\beta < \alpha$, la función $f_\beta : \kappa \rightarrow 2$ dada por $f_\beta(\delta) = f_G(\beta, \delta)$. Sucede que las funciones f_β están obviamente en $M[G]$ y son distintas dos a dos, pues si $\beta < \gamma < \alpha$, entonces el conjunto

$$D_{\beta\gamma} = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall \delta \in \kappa ((\beta, \delta), (\gamma, \delta) \in \text{Dominio}(p) \wedge p(\beta, \delta) \neq p(\gamma, \delta))\} \in M$$

es denso en \mathbb{P} , luego corta a G y eso se traduce en que existe un $\delta < \kappa$ tal que $f_\beta(\delta) \neq f_\gamma(\delta)$.

Así pues, la aplicación $F : \alpha \rightarrow {}^{(\kappa}2)^{M[G]}$ dada por $F(\beta) = f_\beta$ es inyectiva y claramente $F \in M[G]$. Esto prueba que $(|\alpha| \leq 2^\kappa)^{M[G]}$.

A partir de aquí es fácil construir modelos de ZFC en los que, por ejemplo, $2^{\aleph_0} \geq \aleph_5$, con lo que tenemos probada la independencia de la hipótesis del continuo. No damos los detalles ahora porque dentro de poco estaremos en condiciones de calcular exactamente la función del continuo en una extensión como la que acabamos de considerar. De momento añadamos tan sólo que si llamamos $\mathbb{Q} = \text{Fn}(\kappa, 2, \kappa)^M$, entonces las funciones f_β anteriores son \mathbb{Q} -genéricas sobre M , en el sentido de que $G_\beta = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \subset f_\beta\}$ es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M y obviamente $f_\beta = \bigcup_{q \in G_\beta} q$.

Por consiguiente, podemos decir que los conjuntos $a_\beta = f_\beta^{-1}[\{1\}]$ son subconjuntos genéricos de κ , y por ello es habitual referirse a $\text{Fn}(\alpha \times \kappa, 2, \kappa)$ como “el c.p.o. que añade α subconjuntos genéricos de κ ”. La extensión $M[G]$ es “la extensión de M que resulta de añadir α subconjuntos genéricos de κ ”.

Ahora necesitamos cotas superiores para el número de subconjuntos de un cardinal dado en una extensión genérica. Para ello hemos de hacer ciertas cuentas, la primera y más elemental de las cuales es la siguiente:

Teorema 5.17 Sea I un conjunto y κ un cardinal, de modo que $\aleph_0 \leq \kappa \leq |I|$. Sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(I, 2, \kappa)$. Entonces $|\mathbb{P}| = |I|^{<\kappa} \leq |I|^\kappa$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada cardinal $\mu < \kappa$, el número de subconjuntos de I de cardinal μ es $|I|^\mu$ y, para cada uno de estos subconjuntos, el número de aplicaciones de él en 2 es 2^μ , luego en total hay $|I|^\mu 2^\mu = |I|^\mu$ condiciones con dominio de cardinal μ . El número total de condiciones será

$$|\mathbb{P}| = \sum_{\mu < \kappa} |I|^\mu = |I|^{<\kappa} \leq \sum_{\mu < \kappa} |I|^\mu = \kappa \cdot |I|^\mu = |I|^\kappa.$$

■

La idea básica es que para contar conjuntos hemos de contar nombres posibles, y para contar nombres hemos de contar las condiciones. De hecho bastará contar nombres de cierto tipo especial:

Definición 5.18 Sea \mathbb{P} un c.p.o. y sean σ, τ dos \mathbb{P} -nombres. Diremos que τ es un *buen nombre* para un subconjunto de σ si para cada $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ existe una anticadena A_π de \mathbb{P} tal que

$$\tau = \bigcup_{\pi} \{\pi\} \times A_\pi,$$

es decir, si $\text{Dominio}(\tau) \subset \text{Dominio}(\sigma)$ y cada $\pi \in \text{Dominio}(\tau)$ aparece acompañado de condiciones incompatibles dos a dos.

Claramente, si \mathbb{P} cumple la c.c. κ entonces tiene a lo sumo $|\mathbb{P}|^{<\kappa}$ anticadenas, y habrá tantos buenos nombres para subconjuntos de σ como asignaciones posibles $\pi \mapsto A_\pi$, es decir, el número de buenos nombres para subconjuntos de σ es a lo sumo

$$(|\mathbb{P}|^{<\kappa})^{|\text{Dominio}(\sigma)|}. \quad (5.1)$$

En particular los buenos nombres para subconjuntos de σ forman un conjunto (mientras que los nombres posibles en general para un subconjunto de σ forman una clase propia).

Seguidamente demostramos que todo subconjunto de σ_G en una extensión genérica arbitraria puede nombrarse con un buen nombre para un subconjunto de σ . Así pues, el conjunto de los buenos nombres para subconjuntos de σ ejerce la misma función que el conjunto de nombres S que considerábamos en la demostración de que $M[G]$ cumple el axioma de partes, con la diferencia de que es un conjunto mucho más reducido, con lo que su cardinal nos proporcionará cotas finas de la función del continuo.

Teorema 5.19 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y $\sigma, \mu \in M^{\mathbb{P}}$. Entonces existe un buen nombre $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ para un subconjunto de σ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash (\mu \subset \sigma \rightarrow \mu = \tau).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $D = \text{Dominio}(\sigma)$. Usando el lema de Zorn y el axioma de elección en M definimos una sucesión $\{A_\pi\}_{\pi \in D} \in M$ tal que para cada $\pi \in D$ el conjunto A_π cumpla:

- a) A_π es una anticadena en \mathbb{P} .
- b) $\bigwedge p \in A_\pi \ p \Vdash \pi \in \mu$.
- c) A_π es maximal para a) y b) (respecto a la inclusión).

Definimos

$$\tau = \bigcup_{\pi \in D} \{\pi\} \times A_\pi \in M,$$

que claramente es un buen nombre para un subconjunto de σ . Hemos de probar que cumple lo pedido.

Sea G un filtro genérico y supongamos que $\mu_G \subset \sigma_G$. Sea $a \in \mu_G$. Entonces $a = \pi_G$, con $\pi \in D$. No puede ser $A_\pi \cap G = \emptyset$, pues entonces, por 4.8 existiría un $q \in G$ incompatible con todos los elementos de A_π . Pasando a una extensión, podemos tomarlo de modo que $q \Vdash \pi \in \mu$, con lo que $A_\pi \cup \{q\}$ contradice la maximalidad de A_π . Así pues, existe $p \in A_\pi \cap G$, y entonces $(\pi, p) \in \tau$, luego $a = \pi_G \in \tau_G$.

Recíprocamente, si $a = \tau_G$, entonces $a = \pi_G$, con $(\pi, p) \in \tau$ y $p \in G$. Entonces $p \in A_\pi$, luego $p \Vdash \pi \in \mu$, luego $a = \pi_G \in \mu_G$.

Hemos probado que $\mu_G = \tau_G$, luego $\mu_G \subset \sigma_G \rightarrow \mu_G = \tau_G$. ■

En particular, este teorema nos da la siguiente estimación de la función del continuo:

Teorema 5.20 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ y κ un cardinal ^{M} tal que, en M , el conjunto de buenos nombres para subconjuntos de σ tenga cardinal $\leq \kappa$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces en $M[G]$ se cumple que $2^{|\sigma_G|} \leq |\kappa|$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha < \kappa} \in M$ una enumeración de los buenos nombres para subconjuntos de σ en M . Sea $\pi = \{(\text{p.o.}(\dot{\alpha}, \tau_\alpha), \mathbb{1}) \mid \alpha < \kappa\} \in M^{\mathbb{P}}$ y sea $f = \pi_G \in M[G]$.

Claramente f es una aplicación de dominio κ y $\bigwedge \alpha < \kappa \ f(\alpha) = \tau_{\alpha G}$. Si $x \in (\mathcal{P}\sigma_G)^{M[G]}$, entonces $x = \mu_G$, para cierto $\mu \in M^{\mathbb{P}}$. Por el teorema anterior existe $\alpha < \kappa$ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash (\mu \subset \sigma \rightarrow \mu = \tau_\alpha).$$

Puesto que $\mu_G \subset \sigma_G$, de hecho $x = \mu_G = \tau_{\alpha G} = f(\alpha)$. Así pues, $(\mathcal{P}\sigma_G)^{M[G]}$ está contenido en el rango de f y así, en $M[G]$, se cumple $2^{|\sigma_G|} = |\mathcal{P}\sigma_G| \leq |\kappa|$. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 5.21 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y, en M , sean κ , μ y ν cardinales que cumplan $\kappa < \mu$, κ regular, $2^{<\kappa} = \kappa$, $\mu^\kappa = \mu$. Sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(\mu \times \kappa, 2, \kappa)^M$ y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Alternativamente, sea μ un cardinal infinito arbitrario, $\kappa = \omega$ y $\mathbb{P} = \text{Fn}(\mu \times \omega, 2, \omega)$. Entonces M y $M[G]$ tienen los mismos cardinales y cofinalidades, y además*

$$(2^\nu)^{M[G]} = \begin{cases} (2^\nu)^M & \text{si } \nu < \kappa, \\ (\mu^\nu)^M & \text{si } \kappa \leq \nu, \\ (2^\nu)^M & \text{si } \mu \leq \nu. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Por 5.16 tenemos que \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades (bajo las dos hipótesis alternativas). Como \mathbb{P} es κ -cerrado ^{M} , el teorema 5.8 nos da que si $\nu < \kappa$ entonces $(\mathcal{P}\nu)^M = (\mathcal{P}\nu)^{M[G]}$, de donde $(2^\nu)^M = (2^\nu)^{M[G]}$ (una biyección en M de $(\mathcal{P}\nu)^M$ con un cardinal es también una biyección en $M[G]$ de $(\mathcal{P}\nu)^{M[G]}$ con un cardinal).

Supongamos ahora que $\kappa \leq \nu$. Según hemos visto tras 5.16, se cumple $(\mu \leq 2^\kappa)^{M[G]}$. Por consiguiente,

$$(\mu^\nu)^{M[G]} \leq ((2^\kappa)^\nu)^{M[G]} = (2^\nu)^{M[G]}.$$

Por otra parte,

$$(\mu^\nu)^M = {}^\nu\mu \cap M \subset {}^\nu\mu \cap M[G] = (\mu^\nu)^{M[G]},$$

luego $(\mu^\nu)^M \leq (\mu^\nu)^{M[G]} \leq (2^\nu)^{M[G]}$.

Para probar la otra desigualdad vamos a contar los buenos nombres para subconjuntos de $\check{\nu}$ en M . Según 5.17 tenemos que $|\mathbb{P}|^M = (\mu^{<\kappa})^M \leq (\mu^\kappa)^M = \mu$, por hipótesis (y en el caso $\kappa = \omega$ también es claro que $(\mu^{<\kappa})^M = \mu$). Por 5.14 sabemos que \mathbb{P} cumple la condición de cadena κ^+ en M , luego el número de buenos nombres para subconjuntos de $\check{\nu}$ en M es a lo sumo

$$((|\mathbb{P}|^{<\kappa^+})^{|\text{Dominio}(\check{\nu})|})^M \leq ((\mu^\kappa)^\nu)^M = (\mu^\nu)^M.$$

Según el teorema anterior, $(2^\nu)^{M[G]} \leq (\mu^\nu)^M$, luego tenemos la igualdad $(2^\nu)^{M[G]} = (\mu^\nu)^M$. En particular, si $\mu \leq \nu$ queda $(2^\nu)^{M[G]} \leq (2^\nu)^M$. ■

Así, en las hipótesis del teorema anterior, el c.p.o. \mathbb{P} altera únicamente la función del continuo de M en el intervalo κ - μ . Concretamente convierte en 2^ν a lo que en M era μ^ν . En particular $(2^\kappa)^{M[G]} = (\mu^\kappa)^M = \mu$. Veamos algunos casos particulares.

Teorema 5.22 *Si ZFC es consistente, también lo es ZFC más la hipótesis del continuo generalizada más $V \neq L$ (concretamente, es consistente que existan subconjuntos no constructibles de ω).*

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC+ $V = L$ y sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega \times \omega, 2, \omega)$. Sea G un filtro genérico. Por el teorema anterior M y

$M[G]$ tienen los mismos cardinales y cofinalidades y como M cumple la HCG, si ν es un cardinal infinito ^{M} $[G]$, tenemos que

$$(2^\nu)^{M[G]} = (\omega^\nu)^M = (2^\nu)^M = (\nu^+)^M = (\nu^+)^{M[G]},$$

luego $M[G]$ cumple también la HCG. La función genérica $f_G : \omega \times \omega \rightarrow 2$ determina un subconjunto genérico de $\omega \times \omega$ (que en particular no está en M). A partir de una biyección (en M) entre ω y $\omega \times \omega$ obtenemos fácilmente un subconjunto de ω en $M[G]$ que no está en M , con lo que no es constructible en $M[G]$. ■

Equivalentemente, hemos probado que el axioma de constructibilidad no puede demostrarse ni siquiera suponiendo la hipótesis del continuo generalizada.

Teorema 5.23 *Si ZFC es consistente también lo es la teoría que resulta de añadir como axioma $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, o bien $2^{\aleph_0} = \aleph_5$, o bien $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$, o $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ o, en general, cualquier axioma que identifique a 2^{\aleph_0} con cualquier cardinal de cofinalidad no numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo numerable de $ZFC+V=L$. Sea κ un cardinal ^{M} de cofinalidad no numerable (en M). Para los ejemplos del enunciado tomaríamos $\kappa = \aleph_2^M$, o bien $\kappa = \aleph_5^M$, etc. Sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(\kappa \times \omega, 2, \omega)$ y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Ciertamente $(2^{<\aleph_0} = \aleph_0)^M$ y por la HCG ^{M} se cumple $(\kappa^{\aleph_0} = \kappa)^M$ (aquí usamos que κ tiene cofinalidad no numerable). El teorema 5.21 nos da entonces que $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = (\kappa^{\aleph_0})^M = \kappa$. ■

Ejemplo Si usamos $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega_2 \times \omega, 2, \aleph_0)^M$ a partir de un modelo M que cumpla la HCG obtenemos un modelo en el que

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2 \wedge \bigwedge \alpha > 1 \ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Las comprobaciones son todas rutinarias: La hipótesis $2^{<\kappa} = \kappa$ de 5.21 se cumple siempre que partamos de un modelo con la HCG. La hipótesis $\mu^\kappa = \mu$ es en nuestro caso $\aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_2$, que se cumple (en M) también por la HCG. Por 5.21 tenemos, pues, que

$$(2^{\aleph_1})^{M[G]} = (\aleph_2^{\aleph_1})^M = \aleph_2^M = \aleph_2^{M[G]}.$$

Similarmente $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = \aleph_2^{M[G]}$ y si $\alpha > 1$ es un ordinal en M , entonces

$$(2^{\aleph_\alpha})^{M[G]} = (\aleph_2^{\aleph_\alpha})^M = (2^{\aleph_\alpha})^M = \aleph_{\alpha+1}^M = \aleph_{\alpha+1}^{M[G]}.$$

■

Ejemplo Si usamos $\text{Fn}(\omega_{\omega+1} \times \omega, 2, \aleph_0)^M$ obtenemos la consistencia de

$$\bigwedge n < \omega \ 2^{\aleph_n} = \aleph_{\omega+1} \wedge \bigwedge \alpha \geq \omega \ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

■

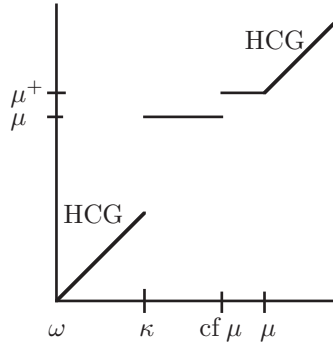
Ejemplo Si usamos $\text{Fn}(\omega_{\aleph_8} \times \omega_3, 2, \aleph_3)$ obtenemos la consistencia de

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_2 \wedge 2^{\aleph_2} = \aleph_3 \wedge 2^{\aleph_3} = \aleph_8 \wedge \dots \wedge 2^{\aleph_7} = \aleph_8 \wedge$$

$$\bigwedge \alpha (8 \leq \alpha \leq \omega_8 \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\omega_8+1}) \wedge \bigwedge \alpha (\omega_8 \leq \alpha \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}).$$

■

El caso totalmente general (tomando $\mathbb{P} = \text{Fn}(\mu \times \kappa, 2, \kappa)$ con $\kappa < \text{cf } \mu$) es:



Si es consistente que exista un cardinal inaccesible, también lo es que sea precisamente 2^{\aleph_0} . En particular es consistente que exista un cardinal débilmente inaccesible que no sea fuertemente inaccesible.

Teorema 5.24 *Las teorías siguientes son equiconsistentes:*

- a) $ZFC + \forall \kappa \ \kappa$ es inaccesible.
- b) $ZFC + HCG + \forall \kappa \ \kappa$ es inaccesible.
- c) $ZFC + 2^{\aleph_0}$ es inaccesible.
- d) $ZFC + \forall \kappa < 2^{\aleph_0} \ \kappa$ inaccesible.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que la consistencia de b), c) o d) implica la de a). La consistencia de a) implica la de b) porque en a) se prueba que L es un modelo de b) (ver la demostración de 3.22). Falta ver que la consistencia de b) implica la de c) y la de d). Trabajando en b), el teorema de reflexión nos da un modelo transitivo numerable M de b). Sea κ un cardinal (fuertemente) inaccesible ^{M} y sea $\mu = \kappa$ para probar la consistencia de c) o $\mu = (\kappa^+)^M$ para d). Tomamos $\mathbb{P} = \text{Fn}(\mu \times \omega, 1, \aleph_0)$ y un filtro genérico G , con el que construimos la extensión genérica $M[G]$. Por 5.16 tenemos que \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades. Como los cardinales en M siguen siendo cardinales en $M[G]$, tenemos que κ sigue siendo un cardinal límite en $M[G]$ y, como las cofinalidades son las mismas, sigue siendo regular. Así pues κ es (débilmente) inaccesible ^{$M[G]$} . Por 5.21 tenemos que en $M[G]$ se cumple además $2^{\aleph_0} = \mu$, luego $M[G]$ es un modelo de c) o d). ■

Ahora vamos a dar el mejor resultado que podemos probar acerca de la función del continuo mediante las técnicas con las que contamos de momento.

Teorema 5.25 *Sea M un modelo transitivo numerable de $\text{ZFC}+V=L$. Sea $n \in \omega$ y sean $\kappa_1 < \dots < \kappa_n$ cardinales regulares ^{M} y $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ cardinales ^{M} de manera que $\kappa_i < \text{cf}^M \mu_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces existe un modelo transitivo numerable N de ZFC tal que $M \subset N$, los cardinales de N son los mismos que los de M y $(2^{\kappa_i} = \mu_i)^N$ para todo $i = 1, \dots, n$.*

DEMOSTRACIÓN: En M se cumple $2^{<\kappa_n} = \kappa_n$ y $\mu_n^{\kappa_n} = \mu_n$ por la HCG (ver [14.14], aquí usamos la hipótesis sobre las cofinalidades). Así, si tomamos $\mathbb{P}_1 = \text{Fn}(\mu_n \times \kappa_n, 2, \kappa_n)^M$ y formamos una extensión genérica $N_1 = M[G_1]$, el teorema 5.21 nos da que N_1 tiene los mismos cardinales y cofinalidades que M , así como que $(2^{\kappa_n} = \mu_n)^{N_1}$ y para todo cardinal infinito ^{M} $\nu < \kappa_n$ se cumple $(2^\nu = \nu^+)^{N_1}$.

Similarmente definimos $\mathbb{P}_2 = \text{Fn}(\mu_{n-1} \times \kappa_{n-1}, 2, \kappa_{n-1})^{N_1}$ y formamos una extensión genérica $N_2 = N_1[G_2]$, luego tomamos $\mathbb{P}_3 = \text{Fn}(\mu_{n-2} \times \kappa_{n-2}, 2, \kappa_{n-2})^{N_2}$ y formamos una extensión genérica $N_3 = N_2[G_3]$, etc.

Supongamos que la extensión N_i cumple

- a) Los cardinales y las cofinalidades de N_i son iguales que en M .
- b) $2^{\kappa_j} = \mu_j$ para $j = n - i + 1, \dots, n$,
- c) $2^\nu = \nu^+$ para todo cardinal infinito ^{M} $\nu < \kappa_{n-i+1}$ (y así $2^{<\kappa_{n-i}} = \kappa_{n-i}$).

Entonces $(\mu_{n-i}^{\kappa_{n-i}})^{N_i} = (\mu_{n-i}^{\kappa_{n-i}})^M = \mu_{n-i}$. La primera igualdad se debe a que cada \mathbb{P}_j es κ_{n-j+1} -cerrado ^{N_{j-1}} y $\kappa_{n-i} < \kappa_{n-j+1}$, para $j = 1, \dots, i$. En la segunda igualdad usamos que M cumple la HCG. Además κ_{n-i} es regular en N_i (porque lo es en M), luego podemos aplicar el teorema 5.21 para concluir que N_{i+1} cumple a) y c), así como que $2^{\kappa_{n-i}} = \mu_{n-i}$. Falta probar que si $j = n - i + 1, \dots, n$ entonces también $(2^{\kappa_j} = \mu_j)^{N_{i+1}}$.

Claramente $(2^{\kappa_j})^{N_{i+1}} \geq (2^{\kappa_j})^{N_i} = \mu_j$. Por 5.21 tenemos también que

$$(2^{\kappa_j})^{N_{i+1}} = (\mu_{n-i}^{\kappa_j})^{N_i} \leq (\mu_j^{\kappa_j})^{N_i} = ((2^{\kappa_j})^{\kappa_j})^{N_i} = (2^{\kappa_j})^{N_i} = \mu_j,$$

luego, efectivamente, N_{i+1} cumple b). La extensión $N = N_n$ cumple el teorema. ■

Ejemplo Si ZFC es consistente, también lo es ZFC más el axioma

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \wedge 2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2} = \aleph_7 \wedge 2^{\aleph_3} = \aleph_{\omega+15}.$$

En general, es consistente cualquier axioma que determine la función del continuo sobre un número finito de cardinales regulares sin más restricción que la monotonía (no estricta) y el teorema de König [14.6]. ■

Ahora es natural preguntarse si es posible obtener un resultado similar al teorema anterior pero que sea válido para infinitos cardinales no necesariamente regulares. El argumento que hemos empleado no funciona con infinitos cardinales porque es necesario empezar modificando la función del continuo sobre

el mayor de ellos κ_n e ir descendiendo. Sólo así conservamos la HCG bajo el siguiente cardinal a modificar en cada paso, lo cual a su vez es necesario para poder aplicar 5.21. No obstante en el capítulo siguiente dispondremos de un nuevo argumento que nos permitirá tratar con infinitos cardinales regulares. La cuestión sobre la hipótesis de regularidad es mucho más compleja. Volveremos sobre ella más adelante.

5.4 Colapso de cardinales

En todos los ejemplos de la sección anterior ha sido fundamental garantizar la conservación de todos los cardinales del modelo de partida. Sin embargo, también puede obtenerse resultados interesantes colapsando cardinales. El teorema siguiente es especialmente notable porque no requiere ninguna hipótesis sobre la aritmética del modelo base.

Teorema 5.26 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea κ un cardinal no numerable ^{M} y $\mathbb{P} = \text{Fn}(\kappa, 2, \aleph_1)^M$. Si G es un filtro genérico, entonces $M[G]$ cumple $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Como \mathbb{P} es \aleph_1 -cerrado ^{M} , el teorema 5.9 nos da que \mathbb{P} conserva cardinales $\leq \aleph_1^M$, con lo que $\aleph_1^{M[G]} = \aleph_1^M$. Por otra parte 5.8 implica que $(\omega 2)^{M[G]} = (\omega 2)^M$. Basta construir una aplicación $F : \aleph_1^M \rightarrow (\omega 2)^M$ suprayectiva que esté en $M[G]$, pues entonces $(|\omega 2| \leq \aleph_1)^{M[G]}$.

Sea $f_G : \kappa \rightarrow 2$ la función genérica. Definimos $F(\alpha)(n) = f_G(\alpha + n)$. Para probar la suprayectividad tomamos $h \in (\omega 2)^M$. El conjunto

$$D_h = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall \alpha < \aleph_1^M \bigwedge n \in \omega (\alpha + n \in \text{Dominio}(p) \wedge p(\alpha + n) = h(n))\}$$

es denso en \mathbb{P} y está en M , por lo que corta a G . Esto se traduce en que existe un $\alpha < \aleph_1^M$ tal que $\bigwedge n \in \omega f_G(\alpha + n) = h(n)$, es decir, $F(\alpha) = h$. ■

Otro ejemplo típico de c.p.o. colapsante es el siguiente:

Teorema 5.27 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y en M sean κ y μ dos cardinales tales que $\kappa < \mu$ y κ sea regular. Sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(\kappa, \mu, \kappa)$ y sea G un filtro genérico. Entonces*

- a) \mathbb{P} conserva cardinales $\leq \kappa$.
- b) Si $(\mu^{<\kappa} = \mu)^M$ entonces \mathbb{P} conserva cardinales $\geq (\mu^+)^M$.
- c) Si ν es un cardinal ^{M} tal que $\kappa \leq \nu \leq \mu$, entonces $(|\nu| = \kappa)^{M[G]}$, es decir, todos los cardinales entre κ y μ se colapsan.

DEMOSTRACIÓN: a) es inmediato, pues \mathbb{P} es κ -cerrado ^{M} , luego conserva cardinales $\leq \kappa$.

Similarmente, bajo la hipótesis de b), el teorema 5.14 nos da que \mathbb{P} cumple la condición de cadena $(\mu^+)^M$, luego conserva cardinales $\geq (\mu^+)^M$.

La aplicación genérica $f_G : \mu \longrightarrow \kappa$ es suprayectiva, luego $(|\mu| = \kappa)^{M[G]}$, y esto implica c). ■

Notemos que una condición suficiente para que se cumpla $\mu^{<\kappa} = \mu$ es que se cumpla la HCG y que $\kappa \leq \text{cf } \mu$.

Ejercicio: Probar que si ZFC es consistente también lo es añadir como axioma la sentencia

$$|\aleph_1^L| = |\aleph_2^L| = \aleph_0 \wedge |\aleph_3^L| = |\aleph_4^L| = |\aleph_5^L| = \aleph_1 \wedge |\aleph_6^L| = |\aleph_7^L| = \aleph_2.$$

Sugerencia: Imitar la prueba de 5.25 pero con c.p.o.s colapsantes: primero se colapsa \aleph_2 haciéndolo numerable, luego \aleph_5 (que será \aleph_3 en la extensión previa) volviéndolo de cardinal \aleph_1 (o sea, \aleph_3 en la extensión original), y luego \aleph_7 (que será \aleph_3 en la extensión anterior). Antes hay que probar que si se parte de un modelo que cumple la HCG y se construye una extensión en las condiciones del teorema anterior, ésta sigue cumpliendo la HCG.

Los c.p.o.s considerados en el teorema anterior colapsan un segmento de cardinales hasta uno dado incluyendo a éste. Ahora veremos que es posible colapsar todos los cardinales en un segmento κ - μ conservando a μ (esto no es trivial si μ es un cardinal límite). Como aplicación veremos que \aleph_1 puede ser inaccesible en L .

Definición 5.28 Sean κ y μ dos cardinales. El orden colapsante de Lévy es el conjunto

$$\text{Lv}(\kappa, \mu) = \{p \subset \kappa \times \mu \times \kappa \mid p \text{ es una función} \wedge |p| < \mu \wedge \bigwedge \alpha\beta((\alpha, \beta) \in \text{Dominio}(p) \rightarrow p(\alpha, \beta) < \alpha)\}.$$

Consideramos en $\text{Lv}(\kappa, \mu)$ el orden dado por $p \leq q \leftrightarrow q \subset p$. Así resulta ser un c.p.o. con máximo $\mathbf{1} = \emptyset$.

Teorema 5.29 Sean $\mu < \kappa$ cardinales regulares tales que o bien $\mu = \omega$ o bien κ es fuertemente inaccesible. Entonces el c.p.o. $\text{Lv}(\kappa, \mu)$ cumple la condición de cadena κ .

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha < \kappa$ entonces

$$|\alpha^{<\mu}| = |\alpha|^{<\mu} = \sum_{\nu < \mu} |\alpha|^\nu \leq \sum_{\nu < \mu} |\alpha|^\mu \leq \mu 2^{|\alpha|^\mu} < \kappa,$$

en el caso en que κ sea fuertemente inaccesible (y si $\mu = \omega$ la desigualdad es trivial). Por consiguiente κ y μ están en las hipótesis del lema de los sistemas Δ (teorema 5.12).

Si $\{p_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ es una anticadena en $\text{Lv}(\kappa, \mu)$, sea $A = \{\text{Dominio}(p_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$. Si $|A| < \kappa$ ha de existir un $x \subset \kappa$ con $|x| = \kappa$ y de modo que todas las condiciones $\{p_\alpha\}_{\alpha \in x}$ tienen el mismo dominio r .

Si, por el contrario, $|A| = \kappa$, el lema de los sistemas Δ nos da un $x \subset \kappa$ con $|x| = \kappa$ tal que los dominios de las condiciones $\{p_\alpha\}_{\alpha \in x}$ son una familia cuasidisjunta de raíz r .

En ambos casos tenemos que la intersección de los dominios de dos condiciones distintas cualesquiera de $\{p_\alpha\}_{\alpha \in x}$ es un conjunto fijo $r \subset \kappa \times \mu$ tal que $|r| < \mu < \kappa$. Sea $\sigma = \sup\{\alpha \in \kappa \mid \forall \beta \in \mu (\alpha, \beta) \in r\}$. Claramente $\sigma < \kappa$ y en consecuencia $|{}^r\sigma| < \kappa$ si κ es fuertemente inaccesible (y también si $\mu = \omega$, pues entonces r es finito).

Descomponemos

$$\{p_\alpha \mid \alpha \in x\} = \bigcup_{u \in {}^r\sigma} \{p_\alpha \mid \alpha \in x \wedge p_\alpha|_r = u\}.$$

Como κ es un cardinal regular ha de existir un $u \in {}^r\sigma$ tal que el conjunto $\{p_\alpha \mid \alpha \in x \wedge p_\alpha|_r = u\}$ tenga cardinal κ . En particular existirán dos ordinales $\alpha, \beta \in x$ tales que $\alpha \neq \beta$. Así, tenemos que $p_\alpha \neq p_\beta$, $p_\alpha|_r = p_\beta|_r$ y $\text{Dominio}(p_\alpha) \cap \text{Dominio}(p_\beta) = r$. Es claro entonces que p_α y p_β son compatibles, en contradicción con el supuesto de que forman parte de una anticadena.

Hemos probado que en $\text{Lv}(\kappa, \mu)$ no hay anticadenas de cardinal κ , luego cumple la condición de cadena κ . ■

La prueba del teorema siguiente es idéntica a la de 5.15:

Teorema 5.30 *Si μ es un cardinal regular, entonces $\text{Lv}(\kappa, \mu)$ es μ -cerrado.*

Con esto ya podemos determinar el comportamiento de los cardinales en las extensiones del orden de Lévy:

Teorema 5.31 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y sean $\mu < \kappa$ cardinales regulares^M tales que $\mu = \omega$ o bien κ es fuertemente inaccesible^M. Sea $\mathbb{P} = \text{Lv}(\kappa, \mu)^M$ y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces*

- a) \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades $\leq \mu$ y $\geq \kappa$.
- b) Si ν es un cardinal^M tal que $\mu < \nu < \kappa$ entonces $|\nu|^{M[G]} = \mu$, luego $(\kappa = \mu^+)^{M[G]}$

DEMOSTRACIÓN: El apartado a) es consecuencia de los teoremas anteriores junto con 5.6 y 5.9.

b) Sea $f_G = \bigcup_{p \in G} p \in M[G]$. El argumento usual nos da que $f_G : \kappa \times \mu \rightarrow \kappa$, pero la definición de \mathbb{P} implica además que si $\alpha < \kappa$ entonces f_G determina una aplicación $f_\alpha : \mu \rightarrow \alpha$ mediante $f_\alpha(\beta) = f_G(\alpha, \beta)$. Las aplicaciones f_α son suprayectivas, pues el conjunto

$$D_{\alpha\gamma} = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall \beta \in \mu (\alpha, \beta, \gamma) \in p\} \in M$$

es denso en \mathbb{P} para todo $\gamma < \alpha$, de donde se sigue que γ tiene una antiimagen β por f_α . Así pues, $|\alpha|^{M[G]} \leq \mu$ y si $\mu \leq \alpha < \kappa$ entonces $|\alpha|^{M[G]} = \mu$. ■

Ahora es muy fácil probar la consistencia de que \aleph_1 sea inaccesible^L (supuesta la consistencia de que existan cardinales inaccesibles). Es decir, vamos a probar que es consistente que, para alguien que viva en L , el cardinal que nosotros llamamos \aleph_1 no sea el primer cardinal no numerable, sino que haya

muchos otros cardinales anteriores a él (cardinales^L, naturalmente, es decir, ordinales numerables que no pueden biyectarse con ordinales anteriores mediante una biyección constructible). En particular tendremos que $\aleph_1^L, \aleph_2^L, \aleph_\omega^L, \aleph_{\omega_5}^L$, son todos ordinales numerables, pues \aleph_1, \aleph_2 , etc. son menores que cualquier cardinal inaccesible. Más aún, si nos fijamos en la prueba del teorema 3.24 veremos que no usa que κ sea un cardinal inaccesible, sino únicamente que κ es inaccesible^L. Por consiguiente otra consecuencia de que \aleph_1 sea inaccesible^L es que $L_{\aleph_1} \models \ulcorner \text{ZFC} + V = L \urcorner$.

Teorema 5.32 *Si $\text{ZFC} + (\bigvee \kappa \text{ es inaccesible})$ es consistente, también lo es $\text{ZFC} + \aleph_1 \text{ es inaccesible}^L$. De hecho esta teoría es equiconsistente con las consideradas en 5.24.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\text{ZFC} + (\bigvee \kappa \text{ es inaccesible})$ es consistente, también lo es $\text{ZFC} + V = L + (\bigvee \kappa \text{ es inaccesible})$ por 3.22. Trabajando en esta teoría el teorema 1.27 nos da un modelo transitivo numerable de la misma, llamémoslo M . Notemos que κ es fuertemente inaccesible^M por la HCG. Sea $\mathbb{P} = \text{Lv}(\kappa, \aleph_0)^M$ y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Por el teorema anterior $\kappa = \aleph_1^{M[G]}$.

De este modo tenemos que $\aleph_1^{M[G]}$ es inaccesible^M o, lo que es lo mismo, $\aleph_1^{M[G]}$ es $(\text{inaccesible}^L)^{M[G]}$. A su vez esto equivale a $(\aleph_1 \text{ es inaccesible}^L)^{M[G]}$. ■

La prueba del teorema siguiente es similar a la del teorema 5.21. Lo dejamos a cargo del lector:

Teorema 5.33 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mu < \kappa$ cardinales regulares^M tales que κ es fuertemente inaccesible^M. Sea $\mathbb{P} = \text{Lv}(\kappa, \mu)^M$, sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y ν un cardinal^{M[G]}. Entonces*

$$(2^\nu)^{M[G]} = \begin{cases} \text{mín}\{\mu, (2^\nu)^M\} & \text{si } \nu < \mu, \\ \kappa & \text{si } \nu = \mu, \\ (2^\nu)^M & \text{si } \nu \geq \kappa. \end{cases}$$

Capítulo VI

Inmersiones

En los dos últimos capítulos hemos expuesto los hechos básicos sobre extensiones genéricas junto con sus primeras aplicaciones. Ahora profundizaremos más en la teoría estudiando las relaciones entre extensiones obtenidas con diferentes c.p.o.s, lo que nos llevará a una mejor comprensión de la misma así como a aplicaciones más refinadas. Por ejemplo, demostraremos la independencia del axioma de elección mediante una técnica formalmente análoga a la de los modelos simétricos en ZFA.

6.1 Aplicaciones entre c.p.o.s

En primer lugar definimos varias clases de aplicaciones que conectan adecuadamente dos conjuntos preordenados:

Definición 6.1 Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} dos c.p.o.s. Diremos que una aplicación $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una *inmersión* si cumple

- a) $\bigwedge p p' \in \mathbb{P} (p \leq p' \rightarrow i(p) \leq i(p'))$,
- b) $\bigwedge p p' \in \mathbb{P} (p \perp p' \rightarrow i(p) \perp i(p'))$.

Diremos que i es una *inmersión completa* si además cumple

- c) $\bigwedge q \in \mathbb{Q} \bigvee p \in \mathbb{P} \bigwedge p' \in \mathbb{P} (p' \leq p \rightarrow \neg i(p') \perp q)$.

En tal caso diremos que p es una *reducción* de q a \mathbb{P} .

Una inmersión $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es *densa* si $i[\mathbb{P}]$ es denso en \mathbb{Q} .

Diremos que $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una *semejanza* si es biyectiva y

$$\bigwedge p p' \in \mathbb{P} (p \leq p' \leftrightarrow i(p) \leq i(p')).$$

En definitiva, una inmersión es una aplicación que conserva las dos relaciones básicas que tenemos definidas entre c.p.o.s, y una semejanza es una aplicación que identifica completamente dos c.p.o.s. Entre ambos extremos tenemos las inmersiones completas y las inmersiones densas.

Un caso de especial interés se da cuando la aplicación i es la inclusión, es decir, cuando tenemos un c.p.o. \mathbb{Q} y $\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$ es un c.p.o. con la restricción del preorden de \mathbb{Q} . Se dice que \mathbb{P} está *inmerso* en \mathbb{Q} si la inclusión i es una inmersión. Se dice que \mathbb{P} está *completamente contenido* en \mathbb{Q} si i es una inmersión completa. Obviamente, que i sea una inmersión densa equivale a que \mathbb{P} sea denso en \mathbb{Q} .

Conviene introducir un último concepto:

Diremos que un c.p.o. \mathbb{P} es *separativo* si

$$\bigwedge pq \in \mathbb{P}(p \not\leq q \rightarrow \bigvee r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \perp q)).$$

Es fácil ver que los conjuntos de funciones parciales $\text{Fn}(I, J, \kappa)$ (así como $\text{Lv}(\kappa, \mu)$) son c.p.o.s separativos. También es mera rutina comprobar que todos los conceptos que acabamos de definir son absolutos para modelos transitivos de ZFC. Ahora demostramos los hechos básicos:

Teorema 6.2 *Se cumple:*

- a) *Toda semejanza entre c.p.o.s es una inmersión densa.*
- b) *Toda inmersión densa entre c.p.o.s es una inmersión completa.*
- c) *La composición de semejanzas, inmersiones densas, inmersiones completas e inmersiones entre c.p.o.s es, respectivamente, una semejanza, inmersión densa, inmersión completa o inmersión.*
- d) *Si $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es una inmersión entre conjuntos parcialmente ordenados separativos, entonces i es inyectiva y $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}(p \leq p' \leftrightarrow i(p) \leq i(p'))$. Si además i es completa entonces $i(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.*

DEMOSTRACIÓN: a) es evidente. Si $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es una inmersión densa y $q \in \mathbb{Q}$, como $i[\mathbb{P}]$ es denso en \mathbb{Q} existe un $p \in \mathbb{P}$ tal que $i(p) \leq q$. Claramente p es una reducción de q a \mathbb{P} . Esto prueba b). El apartado c) es una comprobación rutinaria. Veamos d).

Sean $p, p' \in \mathbb{P}$ tales que $i(p) \leq i(p')$. Hemos de probar que $p \leq p'$. En caso contrario, como \mathbb{P} es separativo existiría $r \leq p$ tal que $r \perp p'$. Entonces $i(r) \leq i(p) \wedge i(r) \perp i(p')$, contradicción. De este modo tenemos que

$$\bigwedge pp' \in \mathbb{P}(p \leq p' \leftrightarrow i(p) \leq i(p')).$$

Teniendo en cuenta que, por hipótesis, la relación en \mathbb{P} es antisimétrica (no es sólo un preorden), de aquí se sigue que i es inyectiva.

Supongamos ahora que i es completa pero que $i(\mathbf{1}) \neq \mathbf{1}$. En cualquier caso $i(\mathbf{1}) \leq \mathbf{1}$, luego ha de ser $\mathbf{1} \not\leq i(\mathbf{1})$. Como \mathbb{Q} es separativo existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \perp i(\mathbf{1})$. Sea p una reducción de q a \mathbb{P} . Entonces $i(p)$ es compatible con q , es decir, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \leq i(p) \wedge r \leq q$, pero entonces tenemos que $r \leq i(p) \leq i(\mathbf{1})$ y $r \leq q$, cuando por otra parte $q \perp i(\mathbf{1})$. ■

A continuación mostramos la primera relación entre las inmersiones y las extensiones genéricas:

Teorema 6.3 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa, $i \in M$. Sea H un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M . Entonces $G = i^{-1}[H]$ es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $M[G] \subset M[H]$. En particular, si \mathbb{P} está completamente contenido en \mathbb{Q} e i es la inclusión, tenemos que $G = H \cap \mathbb{P}$.*

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que G es \mathbb{P} -genérico sobre M mediante el teorema 4.6. Si $p, q \in G$, entonces $i(p), i(q) \in H$, luego $\neg i(p) \perp i(q)$, luego $\neg p \perp q$.

Si $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$ cumple $p \leq q$ entonces $i(p) \in H \wedge i(p) \leq i(q)$, luego $i(q) \in H$, luego $q \in G$.

Si $D \in M$ es denso en \mathbb{P} pero $G \cap D = \emptyset$, entonces $H \cap i[D] = \emptyset$. Por el teorema 4.8 existe un $q \in H$ incompatible con todos los elementos de $i[D]$. Sea p una reducción de q a \mathbb{P} y sea $p' \leq p$ tal que $p' \in D$. Entonces $i(p') \in i[D]$, pero es compatible con q , contradicción.

Así pues, G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Como $i \in M \subset M[H]$ y $H \in M[H]$, también $G = i^{-1}[H] \in M[H]$, luego $M[G] \subset M[H]$ por el teorema del modelo genérico. ■

Veamos ahora el caso de las inmersiones densas:

Teorema 6.4 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión densa, $i \in M$. Para cada $G \subset \mathbb{P}$ sea*

$$\hat{i}(G) = \{q \in \mathbb{Q} \mid \forall p \in G \ i(p) \leq q\}.$$

a) *Si H es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M entonces $G = i^{-1}[H]$ es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $H = \hat{i}(G)$.*

b) *Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M entonces $H = \hat{i}(G)$ es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M y $G = i^{-1}[H]$.*

c) *Si G y H son como en a) o en b), entonces $M[G] = M[H]$.*

DEMOSTRACIÓN: a) El teorema anterior nos da que G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Demostraremos que $H = \hat{i}(G)$ después de probar b).

b) Veamos que H es un filtro. Claramente $\mathbb{1} \in H$.

Si $p, q \in H$, existen $r, s \in G$ tales que $i(r) \leq p \wedge i(s) \leq q$, luego existe un $t \in G$ tal que $t \leq r \wedge t \leq s$. Entonces $i(t) \in H \wedge i(t) \leq p \wedge i(t) \leq q$.

Si $p \in H$ y $q \in \mathbb{Q}$ cumple $p \leq q$, entonces hay un $r \in G$ tal que $i(r) \leq p \leq q$, luego $q \in H$.

Sea ahora $D \in M$ un conjunto denso en \mathbb{Q} . Sea

$$D^* = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall q \in D \ i(p) \leq q\} \in M.$$

Se cumple que D^* es denso en \mathbb{P} , pues si $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq i(p)$. Como i es densa, existe un $p' \in \mathbb{P}$ tal que $i(p') \leq q \leq i(p)$. Entonces

$\neg i(p) \perp i(p')$, luego $\neg p \perp p'$. Sea $p'' \in \mathbb{P}$ tal que $p'' \leq p \wedge p'' \leq p'$. Así, $p'' \in D^*$, pues $i(p'') \leq i(p') \leq q \in D$, y por otra parte $p'' \leq p$.

Por consiguiente $D^* \cap G \neq \emptyset$, lo que significa que existen $p \in G$ y $q \in D$ tales que $i(p) \leq q$, de donde $q \in D \cap H \neq \emptyset$.

Tenemos así que H es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M .

Por la parte probada de a) se cumple que $i^{-1}[H]$ es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y claramente $G \subset i^{-1}[H]$. Según el teorema 4.9 ha de ser $G = i^{-1}[H]$.

Volviendo a a), es inmediato comprobar que $\hat{i}(G) \subset H$ y por b) tenemos que $\hat{i}(G)$ es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M . Por 4.9 concluimos que $H = \hat{i}(G)$.

c) Por el teorema anterior tenemos que $M[G] \subset M[H]$ y como $M \subset M[G]$ y $H = \hat{i}(G) = (\hat{i}(G))^{M[G]} \in M[G]$, el teorema del modelo genérico nos da la inclusión: $M[H] \subset M[G]$. Así pues, $M[G] = M[H]$. ■

En particular, dos c.p.o.s semejantes^M dan lugar a las mismas extensiones genéricas. Por ejemplo, es obvio que si $|I| = |I'|$ y $|J| = |J'|$ entonces los c.p.o.s $\text{Fn}(I, J, \kappa)$ y $\text{Fn}(I', J', \kappa')$ son semejantes. Así, los resultados que en el capítulo anterior hemos probado para c.p.o.s de la forma $\text{Fn}(\mu \times \kappa, 2, \kappa)$, con $\mu \leq \kappa$, valen igualmente para $\text{Fn}(\mu, 2, \kappa)$, si bien son formalmente más fáciles de probar con $\mu \times \kappa$. Veamos ahora que, desde un punto de vista teórico, no perdemos generalidad si trabajamos únicamente con conjuntos parcialmente ordenados separativos:

Teorema 6.5 *Sea \mathbb{P} un c.p.o. Entonces existe un conjunto parcialmente ordenado separativo \mathbb{Q} y una inmersión suprayectiva (luego densa) $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Además \mathbb{Q} es único salvo semejanza.*

DEMOSTRACIÓN: Sea R la relación de equivalencia en \mathbb{P} dada por

$$p R q \leftrightarrow \bigwedge r \in \mathbb{P} (r \perp p \leftrightarrow r \perp q).$$

Sea $\mathbb{Q} = \mathbb{P}/R$ el conjunto cociente y en él consideramos el orden dado por

$$[p] \leq [q] \leftrightarrow \bigwedge r \in \mathbb{P} (r \leq p \rightarrow \neg r \perp q).$$

Está bien definido, pues si $[p] = [p']$ y $[q] = [q']$ y $[p] \leq [q]$, entonces $[p'] \leq [q']$. En efecto, si $r \in \mathbb{P}$ cumple $r \leq p'$, entonces $\neg r \perp p'$, luego $\neg r \perp p$. Existe $s \in \mathbb{P}$ tal que $s \leq r \wedge s \leq p$. Como $[p] \leq [q]$, ha de ser $\neg s \perp q$, luego existe $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leq s \wedge t \leq q$. Así $t \leq r \wedge t \leq q$, es decir, $\neg r \perp q$, luego también $\neg r \perp q'$. Esto prueba que $[p'] \leq [q']$.

La relación en \mathbb{Q} es claramente reflexiva. Veamos que es simétrica, para lo cual suponemos que $[p] \leq [q] \wedge [q] \leq [p]$. Si $\neg r \perp p$, existe $s \in \mathbb{P}$ tal que $s \leq r \wedge s \leq p$, luego $s \leq r \wedge \neg s \perp q$. Existe $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leq s \leq r \wedge t \leq q$. Por consiguiente $\neg r \perp q$. Igualmente se prueba el recíproco, luego $[p] = [q]$.

Para probar la transitividad suponemos $[p] \leq [q] \wedge [q] \leq [r]$. Si $u \leq p$ entonces $\neg u \perp q$ (porque $[p] \leq [q]$). Existe $v \in \mathbb{P}$ tal que $v \leq u \wedge v \leq q$.

Entonces $\neg v \perp r$ (porque $[q] \leq [r]$). Existe $w \in \mathbb{P}$ tal que $w \leq v \leq u \wedge w \leq r$. Así pues, $\neg u \perp r$, lo que prueba que $[p] \leq [r]$.

Tenemos, por lo tanto, que \mathbb{Q} es un conjunto parcialmente ordenado (con máximo $[1]$). Sea $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ la aplicación dada por $i(p) = [p]$. Obviamente es suprayectiva y $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}(p \leq p' \rightarrow i(p) \leq i(p'))$. Para probar que es una inmersión suponemos que $\neg i(p) \perp i(p')$ y hemos de probar que $\neg p \perp p'$. Existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $[r] \leq [p] \wedge [r] \leq [p']$. De $[r] \leq [p]$ se sigue en particular que $\neg r \perp p$, luego existe $s \in \mathbb{P}$ tal que $s \leq r \wedge s \leq p$. Entonces $[r] \leq [p']$ implica que $\neg s \perp p'$. Existe $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leq s \leq p \wedge t \leq p'$. Así, ciertamente, $\neg p \perp p'$.

Veamos ahora que \mathbb{Q} es separativo. Si $[p] \not\leq [q]$ esto significa que existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p \wedge r \perp q$. Como i es una inmersión $[r] \leq [p] \wedge [r] \perp [q]$, luego tenemos que $\bigvee r \in \mathbb{Q}(r \leq [p] \wedge r \perp [q])$.

Falta probar la unicidad de \mathbb{Q} . Para ello supongamos que \mathbb{Q}' es otro conjunto parcialmente ordenado separativo tal que exista $j : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}'$ inmersión suprayectiva.

Veamos que si $r, s \in \mathbb{Q}'$ se cumple $r \leq s \leftrightarrow \bigwedge t \in \mathbb{Q}'(\neg t \perp r \rightarrow \neg t \perp s)$.

Si $r \leq s \wedge \neg t \perp r$, entonces existe $u \in \mathbb{Q}'$ tal que $u \leq t \wedge u \leq r \leq s$, luego $\neg t \perp s$. Recíprocamente, si $r \not\leq s$, existe un $t \in \mathbb{Q}'$ tal que $t \leq r \wedge t \perp s$ (porque \mathbb{Q}' es separativo), luego $\neg t \perp r$ pero $t \perp s$.

Como esto vale para todo conjunto parcialmente ordenado separativo, en particular vale para \mathbb{Q} . Dados $p, q \in \mathbb{P}$, se cumple

$$i(p) \perp i(q) \leftrightarrow p \perp q \leftrightarrow j(p) \perp j(q).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} i(p) \leq i(q) &\leftrightarrow \bigwedge r \in \mathbb{P}(\neg i(r) \perp i(p) \rightarrow \neg i(r) \perp i(q)) \\ &\leftrightarrow \bigwedge r \in \mathbb{P}(\neg j(r) \perp j(p) \rightarrow \neg j(r) \perp j(q)) \leftrightarrow j(p) \leq j(q). \end{aligned}$$

Como las relaciones en \mathbb{Q} y \mathbb{Q}' son antisimétricas, esto implica que

$$i(p) = i(q) \leftrightarrow j(p) = j(q).$$

De aquí se sigue que la aplicación $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}'$ dada por $f(i(p)) = j(p)$ está bien definida y es una semejanza. ■

Veamos ahora que las inmersiones completas entre c.p.o.s inducen aplicaciones entre las clases de nombres.

Definición 6.6 Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación. Definimos $\bar{i} : V^{\mathbb{P}} \rightarrow V^{\mathbb{Q}}$ mediante

$$\bar{i}(\sigma) = \{(\bar{i}(\tau), i(p)) \mid (\tau, p) \in \sigma\}.$$

Claramente se trata de una definición por \in -recursión. Una simple inducción prueba que si $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ y $j : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $\overline{i \circ j} = \bar{i} \circ \bar{j}$. También es claro

que la identidad induce la aplicación identidad, de donde a su vez se sigue que \bar{i} es inyectiva, suprayectiva o biyectiva si lo es i .

Se prueba sin dificultad que el término \bar{i} es absoluto para modelos transitivos de ZFC. Esto se traduce en que si M es un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ son dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ cumple $i \in M$, entonces \bar{i} se restringe a una aplicación $\bar{i} : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M^{\mathbb{Q}}$.

En lo sucesivo escribiremos i en lugar de \bar{i} salvo que haya posibilidad de confusión.

Teorema 6.7 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa $i \in M$.*

- a) *Si H es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M , $G = i^{-1}[H]$ y $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $\tau_G = i(\tau)_H$.*
- b) *Si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula absoluta para modelos transitivos de ZFC, $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$, entonces*

$$p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \leftrightarrow i(p) \Vdash \phi(i(\tau_1), \dots, i(\tau_n)).$$

- c) *Si i es una inmersión densa, el apartado b) vale para fórmulas cualesquiera.*

DEMOSTRACIÓN: Probamos a) por inducción sobre el rango de τ : Si se cumple $x \in i(\tau)_H$, entonces $x = i(\pi)_H$, con $(\pi, p) \in \tau$, $i(p) \in H$. Por tanto, $p \in G$ y por hipótesis de inducción $x = \pi_G$. Esto implica que $x \in \tau_G$. El recíproco es análogo.

Probamos b) y c) simultáneamente. Supongamos $p \Vdash \phi(i(\tau_1), \dots, i(\tau_n))$. Sea H un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M tal que $i(p) \in H$. Entonces $p \in G = i^{-1}[H]$, luego se cumple $\phi^{M[G]}(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})$, lo cual, por a), es lo mismo que $\phi^{M[G]}(i(\tau_1)_H, \dots, i(\tau_n)_H)$. Esto equivale a $\phi^{M[H]}(i(\tau_1)_H, \dots, i(\tau_n)_H)$, ya sea porque $M[G] \subset M[H]$ y ϕ es absoluta (en el caso b) o bien porque $M[G] = M[H]$ (en el caso c). Esto prueba que $i(p) \Vdash \phi(i(\tau_1), \dots, i(\tau_n))$. El recíproco se obtiene al aplicar esta implicación a $\neg\phi$. ■

Estos resultados se aplican especialmente al caso de los automorfismos de un c.p.o.:

Definición 6.8 Un *automorfismo* de un c.p.o. \mathbb{P} es una semejanza $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ tal que $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ (la última condición es redundante si \mathbb{P} está parcialmente ordenado).

Llamaremos $\text{Aut } \mathbb{P}$ al conjunto de todos los automorfismos de \mathbb{P} , que claramente es un grupo con la composición de aplicaciones. Los hechos siguientes son casos particulares o consecuencias inmediatas de los que acabamos de ver:

Si $f \in \text{Aut } \mathbb{P}$ tenemos definida la biyección $\bar{f} : V^{\mathbb{P}} \longrightarrow V^{\mathbb{P}}$. Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$, entonces $\text{Aut}^M \mathbb{P} = \text{Aut } \mathbb{P} \cap M$ es un

subgrupo de $\text{Aut } \mathbb{P}$ y cada $f \in \text{Aut}^M \mathbb{P}$ determina $\bar{f} : M^{\mathbb{P}} \rightarrow M^{\mathbb{P}}$ biyectiva. Para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$, todos los $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ y todo $p \in \mathbb{P}$ se cumple

$$p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \leftrightarrow f(p) \Vdash \phi(\bar{f}(\tau_1), \dots, \bar{f}(\tau_n)).$$

Si 1 es la identidad en \mathbb{P} se cumple que $\bar{1}$ es la identidad en $M^{\mathbb{P}}$. Además $f \circ \bar{g} = \bar{f} \circ g$, de donde a su vez se sigue que $\overline{f^{-1}} = \bar{f}^{-1}$.

Una simple inducción prueba que $\bigwedge f \in \text{Aut } \mathbb{P} \bigwedge x \in V \bar{f}(\check{x}) = \check{x}$.

En lo sucesivo omitiremos las barras sobre las aplicaciones inducidas por automorfismos. Veamos algunas aplicaciones.

Quizá el lector se haya dado cuenta de que en ninguna prueba de consistencia mediante extensiones genéricas hemos tenido que especificar qué filtro genérico considerábamos: siempre hemos tomado uno arbitrario y la extensión genérica ha cumplido lo que queríamos. El próximo teorema explica este hecho, pero antes necesitamos un nuevo concepto.

Definición 6.9 Diremos que un c.p.o. \mathbb{P} es *casi homogéneo* si

$$\bigwedge pq \in \mathbb{P} \bigvee f \in \text{Aut } \mathbb{P} \neg f(p) \perp q.$$

Teorema 6.10 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. casi homogéneo^M, sea $p \in \mathbb{P}$, sean $x_1, \dots, x_n \in M$ y sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula (metamatemática). Entonces

$$p \Vdash \phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \leftrightarrow \mathbf{1} \Vdash \phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n).$$

En particular $\mathbf{1} \Vdash \phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$ o bien $\mathbf{1} \Vdash \neg \phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$ y, por consiguiente, todas las extensiones genéricas $M[G]$ cumplen las mismas sentencias, indistintamente del filtro G con que se construyan.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $p \Vdash \phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$ pero que $\neg \mathbf{1} \Vdash \phi$. Entonces existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \Vdash \neg \phi$. Sea $f \in \text{Aut}^M \mathbb{P}$ tal que $\neg f(p) \perp q$. Sea $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq f(p) \wedge r \leq q$. Como $f(p) \Vdash \phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$, también $r \Vdash \phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$, pero como $r \leq q$, también $r \Vdash \neg \phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$, contradicción. ■

Esto se aplica a todos los c.p.o.s que hemos manejado hasta ahora, pues todos son casi homogéneos:

Teorema 6.11 Sean I, J dos conjuntos con $|J| \geq 2$ y sea κ un cardinal infinito tal que $\kappa \leq |I|$. Entonces $\mathbb{P} = \text{Fn}(I, J, \kappa)$ es un c.p.o. casi homogéneo.

DEMOSTRACIÓN: Sean $p, q \in \mathbb{P}$. Entonces sus dominios son subconjuntos de I de cardinal menor que κ . Podemos tomar $A \subset I$ cuyo cardinal sea igual al del dominio de p y que sea disjunto del dominio de q . Existe $g : I \rightarrow I$ biyectiva tal que $g[A] = \text{Dominio}(p)$. Definimos $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ mediante $f(r) = g \circ r$. Es fácil ver que $g \in \text{Aut } \mathbb{P}$ y $\text{Dominio}(f(p)) = A$, luego los dominios de $f(p)$ y q son disjuntos, por lo que $\neg f(p) \perp q$. ■

La siguiente aplicación es una prueba muy interesante de la independencia del axioma de elección. Para ello construiremos un modelo de ZF en el que $\mathcal{P}\omega$ no puede ser bien ordenado. Más aún, este modelo cumplirá $V = L(\mathcal{P}\omega)$, con lo que probaremos que $V = L(\mathcal{P}\omega)$ no implica el axioma de elección. De hecho, construiremos un modelo de ZFC en el que $L(\mathcal{P}\omega)$ no cumple el axioma de elección, con lo que probaremos que $AE^{L(\mathcal{P}\omega)}$ no puede demostrarse en ZFC, tal y como comentábamos en el capítulo III. La prueba se basa en el siguiente resultado técnico:

Teorema 6.12 *Sea $\phi(x)$ una fórmula con x como única variable libre. Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y consideremos dos conjuntos no numerables^M I, J . Sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(I, 2, \aleph_0)$ y $\mathbb{Q} = \text{Fn}(J, 2, \aleph_0)$. Entonces, para todo ordinal $\alpha \in M$ se cumple*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, por ejemplo, que $(|I| \leq |J|)^M$. Consideremos $\mathbb{R} = \text{Fn}(I, J, \aleph_1)^M$ y sea H un filtro \mathbb{R} -genérico sobre M . Entonces $(|I| = |J|)^{M[H]}$, pues la aplicación genérica $f_H : I \rightarrow J$ es suprayectiva.

Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre $M[H]$ (luego \mathbb{P} -genérico sobre M). Veamos que $\mathcal{P}\omega \cap M[H][G] = \mathcal{P}\omega \cap M[G]$. Una inclusión es obvia. Para probar la otra tomamos $x \in \mathcal{P}\omega \cap M[H][G]$. Por el teorema 5.19, existe un buen nombre $\sigma \in M[H]^{\mathbb{P}}$ para un subconjunto de $\check{\omega}$ tal que $x = \sigma_G$. Esto significa que

$$\sigma = \bigcup_{n \in \omega} \{\check{n}\} \times A_n,$$

donde A_n es una anticadena en \mathbb{P} . Ahora bien, \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable^{M[H]} (teorema 5.14), luego cada $A_n \subset \mathbb{P} \subset M$ es numerable^{M[H]}. Por consiguiente, también $\sigma \subset M$ es numerable^{M[H]}. Como $(\mathbb{R}$ es \aleph_1 -cerrado)^M, el teorema 5.8 nos da que, de hecho, $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Por consiguiente, $x = \sigma_G \in M[G]$.

Tenemos, pues, que $(\mathcal{P}\omega)^{M[G]} = (\mathcal{P}\omega)^{M[H][G]}$. Como el término $L_\alpha(a)$ es absoluto para modelos transitivos de ZF, concluimos que para todo ordinal $\alpha \in M$ se cumple $L_\alpha(\mathcal{P}\omega)^{M[G]} = L_\alpha(\mathcal{P}\omega)^{M[H][G]}$. A su vez esto implica que los conjuntos $x \in M[H][G]$ que cumplen $(x \in L(\mathcal{P}\omega))^{M[H][G]}$ son exactamente los conjuntos $x \in M[G]$ que cumplen $(x \in L(\mathcal{P}\omega))^{M[G]}$. Es claro entonces que si $\alpha \in M$, se cumple

$$(\phi(\alpha)^{L(\mathcal{P}\omega)})^{M[H][G]} \leftrightarrow (\phi(\alpha)^{L(\mathcal{P}\omega)})^{M[G]},$$

pues, al relativizar, las variables ligadas quedan restringidas por condiciones equivalentes. De aquí a su vez obtenemos que

$$\bigvee p \in \mathbb{P} p \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \bigvee p \in \mathbb{P} p \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Ahora bien, por 6.11 tenemos que \mathbb{P} es casi homogéneo en M y en $M[H]$, luego el teorema 6.10 nos da que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Todo el razonamiento vale para \mathbb{Q} igual que para \mathbb{P} , luego también tenemos

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Por último, como $(|I| = |J|)^{M[H]}$, tenemos que \mathbb{P} y \mathbb{Q} son semejantes en $M[H]$, con lo que el teorema 6.7 nos da que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

En definitiva,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

■

Teorema 6.13 *Si ZFC es consistente, también lo es $\text{ZF} + V = L(\mathcal{P}\omega) + \mathcal{P}\omega$ no puede ser bien ordenado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo numerable de $\text{ZFC} + V = L$. Sea $I \in M$ un conjunto no numerable ^{M} y consideremos el c.p.o. $\mathbb{P} = \text{Fn}(I, 2, \aleph_0)$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y sea $N = L(\mathcal{P}\omega)^{M[G]}$. Por el teorema 3.29 sabemos que N es un modelo transitivo (numerable) de $\text{ZF} + V = L(\mathcal{P}\omega)$. Si suponemos que $(\mathcal{P}\omega)$ puede ser bien ordenado ^{N} , podemos considerar

$$\kappa = |\mathcal{P}\omega|^N = (|\mathcal{P}\omega|^{L(\mathcal{P}\omega)})^{M[G]},$$

es decir, el menor ordinal biyectable con $(\mathcal{P}\omega)^N$ mediante una biyección perteneciente a N . Como \mathbb{P} es casi homogéneo ^{M} , se cumple que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash (\check{\kappa} = |\mathcal{P}\omega|)^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Sea μ un cardinal regular ^{M} tal que $\mu > \kappa$ y sea $\mathbb{Q} = \text{Fn}(\mu, 2, \aleph_0)^M$. Por el teorema anterior también $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash (\check{\kappa} = |\mathcal{P}\omega|)^{L(\mathcal{P}\omega)}$. Sea G' un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M . Así $\kappa = (|\mathcal{P}\omega|^{L(\mathcal{P}\omega)})^{M[G']}$, luego $|\mathcal{P}\omega|^{M[G']} = |\kappa|^{M[G']} \leq \kappa$, es decir, $(2^{\aleph_0})^{M[G']} \leq \kappa$.

Ahora bien, según 5.21 se cumple que $(2^{\aleph_0})^{M[G']} = \mu > \kappa$, en contra de la elección de μ .

■

En la sección siguiente usaremos las permutaciones de nombres inducidas por los automorfismos de un c.p.o. para adaptar a extensiones genéricas las pruebas de independencia del axioma de elección en ZFA que vimos en el capítulo II. La idea básica es sustituir los átomos por conjuntos genéricos. El próximo teorema anticipa algunos aspectos de esta técnica.

Sabemos que si $V = L$ entonces $x \trianglelefteq y$ es una fórmula con x e y como únicas variables libres que ordena bien a la clase universal, en particular a $\mathcal{P}\omega$, es decir, tenemos un criterio explícito (que no es lo mismo que verificable en casos concretos) que establece cuándo un subconjunto de ω es menor que otro, de modo que el orden así definido es, de hecho, un buen orden. Ahora probaremos

que es consistente con ZFC que ninguna fórmula $\phi(x, y)$ con x e y como únicas variables libres determine un buen orden en $\mathcal{P}\omega$. Esto no contradice al axioma de elección: éste implica que existe una relación R que ordena bien $\mathcal{P}\omega$, pero la fórmula xRy tiene tres variables libres, que es tanto como decir que no tenemos ninguna definición explícita de R .

Teorema 6.14 *Si ZFC es consistente también lo es ZFC + $\mathcal{P}\omega$ no puede ser bien ordenado por una fórmula.*

DEMOSTRACIÓN: Queremos probar que es consistente añadir a ZFC los infinitos axiomas de la forma

$$\{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\} \text{ no es un buen orden en } \mathcal{P}\omega.$$

Por compacidad basta probar la consistencia de una cantidad finita de estos axiomas. De hecho veremos que cualquiera de ellos se cumple en una cierta extensión genérica.

Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC+V = L y consideremos el c.p.o. $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega \times \omega, 2, \aleph_0)$. Sea G un filtro genérico y supongamos que una fórmula $\phi(x, y)$ ordena bien $\mathcal{P}\omega$ en $M[G]$.

Consideremos la función genérica $f_G = \bigcup_{p \in G} p : \omega \times \omega \rightarrow 2$. Para cada $i \in \omega$ definimos

$$a_i = \{n \in \omega \mid f_G(i, n) = 1\} \in (\mathcal{P}\omega)^{M[G]}.$$

Sea $A = \{a_i \mid i \in \omega\} \in M[G]$. El conjunto A va a desempeñar el papel que en el capítulo II desempeñaba el conjunto de átomos. Así, hemos sustituido los átomos por conjuntos genéricos.

Sean $\sigma_i = \{(n, p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge (i, n, 1) \in p\} \in M^{\mathbb{P}}$, $\sigma = \{(\sigma_i, \mathbb{1}) \mid i \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}}$.

Claramente $a_i = \sigma_{iG}$ y $A = \sigma_G$. Veamos que si $i, j \in \omega$, $i \neq j$, entonces

$$\mathbb{1} \Vdash \sigma_i \neq \sigma_j.$$

En efecto, dado cualquier filtro genérico H , el conjunto

$$D_{ij} = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall n \in \omega ((i, n), (j, n) \in \text{Dominio}(p) \wedge p(i, n) \neq p(j, n))\} \in M$$

es denso en \mathbb{P} , luego $H \cap D_{ij} \neq \emptyset$ y esto se traduce en que σ_{iH} y σ_{jH} se diferencian en el elemento n (que está en uno y no en otro).

Volviendo a $M[G]$, estamos suponiendo que $R = \{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\}$ es un buen orden en $\mathcal{P}\omega$ (en $M[G]$), luego el conjunto $A \in M[G]$ debe tener un mínimo, digamos a_i . Existe una condición $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \forall R (R = \{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\} \wedge R \text{ bien ordena } \mathcal{P}\omega \wedge \bigwedge z \in \sigma \sigma_i R z).$$

Como $\text{Dominio}(p) \subset \omega \times \omega$ es finito, podemos encontrar un $j \neq i$ que no aparezca como primera componente en ninguno de sus pares. Sea $g : \omega \rightarrow \omega$ la permutación que intercambia i con j y fija a los demás números. Sea $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ la aplicación dada por $f(r) = \{(g(u), v, w) \mid (u, v, w) \in r\}$, es

decir, f intercambia i por j en las primeras componentes de los dominios de las condiciones. Es claro que $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ es una semejanza. Además $\neg p \perp f(p)$, pues los únicos pares en los que $f(p)$ se diferencia de p empiezan por j , luego no están en el dominio de p .

También es inmediato que $f(\sigma_i) = \sigma_j$, $f(\sigma_j) = \sigma_i$ y $f(\sigma_k) = \sigma_k$ cuando $i \neq k \neq j$. Esto implica a su vez que $f(\sigma) = \sigma$. Así pues, el teorema 6.7 nos da que

$$f(p) \Vdash \bigvee R(R = \{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\} \\ \wedge R \text{ bien ordena } \mathcal{P}\omega \wedge \bigwedge z \in \sigma \sigma_j R z).$$

Sea $q \leq p \wedge q \leq f(p)$ y sea H un filtro genérico con $q \in H$. Tenemos que en $M[H]$ la relación $R = \{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\}$ es un buen orden en $\mathcal{P}\omega$ tal que $\sigma_{iG} R \sigma_{jG} \wedge \sigma_{jG} R \sigma_{iG}$, pero esto implica que $\sigma_{iG} = \sigma_{jG}$, cuando por otra parte $\mathbf{1} \Vdash \sigma_i \neq \sigma_j$, contradicción. ■

6.2 Extensiones simétricas

Según anunciábamos en la sección anterior, vamos a traducir a extensiones genéricas los argumentos que vimos en el capítulo II sobre modelos simétricos de ZFA.

Sea \mathbb{P} un c.p.o., $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ y H un subgrupo de $\text{Aut } \mathbb{P}$. Llamaremos *grupo de simetrías* de σ en H al conjunto

$$\text{Sim}_H(\sigma) = \{h \in H \mid h(\sigma) = \sigma\}.$$

Claramente $\text{Sim}_H(\sigma)$ es un subgrupo de H y para todo conjunto x se cumple que $\text{Sim}_H(\check{x}) = H$. Un argumento formalmente idéntico a la prueba del teorema 2.9 nos da que si $f \in \text{Aut } \mathbb{P}$ entonces $\text{Sim}_H(f(\sigma)) = \text{Sim}_H(\sigma)^f$.

Si Γ es un filtro normal de subgrupos de H , diremos que σ es *simétrico* (respecto a H y Γ) si $\text{Sim}_H(\sigma) \in \Gamma$. Diremos que σ es *hereditariamente simétrico* (respecto de H y Γ) si σ es simétrico y todo $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ es hereditariamente simétrico.

Si M es un modelo transitivo de ZF, llamaremos $SM^{\mathbb{P}}$ a la clase de todos los \mathbb{P} -nombres $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ hereditariamente simétricos^M. Una simple inducción prueba que

$$\bigwedge x \in M \check{x} \in SM^{\mathbb{P}}.$$

Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M definimos la *extensión simétrica*

$$SM[G] = \{\tau_G \mid \tau \in SM^{\mathbb{P}}\}.$$

A los elementos de $SM[G]$, es decir, los elementos de $M[G]$ que admiten un nombre simétrico, los llamaremos *conjuntos simétricos*.

Hemos de probar que las extensiones simétricas son modelos transitivos de ZF. Empezamos con un hecho técnico:

Teorema 6.15 *Sea M un modelo transitivo de ZFC y en M sea \mathbb{P} un c.p.o., H un subgrupo de $\text{Aut } \mathbb{P}$, Γ un filtro normal de subgrupos de H y $g \in H$. Entonces $g|_{SM^{\mathbb{P}}} : SM^{\mathbb{P}} \rightarrow SM^{\mathbb{P}}$ biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que $\wedge \sigma \in SM^{\mathbb{P}} \ g(\sigma) \in SM^{\mathbb{P}}$ por \in -inducción. Lo suponemos cierto para los nombres en la clausura transitiva de σ , con lo que $\text{Dominio}(g(\sigma)) \subset SM^{\mathbb{P}}$. Por otra parte, $\text{Sim}_H(g(\sigma)) = \text{Sim}_H(\sigma)^g \in \Gamma$, luego $g(\sigma)$ es simétrico y, por consiguiente, hereditariamente simétrico.

Esto prueba que $g|_{SM^{\mathbb{P}}} : SM^{\mathbb{P}} \rightarrow SM^{\mathbb{P}}$. Ciertamente la restricción es inyectiva porque g lo es. Además es suprayectiva, pues si $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$, su antiimagen por g es $g^{-1}(\sigma)$, que está en $SM^{\mathbb{P}}$ por la parte ya probada. ■

Teorema 6.16 *Sea M un modelo transitivo de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea $H \in M$ un subgrupo de $\text{Aut}^M \mathbb{P}$ y $\Gamma \in M$ un filtro normal^M de subgrupos de H . Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces $M \subset SM[G] \subset M[G]$ y $SM[G]$ es un modelo transitivo de los axiomas de extensionalidad, regularidad, par, unión, vacío e infinitud.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in M$ entonces $\check{x} \in SM^{\mathbb{P}}$, luego $x = \check{x}_G \in SM[G]$. la inclusión $SM[G] \subset M[G]$ es obvia.

Si $u \in v \in SM[G]$, entonces $v = \tau_G$ con $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Por consiguiente $u = \sigma_G$, con σ en el dominio de τ , luego $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$. Así pues, $u = \sigma_G \in SM[G]$.

Esto prueba que $SM[G]$ es transitivo, con lo que cumple el axioma de extensionalidad. El axioma de regularidad se cumple en cualquier clase.

Veamos el axioma del par. Sean $x, y \in SM[G]$. Entonces $x = \sigma_G, y = \tau_G$, con $\sigma, \tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $\rho = \text{pd}(\sigma, \tau) = \{(\sigma, \mathbf{1}), (\tau, \mathbf{1})\}$.

Tenemos que $\text{Sim}_H(\sigma), \text{Sim}_H(\tau) \in \Gamma$ y claramente

$$\text{Sim}_H(\sigma) \cap \text{Sim}_H(\tau) \leq \text{Sim}_H(\rho).$$

Por lo tanto ρ es simétrico. Como su dominio está formado por los nombres hereditariamente simétricos σ y τ , de hecho $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$, luego concluimos que $\{x, y\} = \rho_G \in SM[G]$.

Ahora comprobamos el axioma de la unión. Tomemos $x \in SM[G]$, de modo que $x = \sigma_G$ con $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$. En la prueba de 4.19 vimos que

$$\pi = \{(\rho, p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge \bigvee \tau q r ((\tau, q) \in \sigma \wedge (\rho, r) \in \tau \wedge p \leq r \wedge p \leq q)\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

cumple $\pi_G = \bigcup_{y \in x} y$. Basta probar que $\pi \in SM^{\mathbb{P}}$.

Si $\rho \in \text{Dominio}(\pi)$, existe $\tau \in \text{Dominio}(\sigma)$ tal que $\rho \in \text{Dominio}(\tau)$. Entonces $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$, porque σ es hereditariamente simétrico, luego también $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$. Falta probar que π es simétrico, para lo cual basta a su vez comprobar que $\text{Sim}_H(\sigma) \leq \text{Sim}_H(\pi)$.

Si $g \in \text{Sim}_H(\sigma)$, sea $(\rho, p) \in \pi$ y sean τ, q, r tales que

$$(\tau, q) \in \sigma \wedge (\rho, r) \in \tau \wedge p \leq r \wedge p \leq q.$$

Entonces

$$(g(\tau), g(q)) \in g(\sigma) \wedge (g(\rho), g(r)) \in g(\tau) \wedge g(p) \leq g(r) \wedge g(p) \leq g(q),$$

de donde se sigue que $(g(\rho), g(p)) \in \pi$, es decir, $g(\pi) \subset \pi$. Aplicando esto a g^{-1} concluimos que $g^{-1}(\pi) \subset \pi$, luego $\pi \subset g(\pi)$ y tenemos la igualdad. Esto prueba que $g \in \text{Sim}_H(\pi)$.

Los axiomas del vacío e infinitud se siguen de que $\emptyset, \omega \in M \subset SM[G]$. ■

Demostrar los axiomas de reemplazo y partes presenta la misma dificultad que en el caso de $M[G]$, pero afortunadamente el trabajo que hay que hacer es completamente análogo al que ya hemos hecho:

Definición 6.17 Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula metamatemática. Sea M un modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., $H \in M$ un subgrupo de $\text{Aut}^M \mathbb{P}$, $\Gamma \in M$ un filtro normal^M de subgrupos de H , $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in SM^{\mathbb{P}}$. Definimos $p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ como

$$\bigwedge G (G \text{ es } \mathbb{P}\text{-genérico sobre } M \wedge p \in G \rightarrow \phi^{SM[G]}(\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG})).$$

Si \mathbb{P} es un c.p.o., H es un subgrupo de $\text{Aut} \mathbb{P}$, Γ es un filtro normal de subgrupos de H y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in SV^{\mathbb{P}}$, definimos la fórmula

$$p \Vdash_S^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

exactamente igual que hicimos en la sección 4.3 con \Vdash^* pero exigiendo que todos los nombres considerados sean hereditariamente simétricos. Todos los teoremas de dicha sección son válidos con este cambio para extensiones simétricas.

Para probar que las extensiones simétricas son modelos de ZF necesitamos la versión simétrica de los resultados de la sección anterior. Resumimos todo lo que nos hace falta en un único teorema:

Teorema 6.18 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea $H \in M$ un subgrupo de $\text{Aut}^M \mathbb{P}$, sea $\Gamma \in M$ un filtro normal^M de subgrupos de H , sea $g \in H$ y G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces $g[G]$ es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , $SM[G] = SM[g[G]]$ y si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula metamatemática y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in SM^{\mathbb{P}}$, entonces*

$$p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \leftrightarrow g(p) \Vdash_S \phi(g(\sigma_1), \dots, g(\sigma_n)).$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente $g[G] = (g^{-1})^{-1}[G]$, luego por 6.3 es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Como $g^{-1} : SM^{\mathbb{P}} \rightarrow SM^{\mathbb{P}}$ es biyectiva, usando 6.7 vemos que

$$\begin{aligned} SM[G] &= \{\tau_G \mid \tau \in SM^{\mathbb{P}}\} = \{g^{-1}(\tau)_G \mid \tau \in SM^{\mathbb{P}}\} \\ &= \{\tau_{g[G]} \mid \tau \in SM^{\mathbb{P}}\} = SM[g[G]]. \end{aligned}$$

Si $p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, sea G un filtro genérico sobre M tal que $g(p) \in G$. Entonces $g^{-1}[G]$ es un filtro genérico con $p \in g^{-1}[G]$, luego

$$\phi^{SM[g^{-1}[G]]}(\sigma_{1g^{-1}[G]}, \dots, \sigma_{ng^{-1}[G]}).$$

Por 6.7 y la parte ya probada esto es lo mismo que

$$\phi^{SM[G]}(g(\sigma_1)_G, \dots, g(\sigma_n)_G).$$

Por lo tanto $g(p) \Vdash \phi(g(\sigma_1), \dots, g(\sigma_n))$. La implicación contraria sale de aplicar la que hemos probado a g^{-1} . ■

Teorema 6.19 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea $H \in M$ un subgrupo de $\text{Aut}^M \mathbb{P}$, sea $\Gamma \in M$ un filtro normal^M de subgrupos de H y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces $SM[G]$ es un modelo transitivo numerable de ZF.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba es análoga a la de 4.30. Sólo hay que comprobar en añadidura que ciertos \mathbb{P} -nombres son hereditariamente simétricos. Para probar el axioma de reemplazo partimos de una fórmula $\phi(x, y, x_1, \dots, x_n)$ y de conjuntos $\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG}, \sigma_G \in SM[G]$ como en 4.30. Construimos $S \subset SM^{\mathbb{P}}$ igual que allí pero ahora completamos la construcción como sigue: definimos

$$S'_0 = S \wedge \bigwedge n \in \omega S'_{n+1} = \bigcup_{g \in H} g[S'_n] \wedge S' = \bigcup_{n \in \omega} S'_n.$$

De este modo $S' \in M$ cumple lo mismo que S (porque lo contiene) y además $\bigwedge g \in H g[S'] = S'$. Definimos

$$\rho = \{(\mu, p) \mid \mu \in S' \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \bigvee \pi \in \text{Dominio}(\sigma) p \Vdash_S (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))\}.$$

Basta comprobar que $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$. El resto de la prueba es idéntico a 4.30. Como $S' \subset SM^{\mathbb{P}}$, tenemos que el dominio de ρ está contenido en $SM^{\mathbb{P}}$, luego sólo hemos de ver que ρ es simétrico. Para ello bastará probar que

$$\text{Sim}_H(\sigma_1) \cap \dots \cap \text{Sim}_H(\sigma_n) \cap \text{Sim}_H(\sigma) \subset \text{Sim}_H(\rho).$$

Tomamos g en el grupo de la izquierda. Si $(\mu, p) \in \rho$, sea $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ tal que $p \Vdash_S (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu, \sigma_1, \dots, \sigma_n))$.

Entonces $g(\pi) \in \text{Dominio}(g(\sigma)) = \text{Dominio}(\sigma)$, $g(\mu) \in g[S'] = S'$ y por el teorema anterior

$$g(p) \Vdash_S (g(\pi) \in \sigma \wedge \phi(g(\pi), g(\mu), \sigma_1, \dots, \sigma_n)).$$

Esto prueba que $(g(\mu), g(p)) \in \rho$. Por consiguiente $g(\rho) \subset \rho$ y razonando con g^{-1} obtenemos la igualdad.

Para probar el axioma de partes tomamos $\sigma_G \in SM[G]$ y definimos

$$S = \{\mu \in SM^{\mathbb{P}} \mid \text{Dominio}(\mu) \subset \text{Dominio}(\sigma)\} \in M, \quad \rho = S \times \{\mathbb{1}\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Es fácil ver que $\text{Sim}_H(\sigma) \subset \text{Sim}_H(\rho)$, de donde se sigue que $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$. Siguiendo el argumento de 4.30, tomamos $\tau_G \subset \sigma_G$ y definimos

$$\mu = \{(\pi, p) \mid \pi \in \text{Dominio}(\sigma) \wedge p \Vdash_S \pi \in \tau\}.$$

Se cumple que $\mu \in SM^{\mathbb{P}}$ porque $\text{Sim}_H(\sigma) \cap \text{Sim}_H(\tau) \subset \text{Sim}_H(\mu)$. Por lo tanto $\mu \in S$ y el argumento de 4.30 vale igualmente. ■

En el capítulo II definíamos el filtro de subgrupos mediante el concepto de soporte. Vamos a ver que aquí es posible hacer algo análogo.

Definición 6.20 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, $X \in M$ y $\mathbb{P} = \text{Fn}(X \times \omega, 2, \aleph_0)$. Sea $H \in M$ un subgrupo del grupo de permutaciones Σ_X^M . Para cada $g \in H$ definimos $g^* : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ mediante

$$g^*(p) = \{(g(x), m, r) \mid (x, m, r) \in p\}.$$

Es fácil ver que $g^* \in \text{Aut}^M \mathbb{P}$, así como que

$$\bigwedge gh \in H (g \circ h)^* = g^* \circ h^* \wedge \bigwedge g \in H (g^{-1})^* = (g^*)^{-1}.$$

Además la identidad en X induce la identidad en \mathbb{P} . Esto se traduce en que $H^* = \{g^* \mid g \in H\}$ es un subgrupo de $\text{Aut}^M \mathbb{P}$ y la aplicación $g \mapsto g^*$ es un isomorfismo de grupos (en M) entre H y H^* .

Por consiguiente podemos identificar cada permutación g con g^* (en otras palabras, suprimir las estrellas) sin caer en ambigüedades. De este modo consideraremos $H \subset \text{Aut}^M \mathbb{P}$ y haremos actuar indistintamente sus elementos sobre elementos de X , condiciones o \mathbb{P} -nombres.

Si $B \subset X$, $B \in M$, llamaremos

$$\text{Est}_H(B) = \{h \in H \mid \bigwedge n \in B h(n) = n\} \in M.$$

Claramente $\text{Est}_H(B)$ es un subgrupo de H . Definimos el *filtro de los soportes finitos* en H como

$$\Gamma = \{K \in M \mid K \text{ es subgrupo de } H \wedge \bigvee B \in \mathcal{P}X (B \text{ finito} \wedge \text{Est}_H(B) \subset K)\}.$$

Ciertamente $\Gamma \in M$ es un subgrupo normal^M de subgrupos de H (se prueba con el mismo argumento que el hecho análogo en el capítulo II).

Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y consideremos la extensión simétrica $SM[G]$ determinada por H y Γ . Sea $f_G : X \times \omega \rightarrow 2$ la función genérica. Para cada $x \in X$ sean

$$s_x = \{n \in \omega \mid f_G(x, n) = 1\} \in M[G],$$

$$\sigma_x = \{(\check{n}, p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge (x, n, 1) \in p\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Claramente $\sigma_{xG} = s_x$ y si $g \in H$ entonces $g(\sigma_x) = \sigma_{g(x)}$. En consecuencia $\text{Est}_H(\{x\}) \subset \text{Sim}_H(\sigma_x)$, por lo que cada σ_x es simétrico, y como los nombres \check{n} son hereditariamente simétricos, concluimos que $\sigma_x \in SM^{\mathbb{P}}$ y $s_x \in SM[G]$.

A los conjuntos s_x los llamaremos *conjuntos genéricos simétricos* y los nombres σ_x serán los *nombres canónicos de los conjuntos genéricos simétricos*.

Es fácil probar que si $x, y \in A$ cumplen $a \neq b$, entonces el conjunto

$$D_{xy} = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall n((x, n), (y, n) \in \text{Dominio}(p) \wedge p(x, n) \neq p(y, n))\} \in M$$

es denso en \mathbb{P} , de donde se sigue que todo filtro genérico G ha de cortarlo, y esto a su vez implica que $s_x \neq s_y$. Así pues, $\mathbf{1} \Vdash_S \sigma_x \neq \sigma_y$.

El teorema siguiente se corresponde con los primeros apartados de 2.17.

Teorema 6.21 *Si ZFC es consistente, también lo es ZF más la existencia de un conjunto infinito $A \subset \mathcal{P}\omega$ sin subconjuntos infinitos numerables. En particular A no puede ser bien ordenado y, por consiguiente, $\mathcal{P}\omega$ tampoco.*

DEMOSTRACIÓN: Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC, consideramos $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega \times \omega, 2, \aleph_0)$, $H = \Sigma_\omega^M$, G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $N = SM[G]$ la extensión simétrica determinada por el filtro de soportes finitos.

Sea $A = \{s_n \mid n \in \omega\}$ el conjunto de los conjuntos genéricos simétricos definido en las consideraciones previas a este teorema. Se cumple que $A \in N$ porque tiene por nombre a $\sigma = \{(\sigma_n, \mathbf{1}) \mid n \in \omega\}$ y $\text{Sim}_H(\sigma) = H$ (ya que los automorfismos de H permutan los nombres canónicos σ_n).

Veamos que A cumple lo pedido en el modelo N . Ciertamente $A \subset \mathcal{P}\omega$ y es infinito ^{N} porque ser infinito es absoluto. Ahora hemos de probar que no existe $f : \omega \rightarrow A$ inyectiva tal que $f \in N$. Si existiera sería $f = \tau_G$, para un cierto $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset \omega$ finito tal que $\text{Est}_H(B) \subset \text{Sim}_H(\tau)$.

Tomamos $i \in \omega \setminus B$ tal que $s_i \in f[\omega]$ y $n \in \omega$ tal que $f(n) = s_i$. Sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash_S (\tau : \omega \rightarrow \sigma \text{ inyectiva} \wedge \tau(\check{n}) = \sigma_i).$$

Sea $j \in \omega$ tal que $j \notin B$, $j \neq i$ y que no figure como primera componente de un par en el dominio de p . Sea $g \in H$ la permutación que intercambia i con j y deja fijos a los demás números. Entonces $g \in \text{Est}_H(B) \subset \text{Sim}_H(\tau)$, luego $g(\tau) = \tau$ y también $g(\sigma) = \sigma$, $g(\check{n}) = \check{n}$ y, según las observaciones previas al teorema, $g(\sigma_i) = \sigma_j$. Por consiguiente

$$g(p) \Vdash_S (\tau : \omega \rightarrow \sigma \text{ inyectiva} \wedge \tau(\check{n}) = \sigma_j).$$

Además p y $g(p)$ son compatibles, ya que los únicos pares en los que discrepan empiezan por i o j , pero en el dominio de p no hay pares que empiecen por j y en el dominio de $g(p)$ no hay pares que empiecen por i . Sea $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p \wedge r \leq g(p)$. Así

$$r \Vdash_S (\tau : \omega \rightarrow \sigma \text{ inyectiva} \wedge \tau(\check{n}) = \sigma_i \wedge \tau(\check{n}) = \sigma_j).$$

Por consiguiente $r \Vdash_S \sigma_i = \sigma_j$, en contradicción con que $\mathbf{1} \Vdash_S \sigma_i \neq \sigma_j$. ■

Conviene reflexionar sobre la prueba que acabamos de ver. Bajo el supuesto de que A tiene un subconjunto numerable determinamos un σ_i mediante una

propiedad que lo caracteriza en términos de nombres τ y \check{n} ; fijamos una condición p que fuerce esta propiedad y construimos un automorfismo g que mantenga los parámetros \check{n} y τ , pero transforme σ_i en un σ_j . El punto más delicado es que p y $g(p)$ han de resultar compatibles, pues entonces una extensión común fuerza que σ_i y σ_j cumplan una misma propiedad que supuestamente caracteriza a un único conjunto genérico, y así tenemos la contradicción. Garantizar la compatibilidad de p y $g(p)$ nos ha obligado a elegir j después de haber fijado p . Si el lector intenta demostrar los apartados siguientes del teorema 2.17 se encontrará con que necesitaría permutar dos nombres σ_i y σ_j elegidos antes de determinar la condición p , y no después, pero entonces ya no es posible garantizar la compatibilidad de p y $g(p)$, y el argumento se viene abajo. Esto no es casual. De hecho $\mathcal{P}\omega$ (y en particular A), sí que puede ser totalmente ordenado en N (puede biyectarse con el conjunto de los números reales sin necesidad del axioma de elección, y el orden total de \mathbb{R} se traslada así a $\mathcal{P}\omega$).

La conclusión es que para adaptar las pruebas de consistencia en ZFA no podemos en general sustituir los átomos por subconjuntos de ω . A continuación veremos que todo funciona bien si usamos subconjuntos de subconjuntos de ω . Como el resto de 2.17 es un poco más complejo, veremos primero la versión del teorema 2.18.

Teorema 6.22 *Si ZFC es consistente, también lo es ZF más la existencia de una familia numerable de pares desordenados que no tiene funciones de elección.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(2 \times \omega \times \omega \times \omega, 2, \aleph_0)$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y consideremos la función genérica $f_G : 2 \times \omega \times \omega \times \omega \rightarrow 2$. Sean

$$\begin{aligned}
a_{nm} &= \{i \in \omega \mid f_G(0, n, m, i) = 1\} \in M[G], \\
b_{nm} &= \{i \in \omega \mid f_G(1, n, m, i) = 1\} \in M[G], \\
a_n &= \{a_{nm} \mid m \in \omega\} \in M[G], \\
b_n &= \{b_{nm} \mid m \in \omega\} \in M[G], \\
P_n &= \{a_n, b_n\} \in M[G], \\
P &= \{P_n \mid n \in \omega\} \in M[G], \\
\sigma_{nm} &= \{(\check{i}, p) \mid i \in \omega \wedge p \in \mathbb{P} \wedge (0, n, m, i, 1) \in p\} \in M^{\mathbb{P}}, \\
\tau_{nm} &= \{(\check{i}, p) \mid i \in \omega \wedge p \in \mathbb{P} \wedge (1, n, m, i, 1) \in p\} \in M^{\mathbb{P}}, \\
\sigma_n &= \{(\sigma_{nm}, \mathbb{1}) \mid m \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}}, \\
\tau_n &= \{(\tau_{nm}, \mathbb{1}) \mid m \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}}, \\
\rho_n &= \{(\sigma_n, \mathbb{1}), (\tau_n, \mathbb{1})\} \in M^{\mathbb{P}}, \\
\rho &= \{(\rho_n, \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}}.
\end{aligned}$$

Notemos que los conjuntos a_{nm} y b_{nm} son los conjuntos genéricos simétricos (con la notación de la definición general, estamos tomando $X = 2 \times \omega \times \omega$) y σ_{nm} , τ_{nm} son sus nombres canónicos. Así pues, $\sigma_{nmG} = a_{nm}$, $\tau_{nmG} = b_{nm}$. Así mismo es claro que $\sigma_nG = a_n$, $\tau_nG = b_n$, $\rho_nG = P_n$ y $\rhoG = P$.

Definimos ahora H como el conjunto de todas las permutaciones $g \in \Sigma_{2 \times \omega \times \omega}^M$ tales que existen $g_1 : 2 \times \omega \rightarrow 2$ y $g_3 : 2 \times \omega \times \omega \rightarrow \omega$ de modo que

$$g(a, n, m) = (g_1(a, n), n, g_3(a, n, m)).$$

Se comprueba fácilmente que $H \in M$ y que es un subgrupo de $\Sigma_{2 \times \omega \times \omega}^M$. La definición de H puede parecer compleja a primera vista, pero responde a una idea muy concreta que entenderemos tan pronto como pensemos en la forma en que actúa sobre los conjuntos que hemos definido.

Sea $g \in H$ con $g(0, n, m) = (r_0, n, m_0)$, $g(1, n, m) = (r_1, n, m_1)$. Notemos que $r_0 \neq r_1$, o si no g no sería suprayectiva. Es fácil ver que

$$g(\sigma_{nm}) = \begin{cases} \sigma_{nm_0} & \text{si } r_0 = 0, \\ \tau_{nm_0} & \text{si } r_0 = 1, \end{cases} \quad g(\tau_{nm}) = \begin{cases} \tau_{nm_1} & \text{si } r_1 = 1, \\ \sigma_{nm_1} & \text{si } r_1 = 0, \end{cases}$$

$$g(\sigma_n) = \begin{cases} \sigma_n & \text{si } r_0 = 0, \\ \tau_n & \text{si } r_0 = 1, \end{cases} \quad g(\tau_n) = \begin{cases} \tau_n & \text{si } r_1 = 1, \\ \sigma_n & \text{si } r_1 = 0, \end{cases}$$

Por consiguiente $g(\rho_n) = \rho_n$ y $g(\rho) = \rho$.

Si el lector comprueba estos hechos entenderá la definición de H : al exigir que n permanezca inalterada estamos exigiendo que cada σ_{nm} se transforme en un $\sigma_{nm'}$ o en un $\tau_{nm'}$, y al exigir que la primera componente de la imagen dependa sólo de a y de n estamos exigiendo que si un σ_{nm_0} se transforma en un $\sigma_{nm'}$, entonces lo mismo valga para todos los σ_{nm} , de modo que g permuta los elementos de σ_n , mientras que si un σ_{nm_0} se transforma en un $\tau_{nm'}$, entonces g transforma σ_n en τ_n .

Llamemos $N = SM[G]$ a la extensión simétrica determinada por el filtro de soportes finitos. Todos los nombres que hemos definido son hereditariamente simétricos, lo cual se deduce inmediatamente de los hechos siguientes:

$$\text{Est}_H(\{(0, n, m)\}) \subset \text{Sim}_H(\sigma_{nm}), \quad \text{Est}_H(\{(1, n, m)\}) \subset \text{Sim}_H(\tau_{nm}),$$

$$\text{Est}_H(\{(0, n, 0)\}) \subset \text{Sim}_H(\sigma_n), \quad \text{Est}_H(\{(1, n, 0)\}) \subset \text{Sim}_H(\tau_n),$$

$$\text{Sim}_H(\rho_n) = \text{Sim}_H(\rho) = H.$$

Como consecuencia, $P \in N$. Para ver que P es numerable^N basta tener en cuenta que

$$\mu = \{(\text{po}(\check{n}, \rho_n), \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in \text{SM}^{\mathbb{P}}$$

y así $\mu_G = \{P_n\}_{n \in \omega} \in N$. Vamos a ver que P no tiene una función de elección en N o, equivalentemente, que no existe una función $f \in N$ tal que f sea una función de dominio ω y $\bigwedge n \in \omega f(n) \in P_n$.

Si existiera tal f , sería $f = \pi_G$, con $\pi \in \text{SM}^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset 2 \times \omega \times \omega$ tal que $\text{Est}_H(B) \subset \text{Sim}_H(\pi)$. Tomemos un $n \in \omega$ que no figure entre las segundas componentes de las ternas de B . Supongamos por ejemplo que $f(n) = a_n$. Sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash_G (\pi \text{ es una función de dominio } \omega \wedge \pi(\check{n}) = \sigma_n).$$

Ahora vamos a permutar σ_n con τ_n para llegar a una contradicción. Sea $r \in \omega$ tal que si $m \geq r$ entonces r no esté entre las terceras componentes de las ternas del dominio de p . Definimos $g : 2 \times \omega \times \omega \rightarrow 2 \times \omega \times \omega$ la aplicación dada por

$$\begin{aligned} g(a, n', m) &= (a, n', m) && \text{si } n' \neq n, \\ g(0, n, m) &= \begin{cases} (1, n, m+r) & \text{si } m < r, \\ (1, n, m-r) & \text{si } r \leq m < 2r, \\ (1, n, m) & \text{si } 2r \leq m, \end{cases} \\ g(1, n, m) &= \begin{cases} (0, n, m+r) & \text{si } m < r, \\ (0, n, m-r) & \text{si } r \leq m < 2r, \\ (0, n, m) & \text{si } 2r \leq m. \end{cases} \end{aligned}$$

La idea es la siguiente: queremos transformar las ternas que empiezan por $(0, n)$ en las que empiezan por $(1, n)$ y viceversa. Si sólo tocamos este tipo de ternas dejamos fijos los elementos de B , pues ninguna de ellas está en B por la elección de n . Pero también queremos que al permutar las ternas mediante g , las condiciones p y $g(p)$ resulten compatibles. Para ello establecemos que todas las ternas de la forma $(0, n, m)$ con $m \leq r$ (entre las cuales se encuentran todas las del dominio de p) sean enviadas a ternas $(1, n, m')$ con $m' \geq r$ (ninguna de las cuales está en el dominio de p). Así ninguna terna del dominio de $g(p)$ con segunda componente n aparece en el dominio de p , con lo que p y $g(p)$ no pueden contradecirse.

Es fácil ver que $g \in H$ y que de hecho $g \in \text{Est}_H(B) \subset \text{Sim}_H(\pi)$, de donde $g(\pi) = \pi$, y por otra parte $g(\sigma_n) = \tau_n$. Por consiguiente

$$g(p) \Vdash_S (\pi \text{ es una función de dominio } \omega \wedge \pi(\check{n}) = \tau_n),$$

luego una extensión común de p y $g(p)$ fuerza que $\sigma_n = \tau_n$, lo cual es imposible. ■

Dedekind definió los conjuntos finitos como aquellos que no pueden biyectarse con subconjuntos propios, es decir:

Definición 6.23 Se dice que un conjunto A es *Dedekind-finito* o, simplemente, *D-finito* si no existe $B \subsetneq A$ equipotente a A .

Es fácil probar que A es D-finito si y sólo si no tiene subconjuntos numerables. En efecto, un conjunto A es D-infinito si existe $f : A \rightarrow A$ inyectiva y no suprayectiva, en cuyo caso podemos tomar $a \in A \setminus f[A]$ y considerar la aplicación inyectiva $g : \omega \rightarrow A$ dada por

$$g(0) = a \wedge \bigwedge n \in \omega \ g(n+1) = f(g(n)).$$

La otra implicación es evidente.

Evidentemente, la D-finitud equivale a la finitud en el sentido usual (es decir, a la equipotencia con un número natural) en presencia del axioma de elección, pero sin él lo máximo que podemos decir es que todo conjunto finito es D-finito. El recíproco no es necesariamente cierto, tal y como muestra el teorema 2.17 o su traducción a extensiones simétricas, que mostramos seguidamente:

Teorema 6.24 *Si ZFC es consistente también lo es ZF más la existencia de un conjunto $A \subset \mathcal{P}\mathcal{P}\omega$ de cardinal \mathfrak{p} tal que*

- a) *A es infinito, pero todos sus subconjuntos son finitos o cofinitos (es decir, de complementario finito).*
- b) *A no tiene subconjuntos (infinitos) numerables (o sea, es D-finito).*
- c) *A no puede ser totalmente ordenado.*
- d) *Los cardinales menores que \mathfrak{p} son exactamente:*

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \cdots \quad \cdots < \mathfrak{p} - 4 < \mathfrak{p} - 3 < \mathfrak{p} - 2 < \mathfrak{p} - 1,$$

con lo que la clase \mathfrak{C} no está ni totalmente ordenada ni bien fundada.

- e) *Se cumple*

$$\mathfrak{p} < \mathfrak{p} + 1 < \mathfrak{p} + 2 < \cdots < \mathfrak{p} + \mathfrak{p} < \mathfrak{p}^2 < \mathfrak{p}^3 < \cdots$$

- f) *No se cumple $\mathfrak{p}^2 \leq 2^{\mathfrak{p}}$.*

DEMOSTRACIÓN: partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC y consideramos el c.p.o. $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega \times \omega \times \omega, 2, \aleph_0)$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y sean $s_{nm}, s_n, A, \sigma_{nm}$. σ_n y σ como en el teorema anterior (omitiendo las primeras componentes 0/1). Tomamos como H el grupo de las permutaciones $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega \times \omega$ tales que existen $h_1 : \omega \rightarrow \omega$ biyectiva y $h_2 : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ de modo que $g(n, m) = (h_1(n), h_2(n, m))$.

Esta construcción nos garantiza que si $g \in H$ y $g(n, m) = (r, s)$, entonces $g(\sigma_{nm}) = \sigma_{rs}$, $g(\sigma_n) = \sigma_r$ y $g(\sigma) = \sigma$.

Consideramos la extensión simétrica $N = SM[G]$ determinada por H y el filtro de soportes finitos. Las observaciones anteriores nos dan que todos los nombres que hemos construido son hereditariamente simétricos y por lo tanto $A \in N$.

Si existiera $x \in N$, $x \subset A$ que no fuera finito ni cofinito, entonces $x = \tau_G$ para cierto $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset \omega \times \omega$ finito tal que $\text{Est}_H(B) \subset \text{Sim}_H(\tau)$. Tomemos $i, j \in \omega \setminus B$ tales que $s_i \in x \wedge s_j \notin x$. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash_S \sigma_i \in \tau \wedge \sigma_j \notin \tau$.

Sea $r \in \omega$ tal que si $m \geq r$ entonces m no aparece como segunda componente de ninguna terna del dominio de p . Como en el teorema anterior definimos $g \in H$ tal que $g(n, m) = (n, m)$ para $i \neq n \neq j$, $g(\sigma_i) = \sigma_j$ y $\neg g(p) \perp p$.

De este modo $g(p) \Vdash_S \sigma_j \in \tau \wedge \sigma_i \notin \tau$, y una extensión común de p y $g(p)$ fuerza una contradicción.

Esto prueba a). Los apartados b) y c) son consecuencias de a) (ver 2.17).

d) La prueba del apartado correspondiente en 2.17 se basa únicamente en los apartados anteriores, luego es válida igualmente en nuestro contexto.

e) Dejamos al lector la adaptación del apartado correspondiente de 2.17.

f) Supongamos que existe una aplicación $f : A \times A \rightarrow \mathcal{P}A \cap N$ inyectiva tal que $f \in N$. Entonces $f = \tau_G$ con $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset \omega \times \omega$ tal que

$\text{Est}_H(B) \subset \text{Sim}_H(\tau)$. Sean $i, j \in \omega$ dos números naturales distintos que no figuren como primera componente de ningún par de B . Tomemos $x = f(s_i, s_j)$ o bien $x = A \setminus f(s_i, s_j)$ de modo que x sea finito (por a).

Digamos que $x = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_n}\}$ y sea $\rho = \{(\sigma_{i_1}, \mathbf{1}), \dots, (\sigma_{i_n}, \mathbf{1})\}$. Es inmediato comprobar que $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$ y $x = \rho_G$. Sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash \tau : \sigma \times \sigma \longrightarrow \mathcal{P}\sigma \text{ inyectiva} \wedge \tau(\sigma_i, \sigma_j) = \rho,$$

(o bien $\sigma \setminus \tau(\sigma_i, \sigma_j) = \rho$) según hayamos elegido x).

Si s_i y s_j están ambos o ninguno en x permutaremos i con j , mientras que si, por ejemplo, $s_i \in x \wedge s_j \notin x$, tomaremos $k \in \omega$ que no esté entre las primeras componentes de los pares de B y que sea distinto de i, j, i_1, \dots, i_n . En este caso permutaremos j y k .

Jugando con las segundas componentes podemos construir $g \in \text{Est}_H(B)$ que deje invariantes a todos los σ_r excepto a los dos que queremos permutar y de modo que $\neg p \perp g(p)$. Como es habitual, una extensión común de ambas condiciones fuerza una contradicción. ■

Los conjuntos D-finitos son una rica fuente de anomalías. Notemos ante todo que la existencia de un subconjunto infinito D-finito de $\mathcal{P}\omega$ implica fácilmente la existencia de un subconjunto análogo del conjunto de los números reales (porque $\mathcal{P}\omega$ puede biyectarse con \mathbb{R} en ZF).

Ejercicio: Probar que es consistente con ZF la existencia de un subconjunto acotado del conjunto \mathbb{R} de los números reales (no vacío) que no contenga ninguna sucesión convergente a su supremo. (Ayuda: considerar un subconjunto infinito D-finito del intervalo $]0, 1[$. Puede tomarse sin máximo elemento.)

Teorema 6.25 *Sea A un conjunto infinito D-finito.*

- El conjunto $S = \{s \in A^{<\omega} \mid s \text{ es inyectiva}\}$ es infinito y D-finito.
- El conjunto $T = S \setminus \{\emptyset\}$ tiene cardinal menor estrictamente que S pero existe $f : T \longrightarrow S$ suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN: a) Si existiera un subconjunto numerable $\{s_n\}_{n \in \omega} \subset S$, podemos tomarlo con $s_0 \neq \emptyset$. Definimos $a_0 = s_0(0)$ y, definido $a_n \in A$, sea k el mínimo natural tal que s_k toma un valor distinto de a_0, \dots, a_n (existe porque hay un número finito de elementos de $A^{<\omega}$ que toman valores en $\{a_0, \dots, a_n\}$). Sea l el mínimo natural tal que $s_k(l) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$. Definimos $a_{n+1} = s_k(l)$. De este modo obtenemos un subconjunto numerable de A , contradicción.

b) Por definición de D-finitud, T no puede ser equipotente a S , luego su cardinal es estrictamente menor. Sin embargo, a cada sucesión $s \in T$, digamos $s : n \longrightarrow A$, podemos signarle $f(s) = s|_{n-1} \in S$ y claramente f es suprayectiva. ■

Ejercicio: Probar que si existe un conjunto infinito D-finito entonces existe un conjunto de cardinales R semejante en orden al conjunto de los números reales. (Ayuda:

Considerar una biyección entre ω y el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales. Para cada número real r sea D_r el conjunto de los números naturales cuya imagen es menor que r . Así $r \leq s \leftrightarrow D_r \subset D_s$. Sea S según el teorema anterior y $S_r = \{s \in S \mid |s| \in D_r\}$, claramente D-finito. El conjunto R de los cardinales de los conjuntos S_r cumple lo pedido.)

Probamos ahora un teorema muy general sobre las posibilidades de ordenación de los cardinales en ausencia del axioma de elección:

Teorema 6.26 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y consideremos un conjunto parcialmente ordenado $(D, \leq) \in M$. Existe una extensión simétrica N de M en la cual existe un conjunto $\{\mathfrak{p}_d\}_{d \in D}$ de cardinales ^{N} de modo que $\bigwedge d \in D (d \leq e \leftrightarrow \mathfrak{p}_d \leq \mathfrak{p}_e)$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $\mathbb{P} = \text{Fn}(D \times \omega \times \omega \times \omega, 2, \aleph_0)$ y como H el conjunto de las biyecciones $g : D \times \omega \times \omega \rightarrow D \times \omega \times \omega$, $g \in M$, de la forma

$$g(d, n, m) = (d, g_2(d, n), g_3(d, n, m)).$$

Claramente $H \in M$ es un subgrupo de $\Sigma_{D \times \omega \times \omega}^M$ que podemos identificar de la forma usual con un grupo de automorfismos de \mathbb{P} . Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $N = SM[G]$ la extensión simétrica determinada por el filtro de soportes finitos. Consideramos los conjuntos simétricos s_{dnm} y a partir de ellos formamos los conjuntos $s_{dn} = \{s_{dnm} \mid m \in \omega\} \in M[G]$. Sea $J = (\mathcal{P}D)^M$. Para cada $j \in J$ definimos $s_j = \{s_{dn} \mid d \in j \wedge n \in \omega\} \in M[G]$. Finalmente tomamos $S = \{s_j \mid j \in J\} \in M[G]$.

De forma natural se definen los nombres σ_{dmn} , σ_{dn} , σ_j y σ que nombran respectivamente a s_{dmn} , s_{dn} , s_j y S .

Es claro que si $g \in H$ cumple $g(d, n, m) = (d, n', m')$, entonces tenemos que $g(\sigma_{dmn}) = \sigma_{dn'm'}$, $g(\sigma_{dn}) = \sigma_{dn'}$, $g(\sigma_j) = \sigma_j$ y $g(\sigma) = \sigma$. De aquí se sigue que todos los nombres considerados son hereditariamente simétricos y que todos los conjuntos que hemos construido están en N . También es fácil comprobar que $\mathbf{1}$ fuerza que todos son distintos entre sí. Más aún, $\rho = \{(\text{po}(j, \sigma_j), \mathbf{1}) \mid j \in J\}$ también es hereditariamente simétrico, de donde $\{s_j\}_{j \in J} \in N$.

Para cada $d \in D$ sea $j_d = \{e \in D \mid e \leq d\}$ y sea \mathfrak{p}_d el cardinal (en N) de s_{j_d} . Claramente $\{\mathfrak{p}_d\}_{d \in D} \in N$. Si $d \leq e$ entonces $j_d \subset j_e$, luego $s_{j_d} \subset s_{j_e}$, luego $(\mathfrak{p}_d \leq \mathfrak{p}_e)^N$. Recíprocamente, si $d \not\leq e$, entonces $j_d \not\subset j_e$. Si demostramos que $(\mathfrak{p}_d \not\leq \mathfrak{p}_e)^N$ el teorema estará probado. En caso contrario existe $f \in N$ tal que $f : s_{j_d} \rightarrow s_{j_e}$ inyectiva. Digamos $f = \mu_G$, para un cierto $\mu \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset D \times \omega \times \omega$ finito tal que $\text{Est}_H(B) \subset \text{Sim}_H(\mu)$. Sean $n_1, n_2 \in \omega$ tales que no aparezcan como segundas componentes de ninguna terna de B . Tenemos que $s_{dn_1} \in s_{j_d}$, luego $f(s_{dn_1}) \in s_{j_e}$ será de la forma $f(s_{dn_1}) = s_{d'k}$, con $d' \leq e$, luego en particular $d' \neq d$. Sea $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash_S (\mu : s_{j_d} \rightarrow s_{j_e} \text{ inyectiva} \wedge \sigma_{dn_1} \in s_{j_d} \wedge \mu(\sigma_{dn_1}) = \sigma_{d'k}).$$

Sea $r \in \omega$ mayor que todas las terceras componentes de las ternas del dominio de p . Definimos $g : D \times \omega \times \omega \rightarrow D \times \omega \times \omega$ mediante

$$\begin{aligned} g(a, n, m) &= (a, n, m) \text{ si } (n \neq n_1 \wedge n \neq n_2) \vee a \neq d, \\ g(d, n_1, m) &= (d, n_2, s), \\ g(d, n_2, m) &= d(n_1, s), \text{ donde} \end{aligned}$$

$$s = \begin{cases} m + r & \text{si } m < r, \\ m - r & \text{si } r \leq m < 2r, \\ m & \text{si } 2r \leq m. \end{cases}$$

Así $g(\mu) = \mu$, $g(\sigma_{j_d} = \sigma_{j_d})$, $g(\sigma_{j_e} = \sigma_{j_e})$, $g(\sigma_{dn_1}) = \sigma_{dn_2}$, $g(\sigma_{dn_2}) = \sigma_{dn_1}$, $g(\sigma_{d'k}) = \sigma_{d'k}$ y las condiciones p y $g(p)$ son compatibles. Así, una extensión común a ambas fuerza que

$$\mu : \sigma_{j_d} \longrightarrow \sigma_{j_e} \text{ inyectiva } \wedge \sigma_{dn_1}, \sigma_{dn_2} \in \sigma_{j_d} \wedge \mu(\sigma_{dn_1}) = \sigma_{d'k} = \mu(\sigma_{dn_2}),$$

en particular, que $\sigma_{dn_1} = \sigma_{dn_2}$, cuando $\mathbf{1}$ fuerza lo contrario. ■

Para acabar demostraremos que sin el axioma de elección la unión de una familia numerable de conjuntos numerables no tiene por qué ser numerable.

Teorema 6.27 *Si ZFC es consistente, también lo es $\text{ZF} + \aleph_1$ es singular + $\mathcal{P}\omega$ es unión numerable de conjuntos numerables.*

DEMOSTRACIÓN: La idea de esta prueba es muy diferente a la de las anteriores. Vamos a colapsar todos los cardinales no numerables menores que \aleph_ω de modo que \aleph_ω se convierta en \aleph_1 .

Sea M un modelo transitivo numerable de $\text{ZFC} + V = L$. Tomamos

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \{p \mid p \subset \omega \times \omega \times \omega_\omega \wedge p \text{ es una función } \wedge p \text{ es finito} \\ &\wedge \bigwedge ni \in \omega((n, i) \in \text{Dominio}(p) \rightarrow p(n, i) \in \omega_n)\}^M, \end{aligned}$$

ordenado por la inversa de la inclusión.

Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y sea $f_G = \bigcup_{p \in G} p \in M[G]$ la función genérica. Considerando los conjuntos densos oportunos se comprueba sin dificultad que $f_G : \omega \times \omega \longrightarrow \omega_\omega^M$ así como que las aplicaciones $f_n : \omega \longrightarrow \omega_\omega^M$ dadas por $f_n(i) = f(n, i)$ son en realidad aplicaciones $f_n : \omega \longrightarrow \omega_n^M$ suprayectivas, y obviamente $f_n \in M[G]$.

Es claro que f_G colapsa a \aleph_ω^M en $M[G]$, pero vamos a construir una extensión simétrica en la que esto no sucede. Tomamos como H el conjunto de las aplicaciones $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega \times \omega$ biyectivas, $g \in M$, de la forma $g(n, i) = (n, g_2(n, i))$. Así $H \in M$ es un grupo de permutaciones de $\omega \times \omega$. Para cada $g \in H$ sea $g^* : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ dada por $g^*(p) = \{(g(n, i), \alpha) \mid (n, i, \alpha) \in p\}$. Aunque no estamos exactamente en la misma situación que en los teoremas anteriores, es fácil ver que la correspondencia $g \mapsto g^*$ permite identificar a H con un grupo de automorfismos de \mathbb{P} .

Para cada $n \in \omega$ sea $H_n = \{g \in H \mid \bigwedge ki \in \omega(k \leq n \rightarrow g(k, i) = (k, i))\}$. Es fácil ver que $\{H_n\}_{n \in \omega} \in M$ y es una familia de subgrupos de H , por lo que

$$\Gamma = \{L \in M \mid L \text{ es subgrupo de } H \wedge \bigvee n \in \omega H_n \subset L\} \in M,$$

y se comprueba así mismo que Γ es un filtro normal^M de subgrupos de H . Sea $N = SM[G]$ la extensión simétrica determinada por H y Γ .

Definimos

$$\sigma_n = \{(p \circ (\check{i}, \check{\alpha}), p) \mid i \in \omega \wedge \alpha \in \omega_n^M \wedge p \in \mathbb{P} \wedge (n, i, \alpha) \in p\}.$$

Así $H_n \subset \text{Sim}_H(\sigma_n)$, luego $\sigma_n \in SM^{\mathbb{P}}$ y $f_n = \sigma_n G \in N$. Por consiguiente ω_n^M es numerable^N (notemos que la existencia en N de $f_n : \omega \rightarrow \omega_n^M$ suprayectiva implica —sin el axioma de elección— que ω_n^M es numerable porque ω está bien ordenado).

De este modo, los cardinales \aleph_n^M se siguen colapsando en N . Ahora probaremos que \aleph_ω^M no se colapsa. Si $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$, llamaremos $p|_n = p|_{n \times \omega}$. Necesitaremos el resultado siguiente:

(*) Si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula, $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in SM^{\mathbb{P}}$ cumplen que

$$H_n \subset \text{Sim}_H(\sigma_1) \cap \dots \cap \text{Sim}_H(\sigma_m)$$

y $p \in \mathbb{P}$ cumple $p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, entonces $p|_{n+1} \Vdash_S \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$.

En efecto, en caso contrario existiría una condición $q \leq p|_{n+1}$ tal que

$$q \Vdash_S \neg \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_m).$$

Sea $r \in \omega$ mayor que todas las segundas componentes de los pares del dominio de q . Definimos $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega \times \omega$ mediante

$$g(m, i) = \begin{cases} (m, i) & \text{si } m \leq n \vee 2r \leq i, \\ (m, i + r) & \text{si } n < m \wedge i < r, \\ (m, i - r) & \text{si } n < m \wedge r \leq i < 2r. \end{cases}$$

Así $g \in H_n$ y $g(p)$ es compatible con q . Por hipótesis $g(\sigma_i) = \sigma_i$ para $i = 1, \dots, m$ y, por lo tanto $g(p) \Vdash_S \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$. Pero entonces una extensión común de q y $g(p)$ fuerza $\phi \wedge \neg \phi$, contradicción.

$f \in N$ tal que $f : \omega \rightarrow \omega_\omega^M$ suprayectiva, sería $f = \tau G$, con $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash_S \tau : \omega \rightarrow \check{\omega}_\omega^M$ suprayectiva. Sea $n \in \omega$ suficientemente grande como para que $H_n \subset \text{Sim}_H(\tau)$ y $p_0|_{n+1} = p_0$.

Si $\alpha \in \omega_\omega^M$, existe un $m \in \omega$ tal que $f(m) = \alpha$, luego existe un $p \in G$, $p \leq p_0$ tal que $p \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha}$. Por lo tanto

$$\omega_\omega^M = \bigcup_{m \in \omega} \{\alpha \in \omega_\omega^M \mid \forall p \in \mathbb{P} (p \leq p_0 \wedge p \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha})\}.$$

La familia de conjuntos de la derecha está en M , luego ha de existir un $m \in \omega$ tal que el conjunto $A = \{\alpha \in \omega_\omega^M \mid \forall p \in \mathbb{P} (p \leq p_0 \wedge p \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha})\}$ cumpla $|A|^M > \aleph_{n+1}^M$.

Usando el axioma de elección^M, obtenemos una familia de condiciones $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A} \in M$ tal que para todo $\alpha \in A$ se cumpla $p_\alpha \leq p_0 \wedge p_\alpha \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha}$.

Por (*) se cumple, de hecho, que $p_\alpha|_{n+1} \Vdash_S \tau(\check{n}) = \check{\alpha}$. Equivalentemente, podemos suponer que $p_\alpha \subset (n+1) \times \omega \times \omega_\omega^M$.

Se cumple que si $\alpha, \beta \in A$ son distintos, entonces $p_\alpha \perp p_\beta$, pues fuerzan fórmulas contradictorias. Por lo tanto, el conjunto $W = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\} \in M$ cumple $|W|^M > \aleph_{n+1}^M$, cuando por otra parte sus elementos son aplicaciones de $\omega \times \omega$ en ω_n , y por consiguiente $|W|^M \leq (\aleph_n^{\aleph_0})^M = \aleph_{n+1}^M$, ya que estamos suponiendo que M cumple la HCG.

Esta contradicción prueba que \aleph_ω^M no es numerable en N , luego $\aleph_\omega^M = \aleph_1^N$.

Cualquier aplicación cofinal $f : \omega \longrightarrow \aleph_\omega^M$ tal que $f \in M$ está también en N y sigue siendo cofinal, pues esto es absoluto. Esto prueba que (cf $\aleph_1 = \aleph_0$)^N.

Nos ocupamos ahora de $\mathcal{P}\omega$. Dado $n \in \omega$, llamamos ρ_n al conjunto de todos los pares $(\sigma, \mathbb{1})$, donde $\sigma \in SM^\mathbb{P}$ contiene únicamente pares de la forma (\check{i}, p) , con $i \in \omega$ y $p \in \mathbb{P}$ y las primeras componentes de los pares del dominio de p son menores o iguales que n . Obviamente ρ_n es un \mathbb{P} -nombre y cada $g \in H$ permuta a sus elementos, luego $\text{Sim}_H(\rho_n) = H$. Por consiguiente $\rho_n \in SM^\mathbb{P}$. Sea $A_n = \rho_n G \in N$. Es claro que $A_n \subset \mathcal{P}\omega$. Sea $\rho = \{(\rho_n, \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in M^\mathbb{P}$. También $\text{Sim}_H(\rho) = H$, con lo que $\rho \in SM^\mathbb{P}$ y $A = \{A_n \mid n \in \omega\} = \rho G \in N$. Más aún, se cumple que $\mu = \{(\text{po}(\check{n}, \rho_n), \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in SM^\mathbb{P}$, por lo que $\{A_n\}_{n \in \omega} = \mu G \in N$. En particular A es numerable^N.

Si llamamos B al conjunto de las condiciones de \mathbb{P} en cuyo dominio sólo haya pares con primera componente $\leq n$, tenemos que $|B|^M \leq (\aleph_n^{\aleph_0})^M = \aleph_{n+1}^M$ y, en consecuencia,

$$|\rho_n|^M = |\{\sigma \in SV^\mathbb{P} \mid \sigma \subset \{\check{i} \mid i \in \omega\} \times B\}|^M \leq (2^{\aleph_0 \cdot \aleph_{n+1}})^M = \aleph_{n+2}^M.$$

Sea $f \in M$ tal que $f : \omega_{n+1}^M \longrightarrow \rho_n$ suprayectiva y llamemos

$$\tau = \{(\text{po}(\check{\alpha}, f(\alpha)), \mathbb{1}) \mid \alpha \in \omega_{n+1}^M\} \in M^\mathbb{P}.$$

Si $g \in H_n$ y $\alpha \in \omega_{n+1}^M$, entonces $g(f(\alpha)) = f(\alpha)$, por lo que $H_n \subset \text{Sim}_H(\tau)$. Por consiguiente $\tau \in SM^\mathbb{P}$ y $\tau G \in N$ es una aplicación de dominio ω_{n+1}^M y cuyo rango contiene a A_n . Teniendo en cuenta que ω_{n+1}^M es bien ordenable en N , de aquí se sigue que $|A_n|^N \leq |\omega_{n+1}^M|^N = \aleph_0$.

En definitiva, $\{A_n\}_{n \in \omega}$ es una familia numerable^N de subconjuntos numerables^N de $(\mathcal{P}\omega)^N$. Para concluir la prueba basta ver que

$$(\mathcal{P}\omega)^N = \bigcup_{n \in \omega} A_n.$$

Si $x \in (\mathcal{P}\omega)^N$, entonces $x = \pi_G$, para cierto $\pi \in SM^\mathbb{P}$. Tomemos un $n \in \omega$ tal que $H_n \subset \text{Sim}_H(\pi)$. Sea

$$\sigma = \{(\check{i}, p) \mid i \in \omega \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \subset (n+1) \times \omega \times \omega_{n+1}^M \wedge p \Vdash_S \check{i} \in \pi\}.$$

Es claro que $H_n \subset \text{Sim}_H(\sigma)$, por lo que $\sigma \in SM^\mathbb{P}$, $(\sigma, \mathbb{1}) \in \rho_n$ y $\sigma G \in A_n$. Basta probar que $x = \pi_G = \sigma_G$.

Si $i \in \sigma_G$, entonces existe $p \in G$ tal que $(\check{i}, p) \in \sigma$. En particular $p \Vdash_S \check{i} \in \pi$, luego $i \in \pi_G$.

Recíprocamente, si $i \in \pi_G$ existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash_S \check{i} \in \pi$. Por (*) tenemos que $p|_{n+1} \Vdash_S \check{i} \in \pi$, y como $p \leq p|_{n+1}$ también $p|_{n+1} \in G$. Claramente $(\check{i}, p|_{n+1}) \in \sigma$, luego $\check{i} \in \sigma_G$. ■

En particular vemos que sin el axioma de elección no puede definirse consistentemente la suma infinita de cardinales, pues ciertamente ω puede descomponerse en unión numerable de conjuntos numerables, de modo que podemos tener dos familias numerables $\{A_n\}_{n \in \omega}$ y $\{B_n\}_{n \in \omega}$ de conjuntos numerables cuyas uniones tengan cardinales distintos.

6.3 Productos

En el capítulo anterior hemos visto que, a través de una sucesión finita de extensiones genéricas, podemos modificar la función del continuo de cualquier forma razonable sobre un conjunto finito de cardinales regulares, y quedaba pendiente el problema de generalizar el resultado a infinitos cardinales. En principio tenemos que resolver dos dificultades: la primera es que el argumento empleado nos obliga a modificar primero la función del continuo sobre el mayor de los cardinales sobre los que queremos alterarla, lo que obliga ya a trabajar con un conjunto finito de cardinales; pero aunque nos las arregláramos para empezar con el cardinal menor, todavía nos queda el segundo problema, y es que no sabemos continuar una sucesión de extensiones

$$M \subset M[G_1] \subset M[G_1][G_2] \subset M[G_1][G_2][G_3] \subset \dots$$

Resolveremos simultáneamente ambos problemas mostrando que una sucesión finita de extensiones genéricas puede reducirse a una única extensión. Entonces quedará claro cómo generalizar el proceso al caso infinito.

Definición 6.28 Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} dos c.p.o.s. Definimos en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ el preorden dado por

$$(p, q) \leq (p', q') \leftrightarrow p \leq p' \wedge q \leq q'.$$

Claramente esto convierte a $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ en un c.p.o. con máximo $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Las aplicaciones $i_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ e $i_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ dadas por $i_{\mathbb{P}}(p) = (p, \mathbf{1})$, $i_{\mathbb{Q}}(q) = (\mathbf{1}, q)$ son claramente inmersiones completas. De hecho, una reducción de un par (p, q) a \mathbb{P} es p .

Los resultados que conocemos sobre inmersiones nos dicen que una extensión genérica respecto a $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ contiene una extensión genérica respecto a \mathbb{P} y otra respecto a \mathbb{Q} , pero vamos a probar más que esto: vamos a ver que una extensión respecto a $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ equivale a una extensión respecto a \mathbb{P} seguida de una extensión respecto a \mathbb{Q} . En primer lugar estudiamos los filtros genéricos en productos.

Teorema 6.29 Consideremos un modelo transitivo numerable M de ZFC y sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s. Si G es un filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ -genérico sobre M , entonces $G_1 = i_{\mathbb{P}}^{-1}[G]$ es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , $G_2 = i_{\mathbb{Q}}^{-1}[G]$ es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M y $G = G_1 \times G_2$.

DEMOSTRACIÓN: G_1 y G_2 son filtros genéricos por 6.3. Si $(p, q) \in G$, entonces $(p, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, q) \in G$ por ser un filtro, luego $(p, q) \in G_1 \times G_2$.

Si $(p, q) \in G_1 \times G_2$ entonces $(p, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, q) \in G$, luego existe una condición $(p', q') \in G$ tal que $(p', q') \leq (p, \mathbf{1}), (p', q') \leq (\mathbf{1}, q)$. Esto quiere decir que $p' \leq p \wedge q' \leq q$, luego $(p', q') \leq (p, q)$ y por consiguiente $(p, q) \in G$. ■

No es cierto que el producto de filtros genéricos sea siempre un filtro genérico. La situación exacta viene dada por el teorema siguiente:

Teorema 6.30 (Teorema del producto) *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s y $G_1 \subset \mathbb{P}, G_2 \subset \mathbb{Q}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- a) $G_1 \times G_2$ es un filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ -genérico sobre M .
- b) G_1 es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y G_2 es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G_1]$.
- c) G_2 es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M y G_1 es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre $M[G_2]$.

Si se cumplen estas condiciones, $M[G_1 \times G_2] = M[G_1][G_2] = M[G_2][G_1]$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que a) es equivalente a b). La equivalencia con c) se tiene por simetría.

Supongamos que $G_1 \times G_2$ es $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ -genérico sobre M . Por el teorema anterior $G_1 = i_{\mathbb{P}}^{-1}[G_1 \times G_2]$ es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . También sabemos que $G_{\mathbb{Q}}$ es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M , pero queremos ver que lo es sobre $M[G_1]$. Sea $D \in M[G_1]$ un subconjunto denso de \mathbb{Q} . Entonces $D = \tau_{G_1}$, para cierto $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Sea $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \tau$ es denso en \mathbb{Q} . Definimos

$$D' = \{(u, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{Q} \mid u \leq p \wedge u \Vdash \check{v} \in \tau\} \in M.$$

Veamos que D' es denso bajo $(p, \mathbf{1})$. Para ello tomamos $(r, s) \leq (p, \mathbf{1})$. Entonces $r \leq p$, luego $r \Vdash \tau$ es denso en \mathbb{Q} . Por consiguiente

$$r \Vdash \bigvee x \in \check{\mathbb{Q}}(x \in \tau \wedge x \leq \check{s}).$$

Según 4.29, existen un $v \in \mathbb{Q}$ y un $u \leq r$ tales que $u \Vdash (\check{v} \in \tau \wedge \check{v} \leq \check{s})$. Necesariamente $v \leq s$. Así $(u, v) \leq (r, s)$ y $(u, v) \in D'$. Esto prueba que D' es denso bajo $(p, \mathbf{1})$.

Como $(p, \mathbf{1}) \in G_1 \times G_2$, existe un par $(u, v) \in D' \cap (G_1 \times G_2)$. Entonces $u \Vdash \check{v} \in \tau$, luego $v \in \tau_{G_1} = D$, es decir, $v \in G_2 \cap D$. Esto prueba que G_2 es \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G_1]$.

Supongamos ahora que G_1 es \mathbb{P} -genérico sobre M y que G_2 es \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G_1]$. Es inmediato comprobar que $G_1 \times G_2$ es un filtro en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Para probar que es genérico tomamos un conjunto $D \in M$ denso en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Sea

$$D^* = \{q \in \mathbb{Q} \mid \bigvee p \in G_1 (p, q) \in D\} \in M[G_1].$$

Veamos que D^* es denso en \mathbb{Q} . Para ello tomamos $t \in \mathbb{Q}$ y definimos

$$D' = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall q \in \mathbb{Q}(q \leq t \wedge (p, q) \in D)\} \in M.$$

Se cumple que D' es denso en \mathbb{P} , pues si $s \in \mathbb{P}$, entonces $(s, t) \in \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, luego existe $(p, q) \in D$ tal que $(p, q) \leq (s, t)$. Así, $p \leq s \wedge p \in D'$.

Sea $p \in D' \cap G_1$, sea $q \leq t$ tal que $(p, q) \in D$. Entonces $q \leq t \wedge q \in D^*$, lo que prueba que D^* es denso en \mathbb{Q} . Como G_2 es genérico sobre $M[G_1]$, existe un $q \in D^* \cap G_2$ y por definición de D^* existe un $p \in G_1$ tal que $(p, q) \in D$, es decir, $(p, q) \in D \cap (G_1 \times G_2) \neq \emptyset$.

Si se cumplen las condiciones del teorema, tenemos que $M \subset M[G_1][G_2]$ y $G_1 \times G_2 \in M[G_1][G_2]$, luego $M[G_1 \times G_2] \subset M[G_1][G_2]$. Por otra parte $M \subset M[G_1 \times G_2]$ y $G_1 \in M[G_1 \times G_2]$, luego $M[G_1] \subset M[G_1 \times G_2]$. Así mismo $G_2 \in M[G_1 \times G_2]$, luego $M[G_1][G_2] \subset M[G_1 \times G_2]$. ■

De este modo sabemos cómo reducir dos extensiones genéricas consecutivas a una sola. Ahora es fácil ver que el teorema 5.25 podría haberse probado con una única extensión genérica respecto al producto de todos los c.p.o.s utilizados. Así desaparece el problema del orden en que hay que realizar las extensiones. Hay que tener presente que el c.p.o. \mathbb{P}_2 de la prueba de 5.25, aunque en principio se define en $M[G_1]$, de hecho está en el modelo base M porque \mathbb{P}_1 es κ_n -cerrado^M. Similarmente se concluye que todos los c.p.o.s utilizados están de hecho en M , pues en caso contrario no podríamos formar su producto. Ahora, para obtener un resultado análogo que valga para infinitos cardinales sólo hemos de tomar un producto infinito.

Definición 6.31 Una *función de Easton* es una función E cuyo dominio sea un conjunto A de cardinales regulares y su rango un conjunto de cardinales infinitos, de modo que cumpla las condiciones siguientes:

- a) $\bigwedge \kappa \mu \in A (\kappa \leq \mu \rightarrow E(\kappa) \leq E(\mu))$,
- b) $\bigwedge \kappa \in A \kappa < \text{cf } E(\kappa)$.

Informalmente, una función de Easton es una candidata a función del continuo sobre un conjunto de cardinales regulares. Las condiciones a) y b) recogen dos restricciones que ha de cumplir necesariamente la función del continuo: la monotonía y el teorema de König.

Si E es una función de Easton de dominio A , definimos el *producto de Easton* asociado $\mathbb{P}(E)$ como el conjunto de todos los $p \in \prod_{\kappa \in A} \text{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$ tales que para todo cardinal regular μ

$$|\{\kappa \in \mu \cap A \mid p(\kappa) \neq \mathbb{1}\}| < \mu.$$

Esta restricción se impone por una cuestión técnica que después se verá en relación con la posible existencia de cardinales inaccesibles. En efecto, notemos que si $\mu = \nu^+$ es un cardinal sucesor entonces la condición se verifica trivialmente, pues a lo sumo hay ν cardinales menores que μ .

En $\mathbb{P}(E)$ definimos el orden dado por $p \leq q \leftrightarrow \bigwedge \kappa \in A p(\kappa) \leq q(\kappa)$. Así $\mathbb{P}(E)$ resulta ser un c.p.o. con máximo $\mathbf{1}$ igual a la condición dada por $\bigwedge \kappa \in A \mathbf{1}(\kappa) = \mathbf{1}$.

Si E es una función de Easton y μ es un cardinal, llamaremos $E_\mu^>$ y E_μ^\leq a las restricciones de E a los cardinales de su dominio $> \mu$ o $\leq \mu$, respectivamente. Es muy fácil comprobar que $\mathbb{P}(E) \cong \mathbb{P}(E_\mu^>) \times \mathbb{P}(E_\mu^\leq)$. La semejanza es simplemente la que a cada condición le asigna el par formado por su restricción a los cardinales $> \mu$ y su restricción a los cardinales $\leq \mu$.

A continuación los teoremas obligados:

Teorema 6.32 *Sea E una función de Easton de dominio A y μ un cardinal regular tal que $A \subset \mu^+$ y $2^{<\mu} = \mu$. Entonces $\mathbb{P}(E)$ cumple la c.c. μ^+ .*

DEMOSTRACIÓN: Si $p \in \mathbb{P}(E)$, sea $d(p) = \bigcup_{\kappa \in A} \{\kappa\} \times \text{Dominio}(p(\kappa))$. Sea $B = \{\kappa < \mu \cap A \mid p(\kappa) \neq \mathbf{1}\}$. Por definición de $\mathbb{P}(E)$ sabemos que $|B| < \mu$. Veamos que $|d(p)| < \mu$. En efecto:

$$|d(p)| = \sum_{\kappa \in A} |\text{Dominio}(p(\kappa))| \leq \sum_{\kappa \in B} |\text{Dominio}(p(\kappa))| + |\text{Dominio}(p(\mu))|.$$

El último sumando sólo hace falta si $\mu \in A$, pues por definición $\mu \notin B$. De este modo

$$|d(p)| \leq \sum_{\kappa \in B} \kappa + |\text{Dominio}(p(\mu))| < \mu,$$

donde hemos usado la regularidad de μ .

Observemos, por otra parte, que los cardinales μ y μ^+ están en las hipótesis del lema de los sistemas Δ , pues si $\alpha < \mu^+$ se cumple

$$|\alpha^{<\mu}| = |\alpha|^{<\mu} \leq \mu^{<\mu} = (2^{<\mu})^{<\mu} = 2^{<\mu} = \mu,$$

donde hemos usado [14.11].

Consideremos ahora una familia $\{p_\alpha\}_{\alpha < \mu^+}$ de condiciones distintas dos a dos, y veamos que no puede ser una anticadena. Si $\{d(p_\alpha) \mid \alpha < \mu^+\}$ tiene cardinal $\leq \mu$ entonces ha de existir un $x \subset \mu^+$ tal que $|x| = \mu^+$ y $\bigwedge \alpha \in x d(p_\alpha) = r$, para un r fijo.

Si, por el contrario, $\{d(p_\alpha) \mid \alpha < \mu^+\}$ tiene cardinal μ^+ , podemos aplicar el lema de los sistemas Δ , que nos da un $x \subset \mu^+$ tal que $|x| = \mu^+$ y la familia $\{d(p_\alpha)\}_{\alpha \in x}$ es cuasidisjunta de raíz r .

En cualquier caso podemos descomponer

$$x = \bigcup_{f \in 2^r} \{\alpha \in x \mid \bigwedge \kappa i((\kappa, i) \in r \rightarrow p_\alpha(\kappa)(i) = f(\kappa, i))\}.$$

Como $|2^r| \leq 2^{<\mu} = \mu < \mu^+$, ha de existir $f \in 2^r$ tal que el conjunto

$$\{\alpha \in x \mid \bigwedge \kappa i((\kappa, i) \in r \rightarrow p_\alpha(\kappa)(i) = f(\kappa, i))\}$$

tenga cardinal μ^+ .

En particular, si α y β están en este conjunto, para todo $\kappa \in A$ y todo $i \in \text{Dominio}(p_\alpha(\kappa)) \cap \text{Dominio}(p_\beta(\kappa))$ se cumple que $(\kappa, i) \in d(p_\alpha) \cap d(p_\beta) = r$, luego $p_\alpha(\kappa)(i) = p_\beta(\kappa)(i)$. Esto implica que $p_\alpha(\kappa)$ y $p_\beta(\kappa)$ son compatibles en $\text{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$, de donde a su vez se sigue que p_α y p_β son compatibles. ■

Teorema 6.33 *Si E es una función de Easton de dominio A y μ es un cardinal infinito tal que $A \cap \mu^+ = \emptyset$, entonces $\mathbb{P}(E)$ es μ^+ -cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{p_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ con $\beta < \mu^+$ una sucesión decreciente de condiciones en $\mathbb{P}(E)$. Para cada $\kappa \in A$ se cumple que $\{p_\alpha(\kappa)\}_{\alpha < \beta}$ es una sucesión decreciente de condiciones en $\text{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$, que es κ -cerrado, y por otra parte $\beta < \mu^+ \leq \kappa$. Por lo tanto existe una condición $p_\kappa \in \text{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$ de manera que $\bigwedge \alpha < \beta p_\kappa \leq p_\alpha(\kappa)$. Podemos exigir que $p_\kappa = \mathbf{1}$ siempre que $\bigwedge \alpha < \beta p_\alpha(\kappa) = \mathbf{1}$.

Sea $p \in \mathbb{P}(E)$ la condición dada por $\bigwedge \kappa \in A p(\kappa) = p_\kappa$. Se cumple que p es realmente una condición, pues para todo cardinal regular ν se cumple que

$$|\{\kappa \in \nu \cap A \mid p(\kappa) \neq \mathbf{1}\}| = \left| \bigcup_{\alpha < \beta} \{\kappa \in \nu \cap A \mid p_\alpha(\kappa) \neq \mathbf{1}\} \right| < \nu,$$

pues cada uno de los conjuntos de la unión tiene cardinal $< \nu$ por definición de $\mathbb{P}(E)$ y si de hecho existe un $\kappa \in \nu \cap A$ es porque $\nu > \mu \geq |\beta|$.

Es claro que $\bigwedge \alpha < \beta p \leq p_\alpha$, lo que prueba que $\mathbb{P}(E)$ es μ^+ -cerrado. ■

El teorema siguiente es fundamental para trabajar con productos de Easton:

Teorema 6.34 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC+HCG, $E \in M$ una función de Easton^M, $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)^M$, μ un cardinal regular^M, $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(E_\mu^>)$, $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(E_\mu^\leq)$ y G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces existe un filtro G_1 \mathbb{P}_1 -genérico sobre M y un filtro G_2 \mathbb{P}_2 -genérico sobre $M[G_1]$ de modo que $M[G] = M[G_1][G_2]$. Además \mathbb{P}_1 es μ^+ -cerrado^M y \mathbb{P}_2 cumple la (c.c. μ^+)^{M[G_1]}.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que \mathbb{P} es semejante^M a $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$, luego por 6.4 existe un filtro G' que es $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ -genérico sobre M y tal que $M[G] = M[G']$. Por el teorema del producto (y el teorema previo) existen filtros G_1 y G_2 que cumplen lo pedido.

Por el teorema anterior, \mathbb{P}_1 es μ^+ -cerrado^M, luego conserva cardinales y cofinalidades $\leq \mu^+$. Además, teniendo en cuenta la HCG^M,

$$(2^{<\mu})^{M[G_1]} = (2^{<\mu})^M = \mu.$$

Esto nos permite aplicar el teorema 6.32 en el modelo $M[G_1]$ (notemos que $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(E_\mu^\leq)^{M[G_1]}$) y concluir que \mathbb{P}_2 cumple la (c.c. μ^+)^{M[G_1]}. ■

Teorema 6.35 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC+HCG, $E \in M$ una función de Easton^M y $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)^M$. Entonces \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades.*

DEMOSTRACIÓN: En otro caso, por 5.3 existe un filtro genérico G y un cardinal ^{M} ν tal que ν es regular ^{M} y singular ^{$M[G]$} . Sea $\mu = \text{cf}^{M[G]} \nu < \nu$. Entonces μ es regular ^{$M[G]$} , luego también es regular ^{M} .

Sean $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(E_\mu^>)^M$ y $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(E_\mu^\leq)^M$. Sean G_1 y G_2 filtros genéricos en las condiciones del teorema anterior.

Sea $f : \mu \rightarrow \nu$ cofinal, $f \in M[G]$. Como \mathbb{P}_2 cumple la c.c. μ^+ en $M[G_1]$, el teorema 5.5 nos da una aplicación $F : \mu \rightarrow \mathcal{P}\nu$, $F \in M[G_1]$ de modo que $\bigwedge \alpha < \mu |F(\alpha)|^{M[G_1]} \leq \mu$ y $\bigwedge \alpha < \mu f(\alpha) \in F(\alpha)$.

Para cada $\alpha < \mu$, puesto que $F(\alpha) \subset \nu \subset M$ y $|F(\alpha)|^{M[G_1]} \leq \mu$, el teorema 5.8 nos da que $F(\alpha) \in M$, luego $F \subset M$ y $|F|^{M[G_1]} = \mu$, por lo que de nuevo por 5.8 llegamos a que $F \in M$. Consideremos entonces el conjunto

$$X = \bigcup_{\alpha < \mu} F(\alpha) \in M.$$

Se cumple que $|X|^M \leq \mu$, pues $\bigwedge \alpha < \mu |F(\alpha)|^M \leq \mu$ (en efecto, una biyección entre $F(\alpha)$ y su cardinal en $M[G_1]$ está en M por 5.8). En particular $|X|^M < \nu$, pero por otra parte X contiene al rango de f , luego no está acotado en ν , y esto contradice la regularidad ^{M} de ν . ■

El resultado principal que vamos a probar es que en una extensión genérica a través de un producto de Easton la función del continuo coincide con la correspondiente función de Easton en el dominio de ésta. No obstante vamos a calcular la función del continuo completa de la extensión. Concretamente, será la dada por la definición siguiente:

Definición 6.36 Sea E una función de Easton de dominio A . Para cada cardinal infinito κ sea

$$E'(\kappa) = \kappa^+ \cup \bigcup_{\mu \in A \cap \kappa^+} E(\mu).$$

Por las propiedades de E , es claro que si $\kappa \in A$ entonces $E'(\kappa) = E(\kappa)$. Es claro que E' es la menor función monótona que extiende a E a todos los cardinales infinitos (menor en el sentido de que toma el menor valor posible sobre cada cardinal). Definimos

$$E^*(\kappa) = \begin{cases} E'(\kappa) & \text{si } \text{cf } E'(\kappa) > \kappa, \\ E'(\kappa)^+ & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

También es claro que si $\kappa \in A$ entonces $E^*(\kappa) = E(\kappa)$. Así E^* es la menor extensión de E que respeta la monotonía y el teorema de König.

Teorema 6.37 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC+HCG, $E \in M$ una función de Easton ^{M} de dominio A , $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$ y G un filtro P -genérico sobre M . Entonces en $M[G]$ se cumple que $\bigwedge \kappa (\aleph_0 \leq \kappa \rightarrow 2^\kappa = E^*(\kappa))$. En particular $\bigwedge \kappa \in A 2^\kappa = E(\kappa)$. Además en $M[G]$ se cumple la hipótesis de los cardinales singulares.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades, es claro que $E'^M = E'^{M[G]}$ y $E^{*M} = E^{*M[G]}$. Por simplicidad escribiremos simplemente E' y E^* . Así mismo escribiremos μ^+ en lugar de μ^{+M} o $\mu^{+M[G]}$.

Tomemos $\mu \in A$ y sea $j : \text{Fn}(E(\mu), 2, \mu)^M \rightarrow \mathbb{P}$ la inmersión completa dada por

$$j(p)(\nu) = \begin{cases} p & \text{si } \nu = \mu, \\ \mathbf{1} & \text{si } \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Componiéndola con una semejanza entre los c.p.o.s $\text{Fn}(E(\mu) \times \mu, 2, \mu)^M$ y $\text{Fn}(E(\mu), 2, \mu)^M$ obtenemos una inmersión completa

$$i : \text{Fn}(E(\mu) \times \mu, 2, \mu)^M \rightarrow \mathbb{P}, \quad i \in M.$$

Entonces $G_0 = i^{-1}[G]$ es un filtro $\text{Fn}(E(\mu) \times \mu, 2, \mu)^M$ -genérico sobre M y $M[G_0] \subset M[G]$. Ahora bien, este último c.p.o. añade $E(\mu)$ subconjuntos genéricos a μ , luego $E(\mu) \leq (2^\mu)^{M[G_0]} \leq (2^\mu)^{M[G]}$.

Ahora, si κ es un cardinal^M infinito y $\mu \in A \cap \kappa^+$, entonces tenemos que $E(\mu) \leq (2^\mu)^{M[G]} \leq (2^\kappa)^{M[G]}$. Por consiguiente $E'(\kappa) \leq (2^\kappa)^{M[G]}$. Si $\text{cf}^{M[G]} E'(\kappa) = \kappa$ no puede darse la igualdad $E'(\kappa) = (2^\kappa)^{M[G]}$, pues contradiría al teorema de König, luego $E'(\kappa)^+ \leq (2^\kappa)^{M[G]}$. En cualquier caso, concluimos que $E^*(\kappa) \leq (2^\kappa)^{M[G]}$.

Sea $\mu = \text{cf}^M \kappa = \text{cf}^{M[G]} \kappa$. Sean $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, G_1$ y G_2 como en el teorema 6.34. Supongamos primeramente que $\mu = \kappa$, es decir, que κ es regular^M. Sea $\nu \in A$ tal que $\nu \leq \mu$. Entonces, por 5.17,

$$|\text{Fn}(E(\nu), 2, \nu)|^M \leq |\text{Fn}(E(\mu), 2, \mu)|^M \leq (E(\mu)^\mu)^M \leq (E^*(\mu)^\mu)^M.$$

Por consiguiente $|\mathbb{P}_2|^M \leq ((E^*(\mu)^\mu)^\mu)^M = (E^*(\mu)^\mu)^M = E^*(\mu)$, puesto que $\text{cf}^M E^*(\mu) > \mu$ y M cumple la HCG. De aquí se sigue que $|\mathbb{P}_2|^{M[G_1]} \leq E^*(\mu)$ (pues una biyección entre \mathbb{P}_2 y su cardinal^M también está en $M[G_1]$).

Por otra parte, según 6.34, \mathbb{P}_2 cumple la c.c. μ^+ en $M[G_1]$ luego, según (5.1), el número de buenos nombres para subconjuntos de $\check{\mu}$ en $M[G_1]$ es a lo sumo

$$(((E^*(\mu)^\mu)^\mu)^{M[G_1]} = (E^*(\mu)^\mu)^{M[G_1]} = (E^*(\mu)^\mu)^M = E^*(\mu).$$

(Al pasar de $M[G_1]$ a M hemos usado que \mathbb{P}_1 es μ^+ -cerrado^M.)

Ahora usamos 5.20 para concluir que en $M[G_1][G_2] = M[G]$ se verifica la desigualdad $2^\mu \leq E^*(\kappa)$ y, por lo probado anteriormente, la igualdad.

En resumen, tenemos que $(2^\kappa = E^*(\kappa))^{M[G]}$ para todo cardinal regular^M κ . Supongamos ahora que κ es singular^M, es decir, que $\mu < \kappa$. En primer lugar probaremos que $(E^*(\kappa)^\mu)^{M[G]} = E^*(\kappa)$.

Tomemos $f \in (\mu E^*(\kappa))^{M[G]}$. Como \mathbb{P}_2 cumple la c.c. μ^+ en $M[G_1]$, por una variante (consecuencia inmediata) de 5.5 existe $F \in (\mu^{\times \mu} E^*(\kappa))^{M[G_1]}$ tal que

$$\bigwedge \alpha < \mu \bigvee \beta < \mu f(\alpha) = F(\alpha, \beta). \quad (6.1)$$

Como \mathbb{P}_1 es μ^+ -cerrado^M, en realidad $F \in M$. Por la HCG^M existen a lo sumo $E^*(\kappa)$ funciones como F en M (aquí usamos que $\text{cf}^M E^*(\kappa) > \mu$). Para cada

$F \in (\mu^{\times\mu} E^*(\kappa))^M$, el número de aplicaciones $f \in (\mu E^*(\kappa))^{M[G]}$ que cumplen (6.1) es a lo sumo $(\mu^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^{M[G]} = E^*(\mu) \leq E^*(\kappa)$, donde hemos usado la parte ya probada para cardinales regulares (μ es regular^M).

En resumen, hay a lo sumo $E^*(\kappa)$ posibilidades para F y, para cada una de ellas, hay a lo sumo $E^*(\kappa)$ posibilidades para f , luego

$$|\mu E^*(\kappa)|^{M[G]} \leq (E^*(\kappa) \cdot E^*(\kappa))^{M[G]} = E^*(\kappa).$$

Así pues, $(E^*(\kappa)^\mu)^{M[G]} = E^*(\kappa)$, como queríamos probar.

Sea B el conjunto de todos los subconjuntos acotados de κ en $M[G]$ y sea R el conjunto de todos los cardinales regulares^M menores que κ . Entonces

$$|B|^{M[G]} \leq \left| \bigcup_{\nu \in R} \mathcal{P}\nu \right|^{M[G]} \leq \left(\sum_{\nu \in R} E^*(\nu) \right)^{M[G]} \leq (\kappa \cdot E^*(\kappa))^{M[G]} = E^*(\kappa).$$

Sea $f : (B^\mu)^{M[G]} \longrightarrow (\mathcal{P}\kappa)^{M[G]}$ dada por $f(g) = \bigcup_{\alpha < \mu} g(\alpha)$. Es claro que $f \in M[G]$ y es suprayectiva, luego

$$(2^\kappa)^{M[G]} = |\mathcal{P}\kappa|^{M[G]} \leq |B^\mu|^{M[G]} \leq (E^*(\kappa)^\mu)^{M[G]} = E^*(\kappa).$$

La otra desigualdad ya estaba probada, con lo que tenemos $(2^\kappa)^{M[G]} = E^*(\kappa)$ para todo cardinal^M infinito κ .

Nos falta probar que en $M[G]$ se cumple la hipótesis de los cardinales singulares. Para ello tomamos un cardinal singular^{M[G]} κ , llamamos $\mu = \text{cf}^{M[G]} \kappa$ y suponemos que $(2^\mu)^{M[G]} < \kappa$. Hemos de probar que $(\kappa^\mu = \kappa^+)^{M[G]}$.

Consideramos $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, G_1$ y G_2 como antes. Tomamos $f \in (\mu \kappa)^{M[G]}$. Sea $F \in (\mu^{\times\mu} \kappa)^{M[G_1]}$ que cumpla (6.1). Igual que antes, concluimos que $F \in M$, y que el número de aplicaciones F posibles es a lo sumo $(\mu^\mu)^M = \mu^+$. Para cada una de ellas, las posibilidades para f son $(\mu^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^{M[G]} < \kappa$, luego en definitiva

$$(\kappa^\mu)^{M[G]} = |\mu \kappa|^{M[G]} \leq (\kappa^+ \cdot \kappa)^{M[G]} = \kappa^+.$$

La desigualdad contraria es el teorema de König. ■

De aquí se sigue el teorema siguiente:

Teorema 6.38 (Teorema de Easton) *Si ZFC es consistente también lo es ZFC más cualquier sentencia que determine la función del continuo y que respete las condiciones siguientes:*

- a) MONOTONÍA: Si $\kappa \leq \mu$ entonces $2^\kappa \leq 2^\mu$,
- b) TEOREMA DE KÖNIG: $\kappa < 2^\kappa$,
- c) HCS: Si κ es singular, entonces $2^\kappa = \begin{cases} 2^{<\kappa} & \text{si } \kappa < \text{cf } 2^{<\kappa}, \\ (2^{<\kappa})^+ & \text{si } \kappa = \text{cf } 2^{<\kappa}. \end{cases}$

La propiedad c) es la consecuencia que tiene la HCS sobre la función del continuo, de modo que la extensión genérica del teorema 6.37 cumple c) porque cumple la HCS.

En realidad el enunciado del teorema de Easton no es exacto, pues hay que exigir que la sentencia en cuestión cumpla algunas condiciones. Por ejemplo, sería absurdo pretender que 2^{\aleph_0} fuera el mínimo cardinal fuertemente inaccesible. Lo que sucede es que si partimos de un modelo M que tenga un (mínimo) cardinal fuertemente inaccesible κ , podemos construir una función de Easton ^{M} tal que $E(\aleph_0) = \kappa$, y en la extensión genérica correspondiente se cumplirá que $2^{\aleph_0} = \kappa$, sólo que κ ya no será fuertemente inaccesible. En definitiva, hay que exigir que si en un modelo M definimos una función de Easton E de acuerdo con la sentencia cuya consistencia queremos probar, la función E en una extensión genérica ha de cumplir lo mismo que le hemos pedido en M . Es más fácil comprobarlo en cada caso concreto que no tratar de dar condiciones generales sobre sentencias válidas. Esto sólo descarta sentencias obviamente contradictorias.

Por otra parte, el teorema 6.37 no permite probar exactamente el teorema de Easton tal y como lo hemos enunciado. Ello se debe a que hemos exigido que el dominio de una función de Easton sea un conjunto, lo que sólo nos capacita para modificar la función del continuo en un conjunto de cardinales regulares, y no en todos ellos. Esto puede resolverse de dos formas. Una de ellas (tal y como hizo Easton) es eliminar la restricción y trabajar con funciones de Easton definidas sobre todos los cardinales regulares. Esto hace que el producto de Easton sea una clase propia en M , es decir, no tenemos un $\mathbb{P}(E) \in M$, sino una fórmula relativizada a M que determina las condiciones de $\mathbb{P}(E)$. La teoría general sobre extensiones genéricas no es válida para preórdenes que sean clases propias. Así, no es posible probar en general que una extensión genérica de este tipo satisfaga el axioma de reemplazo o el axioma de partes. Sin embargo, las características concretas de los productos de Easton, en particular la posibilidad de factorizar según el teorema 6.34, permiten probar lo necesario en este caso concreto.

Hay otra posibilidad mucho más sencilla que exige tan sólo una hipótesis ligeramente más fuerte. Por ejemplo, supongamos que queremos probar la consistencia de que para todo cardinal regular κ se cumpla $2^\kappa = \kappa^{++}$. Partiendo de la HCG, esto exige modificar la función del continuo en todos los cardinales regulares. Para ello partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC+HGC que contenga un cardinal inaccesible μ . En M , definimos la función de Easton cuyo dominio es el conjunto de todos los cardinales regulares ^{M} menores que μ y que venga dada por $E(\kappa) = \kappa^{++}$. Formamos el producto de Easton $\mathbb{P}(E)^M$ y la extensión correspondiente $M[G]$, de modo que en $M[G]$ se cumple $2^\kappa = \kappa^{++}$ para todo cardinal regular $\kappa < \mu$. Ahora bien, como $\mathbb{P}(E)^M$ conserva cardinales y cofinalidades, resulta que μ es fuertemente inaccesible ^{$M[G]$} . Por consiguiente $N = V_\mu \cap M[G]$ es un modelo transitivo numerable de ZFC donde $2^\kappa = \kappa^{++}$ para todo cardinal regular κ , tal y como queríamos.

En resumen, para probar la consistencia de una sentencia que difiera de la HCG sobre una clase propia de cardinales basta suponer que existe un cardinal

inaccesible μ , modificar la función del continuo bajo μ según el teorema 6.37 y luego quedarse con los conjuntos de rango menor que μ de la extensión. De todos modos, insistimos en que la hipótesis sobre el cardinal inaccesible puede eliminarse, y por ello no la hemos incluido en el enunciado del teorema de Easton.

Con esto queda probada la consistencia de cualquier determinación de la función del continuo sobre cardinales regulares que sea compatible con la monotonía y el teorema de König. Sin embargo, la función del continuo sobre los cardinales singulares en una extensión de Easton queda determinada por los valores que toma sobre los cardinales regulares a través de la propiedad c). Esto no significa que no haya otras posibilidades consistentes, sino únicamente que las técnicas que hemos desarrollado no bastan para justificar la consistencia de otras alternativas. Se conocen algunas alternativas consistentes, pero no un resultado general similar al teorema de Easton que diga cuáles son las restricciones necesarias y suficientes que ha de cumplir una determinación de la función del continuo sobre los cardinales singulares para que sea consistente.

Capítulo VII

Álgebras de Boole

La teoría de extensiones genéricas resulta mucho más clara conceptualmente cuando el conjunto preordenado con que se trabaja es un álgebra de Boole completa. En este capítulo estudiaremos las álgebras de Boole y su relación con la teoría de extensiones genéricas.

7.1 Definición, ejemplos y propiedades básicas

El ejemplo típico de álgebra de Boole es $\mathcal{P}X$, donde X es un conjunto arbitrario. En $\mathcal{P}X$ están definidas las operaciones de unión, intersección y complemento respecto de X . Si axiomatizamos las propiedades básicas de estas operaciones llegamos a la noción general de álgebra de Boole:

Definición 7.1 Un *álgebra de Boole* es una cuádrupla $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, ')$, donde \mathbb{B} es un conjunto no vacío, $\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, $\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ y $' : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ de modo que se cumplen las propiedades siguientes:

- | | |
|--|---|
| 1) $p'' = p$, | 5) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, |
| 2) $p \wedge q = q \wedge p$, | 6) $p \vee (p \wedge q) = p$, |
| 3) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, | 7) $(p \wedge q)' = p' \vee q'$, |
| 4) $p \wedge p = p$, | 8) $p \vee p' = q \vee q'$. |

A partir de las propiedades 1) y 7) se demuestra que en realidad un álgebra de Boole cumple también las propiedades que resultan de intercambiar \wedge por \vee en los axiomas anteriores. En total, en un álgebra de Boole se cumple:

- | | |
|---|--|
| 1) $p'' = p$, | |
| 2) $p \wedge q = q \wedge p$, | $p \vee q = q \vee p$, |
| 3) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, | $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$, |
| 4) $p \wedge p = p$, | $p \vee p = p$, |
| 5) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, | $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, |
| 6) $p \vee (p \wedge q) = p$, | $p \wedge (p \vee q) = p$, |
| 7) $(p \wedge q)' = p' \vee q'$, | $(p \vee q)' = p' \wedge q'$, |
| 8) $p \vee p' = q \vee q'$, | $p \wedge p' = q \wedge q'$. |

Por ejemplo,

$$p \vee q = p'' \vee q'' = (p' \wedge q')' = q' \wedge p')' = q'' \vee p'' = q \vee p.$$

Igualmente se razonan las demás. Veamos dos ejemplos naturales de álgebras de Boole:

Álgebras de conjuntos Diremos que un conjunto $\mathbb{B} \neq \emptyset$ es un *álgebra de conjuntos* sobre un conjunto X si $\mathbb{B} \subset \mathcal{P}X$ y para todo $x, y \in \mathbb{B}$ se cumple que $x \cup y, x \cap y, X \setminus x \in \mathbb{B}$.

En tal caso es inmediato comprobar que \mathbb{B} es un álgebra de Boole con las operaciones dadas por $x \wedge y = x \cap y, x \vee y = x \cup y, x' = X \setminus x$.

Por ejemplo, $\mathcal{P}X$ es un álgebra de conjuntos sobre X . Si X es un espacio topológico, el conjunto de los subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados es un álgebra de subconjuntos de X . ■

Álgebras de Lindenbaum Sea \mathcal{L} un lenguaje formal de primer orden y T una teoría axiomática sobre \mathcal{L} . Sea S el conjunto de las sentencias de \mathcal{L} . Claramente la relación en S dada por

$$\alpha R \beta \text{ si y sólo si } \alpha \leftrightarrow \beta \text{ es un teorema de } T$$

es una relación de equivalencia. Se llama *álgebra de Lindenbaum* de T al conjunto cociente $\mathbb{B}(T) = S/R$ con las operaciones dadas por

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta], \quad [\alpha] \vee [\beta] = [\alpha \vee \beta], \quad [\alpha]' = [\neg \alpha].$$

Es inmediato comprobar que estas operaciones están bien definidas así como que satisfacen los axiomas de álgebra. ■

En vista de este último ejemplo resulta natural definir, para un álgebra de Boole arbitraria, las operaciones

$$p \rightarrow q = p' \vee q, \quad p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

De este modo, si \mathbb{B} es un álgebra de Lindenbaum, se cumple que

$$[\alpha \rightarrow \beta] = [\alpha] \rightarrow [\beta], \quad [\alpha \leftrightarrow \beta] = [\alpha] \leftrightarrow [\beta].$$

Si \mathbb{B} es un álgebra de Boole, la propiedad 8) de la definición (junto con su dual) establece que existen unos únicos elementos $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{B}$ tales que para todo $p \in B$ se cumple $p \wedge p' = \mathbf{0}, p \vee p' = \mathbf{1}$. Las propiedades siguientes se demuestran sin dificultad:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{0}' = \mathbf{1}, & \mathbf{1}' = \mathbf{0}, \\ p \wedge p' = \mathbf{0}, & p \vee p' = \mathbf{1}, \\ p \vee \mathbf{0} = p, & p \wedge \mathbf{1} = p, \\ p \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}, & p \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{array}$$

Por ejemplo, $p \vee \mathbf{0} = p \vee (p \wedge p') = p$, por la propiedad 6). Así mismo, $p \vee \mathbf{1} = p \vee (p \vee p') = (p \vee p) \vee p' = p \vee p' = \mathbf{1}$.

Si \mathbb{B} es un álgebra de conjuntos sobre un conjunto X , es claro que $\mathbf{0} = \emptyset$ y $\mathbf{1} = X$. Si \mathbb{B} es el álgebra de Lindenbaum de una teoría T , entonces $\mathbf{1}$ es la clase de las sentencias demostrables en T y $\mathbf{0}$ es la clase de las sentencias refutables en T .

Teorema 7.2 *Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole. Entonces la relación en \mathbb{B} dada por*

$$p \leq q \leftrightarrow p \wedge q = p \leftrightarrow p \vee q = q$$

es una relación de orden parcial. En lo sucesivo consideraremos a toda álgebra de Boole como conjunto parcialmente ordenado con esta relación. Además se cumplen los hechos siguientes:

- a) $p \wedge q$ es el ínfimo del conjunto $\{p, q\}$,
- b) $p \vee q$ es el supremo del conjunto $\{p, q\}$,
- c) $p \leq q \leftrightarrow q' \leq p'$.
- d) $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son el mínimo y el máximo de \mathbb{B} respectivamente.
- e) $p \leq q$ sys $p \rightarrow q = \mathbf{1}$, y $(p \leftrightarrow q) = \mathbf{1}$ sys $p = q$.

DEMOSTRACIÓN: Si $p \wedge q = p$, entonces $p \vee q = (p \wedge q) \vee q = q$, por la propiedad 6). Igualmente se tiene la otra implicación.

La relación \leq es reflexiva por la propiedad 4. La antisimetría es trivial. En cuanto a la transitividad, si $p \leq q$ y $q \leq r$ entonces

$$p \wedge r = (p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) = p \wedge q = p,$$

luego $p \leq r$.

a) Se cumple que $p \wedge q \wedge p = p \wedge p \wedge q = p \wedge q$, luego $p \wedge q \leq p$. Igualmente $p \wedge q \leq q$. Por otra parte, si $r \leq p$ y $r \leq q$ entonces $p \wedge q \wedge r = p \wedge r = r$, luego $r \leq p \wedge q$. Esto prueba que $p \wedge q$ es el ínfimo de $\{p, q\}$.

- b) es análogo a a).
- c) Si $p \leq q$ entonces $p \wedge q = p$, luego $p' \vee q' = p'$, luego $q' \leq p'$.
- d) es trivial.
- e) Si $p \leq q$ entonces $(p \rightarrow p') = p' \vee q = p' \vee p \vee q = \mathbf{1} \vee q = \mathbf{1}$.

Si $(p \rightarrow q) = \mathbf{1}$, entonces $p' \vee q = \mathbf{1}$, luego

$$p = p \wedge \mathbf{1} = p \wedge (p' \vee q) = (p \wedge p') \vee (p \wedge q) = \mathbf{0} \vee (p \wedge q) = p \wedge q.$$

Así pues, $p \leq q$.

Por último, $(p \leftrightarrow q) = \mathbf{1}$ syss $(p \rightarrow q) = (q \rightarrow p) = \mathbf{1}$, syss $p \leq q \wedge q \leq p$, syss $p = q$. ■

Si \mathbb{B} es un álgebra de conjuntos, la relación de orden es claramente la inclusión. Si \mathbb{B} es el álgebra de Lindenbaum de una teoría T , entonces $[\alpha] \leq [\beta]$ syss $[\alpha \rightarrow \beta] = \mathbf{1}$, syss $\alpha \rightarrow \beta$ es un teorema de T .

Definición 7.3 Diremos que un álgebra de Boole \mathbb{B} es *degenerada* si $\mathbf{0} = \mathbf{1}$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son el mínimo y el máximo de \mathbb{B} es claro que \mathbb{B} es degenerada si y sólo si $\mathbb{B} = \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{1}\}$.

Un álgebra de conjuntos sobre un conjunto X es degenerada si y sólo si $X = \emptyset$. El álgebra de Lindenbaum de una teoría T es degenerada si y sólo si T es contradictoria (si y sólo si todas las sentencias son teoremas).

Vamos a trabajar únicamente con álgebras no degeneradas, es decir, en lo sucesivo entenderemos que “álgebra de Boole” significa “álgebra de Boole no degenerada”.

Definición 7.4 Si \mathbb{B} es un álgebra de Boole, diremos que un conjunto $\mathbb{C} \subset \mathbb{B}$ es una *subálgebra* de \mathbb{B} si $\mathbb{C} \neq \emptyset$ y para todo $p, q \in \mathbb{C}$ se cumple que $p \wedge q, p \vee q, p' \in \mathbb{C}$. Entonces \mathbb{C} es un álgebra con las restricciones de las operaciones de \mathbb{B} . Es claro que $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son los mismos en \mathbb{B} y en \mathbb{C} .

Obviamente \mathbb{B} es una subálgebra de \mathbb{B} , las subálgebras de \mathbb{B} distintas de la propia \mathbb{B} se llaman subálgebras *propias*. Así mismo, $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ es una subálgebra de \mathbb{B} , a la que llamaremos subálgebra *trivial*. Un álgebra \mathbb{B} es *trivial* si coincide con su subálgebra trivial, es decir, si $\mathbb{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Un álgebra $\mathcal{P}X$ es trivial si y sólo si $|X| = 1$, el álgebra de abiertos-cerrados de un espacio topológico X es trivial si y sólo si X es conexo. El álgebra de Lindenbaum de una teoría T es trivial si y sólo si T es completa.

Se comprueba inmediatamente que la intersección de una familia de subálgebras de un álgebra dada \mathbb{B} es de nuevo una subálgebra. Por consiguiente, si $X \subset \mathbb{B}$, podemos definir la *subálgebra generada* por X en \mathbb{B} como la intersección de todas las subálgebras de \mathbb{B} que contienen a X . La representaremos por $\langle X \rangle$. Es claro que si $X \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{B}$, donde \mathbb{C} es una subálgebra de \mathbb{B} , entonces la subálgebra generada por X en \mathbb{C} coincide con la subálgebra generada por X en \mathbb{B} . Si $\mathbb{B} = \langle X \rangle$ diremos que X es un generador de \mathbb{B} .

Definición 7.5 Diremos que una aplicación $h : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ entre álgebras de Boole es un *homomorfismo de álgebras* si para todo $p, q \in \mathbb{B}$ se cumple

$$h(p') = h(p)', \quad h(p \wedge q) = h(p) \wedge h(q), \quad h(p \vee q) = h(p) \vee h(q).$$

Es claro que si se da la primera condición las otras dos son equivalentes, por lo que es suficiente comprobar una de las dos. También es claro que un homomorfismo de álgebras cumple $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $h(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ y si $p \leq q$ entonces $h(p) \leq h(q)$. Así mismo es claro que $h[\mathbb{B}]$ es una subálgebra de \mathbb{C} .

Un *monomorfismo*, *epimorfismo*, *isomorfismo de álgebras* es un homomorfismo inyectivo, suprayectivo o biyectivo, respectivamente. Un *automorfismo* de álgebras es un isomorfismo de un álgebra en sí misma.

La composición de homomorfismos es un homomorfismo, la inversa de un isomorfismo es un isomorfismo. Todo isomorfismo de álgebras es una semejanza de conjuntos parcialmente ordenados y el recíproco también es cierto, pues las semejanzas conservan supremos e ínfimos y si p es un elemento de un álgebra, p' está caracterizado como el único elemento q que cumple $p \wedge q = \mathbb{0}$, $p \vee q = \mathbb{1}$.

Definición 7.6 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole y $X \subset \mathbb{B}$. Representaremos por $\bigvee X$ y $\bigwedge X$ al supremo y al ínfimo de X en \mathbb{B} (supuesto que existan). Ciertamente existen si X es finito. En particular $\bigvee \emptyset = \mathbb{0}$, $\bigwedge \emptyset = \mathbb{1}$.

También usaremos la notación

$$\bigvee_{i \in I} p_i = \bigvee \{p_i \mid i \in I\}, \quad \bigwedge_{i \in I} p_i = \bigwedge \{p_i \mid i \in I\}.$$

Diremos que \mathbb{B} es *completa* si todo subconjunto de \mathbb{B} tiene supremo.

Si $X \subset \mathbb{B}$, llamaremos *conjunto dual* de X al conjunto

$$X' = \{p' \mid p \in X\}.$$

Es fácil comprobar las propiedades siguientes, donde ha de entenderse que el miembro izquierdo existe si existe el derecho:

$$\begin{aligned} \bigvee X' &= (\bigwedge X)', & \bigwedge X' &= (\bigvee X)', \\ \bigvee_{q \in X} (p \wedge q) &= p \wedge \bigvee_{q \in X} q, & \bigwedge_{q \in X} (p \vee q) &= p \vee \bigwedge_{q \in X} q. \end{aligned}$$

Veamos como ejemplo la prueba de la tercera: supongamos que existe el supremo de la derecha. Entonces, si $q \in X$ se cumple claramente

$$p \wedge q \leq p \wedge \bigvee_{q \in X} q,$$

y si r es una cota superior de $A = \{p \wedge q \mid q \in X\}$, entonces, para cada $q \in X$ tenemos $p \wedge q \leq r$, luego $p \wedge q = p \wedge q \wedge r$, luego

$$p \wedge q \leq p \wedge \bigvee_{q \in X} q \wedge r, \quad \text{luego} \quad p \wedge \bigvee_{q \in X} q \leq p \wedge \bigvee_{q \in X} q \wedge r.$$

Así pues, $p \wedge \bigvee_{q \in X} q \leq r$. Esto prueba que $p \wedge \bigvee_{q \in X} q$ es el supremo de A . ■

Como consecuencia de las dos primeras propiedades resulta que en la definición de completitud es equivalente considerar supremos o ínfimos. En un álgebra completa todo subconjunto tiene supremo e ínfimo.

Definición 7.7 Un homomorfismo $h : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ entre álgebras de Boole completas es *completo* si para todo $X \subset \mathbb{B}$ se cumple

$$h\left(\bigvee_{q \in X} q\right) = \bigvee_{q \in X} h(q)$$

(o la igualdad análoga con ínfimos).

Si \mathbb{B} es un álgebra de Boole completa y \mathbb{C} es una subálgebra de \mathbb{B} , diremos que \mathbb{C} es una *subálgebra completa* si para todo $X \subset \mathbb{C}$ se cumple que $\bigvee X \in \mathbb{C}$ (o, equivalentemente, $\bigwedge X \in \mathbb{C}$).

En tal caso \mathbb{C} es completa con la estructura de subálgebra y si $X \subset \mathbb{C}$, el supremo de X en \mathbb{C} es el mismo que el supremo en \mathbb{B} .

Equivalentemente, \mathbb{C} es una subálgebra completa de \mathbb{B} si es completa como álgebra y la inclusión $i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ es un monomorfismo completo.

Es importante tener presente que una subálgebra \mathbb{C} de un álgebra completa \mathbb{B} puede ser completa como álgebra pero no ser una subálgebra completa. Esto sucede si el supremo en \mathbb{C} de un subconjunto $X \subset \mathbb{C}$ no coincide con el supremo en \mathbb{B} .

Si \mathbb{B} es un álgebra de Boole completa, es inmediato comprobar que la intersección de una familia de subálgebras completas de \mathbb{B} es de nuevo una subálgebra completa. Por consiguiente, si $X \subset \mathbb{B}$, podemos definir la *subálgebra completa generada* por X como la intersección de todas las subálgebras completas de \mathbb{B} que contienen a X . La representaremos por $\langle X \rangle_c$. Si $\mathbb{B} = \langle X \rangle_c$ diremos que \mathbb{B} está *completamente generada* por X o que X es un *generador completo* de \mathbb{B} .

Terminamos la sección construyendo las álgebras de Boole completas que manejaremos en la teoría de extensiones.

Definición 7.8 Sea X un espacio topológico, no necesariamente de Hausdorff. Si $A \subset X$ representaremos por $\text{int}A$ al interior de A y por $\text{cl}A$ la clausura de A . Diremos que A es un *abierto regular* si $A = \text{int} \text{cl}A$. Definimos $A^\perp = X \setminus \text{cl}A$.

Es claro que si $A \subset B \subset X$ entonces $B^\perp \subset A^\perp$ y $A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp}$.

Observemos que $A^{\perp\perp} = X \setminus \text{cl}A^\perp = \text{int}(X \setminus A^\perp) = \text{int} \text{cl}A$. Así pues, A es un abierto regular si y sólo si $A = A^{\perp\perp}$. Necesitamos algunos hechos adicionales sobre estos conceptos:

Teorema 7.9 Sean U y V subconjuntos de un espacio topológico X y supongamos que U es abierto. Entonces:

- a) $U^{\perp\perp\perp} = U^\perp$,
- b) $V^{\perp\perp\perp\perp} = V^{\perp\perp}$,
- c) $(U \cap V)^{\perp\perp} = U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp}$.

DEMOSTRACIÓN: a) Como $U \subset \text{cl}U$ y U es abierto, de hecho

$$U \subset \text{int cl}U = U^{\perp\perp},$$

de donde $U^{\perp\perp\perp} \subset U^{\perp}$.

Como $U^{\perp} \subset \text{cl}U^{\perp}$ y U^{\perp} es abierto, de hecho

$$U^{\perp} \subset \text{int cl}U^{\perp} = U^{\perp\perp\perp}.$$

Por consiguiente tenemos la igualdad.

b) Es consecuencia de a) aplicado al abierto $U = V^{\perp}$.

c) Como $U \cap V \subset U$ y $U \cap V \subset V$, se cumple $(U \cap V)^{\perp\perp} \subset U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp}$.

Para tener la otra inclusión basta ver que $U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp} \subset \text{cl}(U \cap V)$, pues como el conjunto de la izquierda es abierto, de hecho está contenido en el interior del de la derecha, es decir, en $(U \cap V)^{\perp\perp}$.

Sea, pues $x \in U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp}$ y veamos que todo abierto G tal que $x \in G$ corta a $U \cap V$. Tenemos que $x \in G \cap U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp}$, y este conjunto es abierto. Como $x \in U^{\perp\perp} = \text{int cl}U \subset \text{cl}U$, ha de ser $G \cap U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp} \cap U \neq \emptyset$. Sea, pues, $t \in G \cap U^{\perp\perp} \cap V^{\perp\perp} \cap U \subset V^{\perp\perp} = \text{int cl}V \subset \text{cl}V$. Como $G \cap U$ es un abierto que contiene a t , ha de ser $G \cap U \cap V \neq \emptyset$, como teníamos que probar. ■

Teorema 7.10 *Si X es un espacio topológico, el conjunto $R(X)$ de los abiertos regulares de X es un álgebra de Boole completa con las operaciones dadas por*

$$p \wedge q = p \cap q, \quad p \vee q = (p \cup q)^{\perp\perp}, \quad p' = p^{\perp}.$$

Además $\mathbf{0} = \emptyset$, $\mathbf{1} = X$, la relación de orden es la inclusión y para todo $A \subset R(X)$ se cumple

$$\bigvee A = \left(\bigcup_{p \in A} p \right)^{\perp\perp}, \quad \bigwedge A = \left(\bigcap_{p \in A} p \right)^{\perp\perp}.$$

DEMOSTRACIÓN: Notemos que del teorema anterior apartado c) se sigue que si $p, q \in R(X)$ entonces $p \cap q \in R(X)$, lo cual justifica la definición de $p \wedge q$. Del apartado b) se sigue que si $p \subset X$ entonces $p^{\perp\perp} \in R(X)$, lo que justifica la definición de $p \vee q$. La definición de p' es correcta por el apartado a).

Comprobamos las propiedades no obvias de la definición de álgebra:

- 1) $p'' = p^{\perp\perp} = p$ porque p es regular.
- 5) $p \vee (q \wedge r) = (p \cup (q \cap r))^{\perp\perp} = ((p \cup q) \cap (p \cup r))^{\perp\perp} = (p \cup q)^{\perp\perp} \cap (p \cup r)^{\perp\perp} = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
- 6) $p \vee (p \wedge q) = (p \cup (p \cap q))^{\perp\perp} = p^{\perp\perp} = p$.
- 7) $p' \vee q' = (p^{\perp} \cup q^{\perp})^{\perp\perp} = (X \setminus \text{cl}(p^{\perp} \cup q^{\perp}))^{\perp} = (X \setminus (\text{cl}p^{\perp} \cup \text{cl}q^{\perp}))^{\perp} = ((X \setminus \text{cl}p^{\perp}) \cap (X \setminus \text{cl}q^{\perp}))^{\perp} = (p^{\perp\perp} \cap q^{\perp\perp})^{\perp} = (p \cap q)^{\perp} = (p \wedge q)'$.

$$8) p \vee p' = p'' \vee p' = (p' \wedge p)' = ((X \setminus \text{cl} p) \cap p)^\perp = \emptyset^\perp = X, \text{ para todo } p.$$

Así pues $R(X)$ es un álgebra de Boole. Teniendo en cuenta que \wedge es la intersección, es claro que la relación de orden es la inclusión. También es claro que $\mathbb{0} = \emptyset$ y $\mathbb{1} = X$.

Si $A \subset R(X)$, sea $s = \left(\bigcup_{p \in A} p \right)^{\perp\perp} \in R(X)$. Como la unión es un abierto, se cumple que $\bigcup_{p \in A} p \subset \text{int cl } \bigcup_{p \in A} p = s$, luego s es una cota superior de A . Si $r \in R(X)$ es una cota superior de A , entonces $\bigcup_{p \in A} p \subset r$, luego $s \subset r^{\perp\perp} = r$, es decir, $s \leq r$. Esto prueba que s es el supremo de A . Igualmente se razona con el ínfimo. ■

7.2 Álgebras de Boole como c.p.o.s

Un álgebra de Boole no nos sirve como conjunto preordenado para la teoría de extensiones porque, por ejemplo, todos sus elementos son compatibles (una extensión común es $\mathbb{0}$). Los conceptos que tenemos definidos para c.p.o.s se ajustan adecuadamente a las álgebras de Boole a condición de que prescindamos del $\mathbb{0}$. Más precisamente, a cada álgebra de Boole \mathbb{B} le asociamos el c.p.o. $\mathbb{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$. Convendremos que cuando apliquemos a \mathbb{B} cualquier concepto de la teoría de conjuntos preordenados en realidad se lo estamos aplicando a $\mathbb{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$.

Por ejemplo, cuando digamos que dos elementos $p, q \in \mathbb{B}$ (no nulos) son incompatibles habrá que entender que son incompatibles como elementos de $\mathbb{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$, es decir, que no tienen extensiones comunes en \mathbb{B} aparte de $\mathbb{0}$. Puesto que, obviamente, $p \wedge q$ es una extensión común, concluimos que

$$p \perp q \leftrightarrow p \wedge q = \mathbb{0}.$$

Recogemos este hecho y otros similares en el teorema siguiente:

Teorema 7.11 *Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole. Entonces*

- a) $\bigwedge pq \in \mathbb{B} (p \perp q \leftrightarrow p \wedge q = \mathbb{0})$.
- b) \mathbb{B} es un c.p.o. separativo, es decir, si $p, q \in \mathbb{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ cumplen $p \not\leq q$, entonces existe $r \in \mathbb{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ tal que $r \leq p$ y $r \wedge q = \mathbb{0}$.
- c) Una condición $p \in \mathbb{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ es un átomo si y sólo si no existe ninguna condición $q \in \mathbb{B}$ tal que $\mathbb{0} < q < p$.

DEMOSTRACIÓN: a) Está probado en el párrafo previo al teorema, al menos si $p, q \in \mathbb{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$. En el caso en que $p = \mathbb{0}$ o $q = \mathbb{0}$ tomaremos la equivalencia como una definición, es decir, extendemos la noción de condiciones incompatibles de $\mathbb{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ a \mathbb{B} estableciendo que $\mathbb{0}$ es incompatible con toda condición.

b) Cuando decimos que \mathbb{B} es separativo, hay que entender que $\mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ lo es. Basta tomar $r = p \wedge q'$. Se cumple que $r \neq \mathbf{0}$, pues si $p \wedge q' = \mathbf{0}$, entonces $p \rightarrow q = p' \vee q = \mathbf{1}$, luego $p \leq q$. Claramente r cumple lo pedido.

c) Si existe un $q \in \mathbb{B}$ tal que $\mathbf{0} < q < p$, entonces por a) existe un $r \in \mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $r \leq p$ y $r \perp q$, luego p no es un átomo. El recíproco es obvio. ■

Ahora caracterizamos las inmersiones completas entre c.p.o.s para el caso de álgebras de Boole completas:

Teorema 7.12 *Sean \mathbb{B} y \mathbb{C} dos álgebras de Boole completas. Entonces, una aplicación $h : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ es un monomorfismo completo (en el sentido de conservar supremos) si y sólo si $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y su restricción a $\mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una inmersión completa $\mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ en el sentido de c.p.o.s.*

DEMOSTRACIÓN: Si h es un monomorfismo completo, claramente es una inmersión y si $q \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ entonces $p = \bigwedge \{r \in \mathbb{B} \mid q \leq h(r)\}$ es una reducción de q a \mathbb{B} . En efecto, $h(p) = \bigwedge \{h(r) \mid r \in \mathbb{B} \wedge q \leq h(r)\} \geq q > \mathbf{0}$, luego $p > \mathbf{0}$. Si $t \leq p$ es no nulo pero $h(t) \wedge q = \mathbf{0}$, entonces $q \leq h(t')$, luego $p \leq t'$ (por definición de p), y así $t \leq p \wedge p' = \mathbf{0}$, contradicción.

Supongamos ahora que h es una inmersión completa en el sentido de c.p.o.s. Como \mathbb{B} es un c.p.o. separativo, el teorema 6.2 nos da que h es inyectiva, $h(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ y para todo $p, q \in \mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$p \leq q \leftrightarrow h(p) \leq h(q), \quad p \wedge q = \mathbf{0} \leftrightarrow h(p) \wedge h(q) = \mathbf{0}.$$

Sea $p \in \mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ y veamos que $h(p') = h(p)'$. Como $p \wedge p' = \mathbf{0}$, sabemos que $h(p) \wedge h(p') = \mathbf{0}$, luego $h(p') \leq h(p)'$. Si no se da la igualdad, tendrá que ser $q = h(p)' \wedge h(p')' \neq \mathbf{0}$. Sea r una reducción de q a \mathbb{B} . Necesariamente $r \wedge p \neq \mathbf{0}$ o $r \wedge p' \neq \mathbf{0}$. Veamos que ambos casos llevan a contradicción.

Si $r \wedge p \neq \mathbf{0}$, entonces $h(r \wedge p) \leq h(p)$, luego $h(r \wedge p) \wedge q = \mathbf{0}$, en contra de que r sea una reducción de q .

Si $r \wedge p' \neq \mathbf{0}$ entonces $h(r \wedge p') \leq h(p')$ y también $h(r \wedge p') \wedge q = \mathbf{0}$.

Así pues, h conserva complementos. Si probamos que h conserva ínfimos de conjuntos arbitrarios tendremos en particular que conserva ínfimos de pares, luego h será un monomorfismo completo. Sea, pues, $X \subset \mathbb{B}$. Para cada $p \in X$ tenemos que

$$\bigwedge_{p \in X} p \leq p, \quad \text{luego} \quad h\left(\bigwedge_{p \in X} p\right) \leq h(p), \quad \text{luego} \quad h\left(\bigwedge_{p \in X} p\right) \leq \bigwedge_{p \in X} h(p).$$

Si se diera la desigualdad estricta existiría un $s \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que

$$s \leq \bigwedge_{p \in X} h(p) \quad \text{y} \quad s \wedge h\left(\bigwedge_{p \in X} p\right) = \mathbf{0}.$$

Sea t una reducción de s a \mathbb{B} . Si $p \in X$ ha de ser $t \leq p$, pues en caso contrario $t \wedge p' \neq \mathbf{0}$ y $h(t \wedge p') \wedge s \leq h(p') \wedge h(p) = h(p)' \wedge h(p) = \mathbf{0}$, en contradicción

con que t es una reducción de s . Así pues, $t \leq \bigwedge_{p \in X} p$, pero entonces

$$s \wedge h(t) \leq s \wedge h\left(\bigwedge_{p \in X} p\right) = \Phi,$$

contradicción. ■

Las inmersiones densas entre álgebras de Boole completas resultan ser de hecho isomorfismos. Esto es consecuencia del teorema siguiente:

Teorema 7.13 Sean \mathbb{B} y \mathbb{C} dos álgebras de Boole completas, sean $D_1 \subset \mathbb{B}$, $D_2 \subset \mathbb{C}$ subconjuntos densos y sea $j : D_1 \rightarrow D_2$ una semejanza. Entonces j se extiende a un único isomorfismo de álgebras $j^* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN: Al decir que D_1 es denso en \mathbb{B} hay que entender que $D_1 \subset \mathbb{B} \setminus \{\Phi\}$ es denso en $\mathbb{B} \setminus \{\Phi\}$, e igualmente con D_2 .

Definimos $j^*(p) = \bigvee\{j(q) \mid q \in D_1 \wedge q \leq p\}$. Claramente $j^*(\Phi) = \Phi$. Si $p \in D_1$ entonces

$$j(p) \leq \bigvee\{j(q) \mid q \in D_1 \wedge q \leq p\} \leq j(p),$$

luego $j^*(p) = j(p)$, es decir, j^* extiende a j .

Si $p \in \mathbb{B} \setminus \{\Phi\}$, entonces existe $q \in D_1$ con lo que $q \leq p$ y por consiguiente $\Phi < j(q) \leq j^*(p)$. Así pues, j^* se restringe a una aplicación $\mathbb{B} \setminus \{\Phi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\Phi\}$. Veamos que es una inmersión.

Si $p_1, p_2 \in \mathbb{B}$ cumplen $p_1 \leq p_2$, entonces

$$\{j(q) \mid q \in D_1 \wedge q \leq p_1\} \subset \{j(q) \mid q \in D_1 \wedge q \leq p_2\},$$

luego $j^*(p_1) \leq j^*(p_2)$.

Si, por el contrario, $p_1 \wedge p_2 = \Phi$, entonces, para cada $q^* \in D_1$, $q \leq p_1$ tenemos que

$$j(q) \wedge j^*(p_2) = \bigvee\{j(q) \wedge j(r) \mid r \in D_1 \wedge r \leq p_2\} = \Phi,$$

pues q y r son incompatibles en D_1 , luego $j(q)$ y $j(r)$ son incompatibles en D_2 y, al ser éste denso, también lo son en \mathbb{C} . Por consiguiente

$$j^*(p_1) \wedge j^*(p_2) = \bigvee\{j(q) \wedge j^*(p_2) \mid q \in D_1 \wedge q \leq p_1\} = \Phi.$$

Así pues, j^* es una inmersión de c.p.o.s, obviamente densa, luego en particular es una inmersión completa. Por el teorema anterior es un monomorfismo completo de álgebras de Boole. Sólo falta probar que es suprayectivo.

Sea $r \in \mathbb{C}$. Definimos $s = \bigvee\{p \in D_1 \mid j(p) \leq r\}$. Entonces

$$j^*(s) = \bigvee\{j(p) \mid p \in D_1 \wedge j(p) \leq r\} \leq r.$$

Si no se diera la igualdad existiría un $q \in \mathbb{C}$ no nulo de manera que $q \leq r$ y $q \wedge j^*(s) = \mathbb{0}$. Podemos tomar $q \in D_2$, de modo que $q = j(p)$, para cierto $p \in D_1$. Entonces $p \leq s$, luego $q = j(p) = j^*(p) \leq j^*(s)$, contradicción.

Veamos finalmente que j^* es único. Sea $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ otro isomorfismo que extienda a j . Si $p \in \mathbb{B}$ y $q \in D_1$ cumple $q \leq p$, entonces $j(q) = f(q) \leq f(p)$, luego $j^*(p) \leq f(p)$. Si no se diera la igualdad existiría un $r \in \mathbb{C}$ no nulo tal que $r \leq f(p)$ y $r \wedge j^*(p) = \mathbb{0}$. Podemos tomarlo en D_2 , de modo que $r = j(q)$, para cierto $q \in D_1$. Entonces $f(q) \leq f(p)$, luego $q \leq p$, luego $r = j(q) = j^*(q) \leq j^*(p)$, contradicción. Así pues, $j^*(p) = f(p)$. ■

En particular, si $j : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ es una inmersión densa entre álgebras de Boole completas, entonces $j : \mathbb{B} \rightarrow j[\mathbb{B}]$ es una semejanza, y el teorema anterior nos dice que debe extenderse a un isomorfismo $j^* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$, lo cual sólo es posible si j es ya un isomorfismo.

El próximo teorema implica que cualquier extensión genérica puede obtenerse en teoría con un álgebra de Boole completa, pues todo c.p.o. se puede sumergir densamente en un álgebra tal.

Definición 7.14 Sea \mathbb{P} un c.p.o. Para cada $p \in \mathbb{P}$ sea $B_p = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p\}$. Es inmediato comprobar que estos conjuntos son la base de una topología en \mathbb{P} (no de Hausdorff). En particular podemos considerar el álgebra $R(\mathbb{P})$ de los abiertos regulares de \mathbb{P} , que es un álgebra de Boole completa.

Ejercicio: Comprobar que los subconjuntos densos en un c.p.o. \mathbb{P} coinciden con los subconjuntos densos para la topología que acabamos de definir.

Teorema 7.15 Sea \mathbb{P} un c.p.o.

- La aplicación $i_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \rightarrow R(\mathbb{P})$ dada por $i(p) = B_p^{\perp\perp}$ es una inmersión densa.
- Si $j : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ es una inmersión densa de \mathbb{P} en un álgebra de Boole completa, entonces existe un único isomorfismo $j^* : R(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{B}$ tal que $i_{\mathbb{P}} \circ j^* = j$.

En particular $R(\mathbb{P})$ es salvo isomorfismo la única álgebra de Boole completa en la que \mathbb{P} puede sumergirse densamente. La llamaremos *compleción* de \mathbb{P} .

DEMOSTRACIÓN: a) Notemos que si $p \in \mathbb{P}$, entonces

$$p \in B_p \subset B_p^{\perp\perp} \neq \emptyset = \mathbb{0},$$

luego $i_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \rightarrow R(\mathbb{P}) \setminus \{\mathbb{0}\}$.

Sean $p, q \in \mathbb{P}$. Si $p \leq q$ entonces $B_p \subset B_q$, luego $B_p^{\perp\perp} \subset B_q^{\perp\perp}$, es decir, $i(p) \leq i(q)$.

Si $p \perp q$, entonces $B_p \cap B_q = \emptyset$, luego $B_p^{\perp\perp} \cap B_q^{\perp\perp} = (B_p \cap B_q)^{\perp\perp} = \emptyset$, luego $i(p) \wedge i(q) = \mathbb{0}$.

Esto prueba que i es una inmersión. Veamos que es densa. Si $A \in R(\mathbb{P}) \setminus \{\mathbb{0}\}$, entonces A es un abierto no vacío, luego es unión de abiertos básicos. En particular existe un $p \in \mathbb{P}$ tal que $B_p \subset A$. Entonces $B_p^{\perp\perp} \subset A^{\perp\perp} = A$, es decir, $i(p) \leq A$.

b) Sea $j : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}$ una inmersión densa en un álgebra completa. Entonces $i[\mathbb{P}]$ y $j[\mathbb{P}]$ son c.p.o.s separativos, pues todo subconjunto denso de un c.p.o. separativo es separativo. Las aplicaciones $i : \mathbb{P} \longrightarrow i[\mathbb{P}]$ y $j : \mathbb{P} \longrightarrow j[\mathbb{P}]$ son inmersiones suprayectivas. El teorema 6.5 implica que $i[\mathbb{P}]$ es semejante a $j[\mathbb{P}]$. Más aún, si nos fijamos en la prueba de la unicidad veremos que nos da la existencia de una semejanza $j' : i[\mathbb{P}] \longrightarrow j[\mathbb{P}]$ tal que $i \circ j' = j$. Por el teorema anterior j' se extiende a un isomorfismo de álgebras $j^* : R(\mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{B}$, de modo que $i \circ j^* = j$. Además j^* es único, pues cualquier otro isomorfismo en estas condiciones sería también una extensión de j' . ■

En particular toda álgebra de Boole se puede completar, es decir, se puede sumergir como subálgebra densa en una única álgebra de Boole completa. También es claro ahora que todo c.p.o. separativo es semejante a un subconjunto denso de un álgebra de Boole completa. (Si no es separativo existe una inmersión densa, pero no es inyectiva, luego no es una semejanza en la imagen.)

Pasamos a estudiar ahora los filtros de un álgebra de Boole:

Teorema 7.16 *Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole. Un subconjunto $F \subset \mathbb{B}$ es un filtro en \mathbb{B} si y sólo si cumple las propiedades siguientes:*

- a) $\mathbf{1} \in F$, $\mathbf{0} \notin F$,
- b) $\bigwedge pq \in F \ p \wedge q \in F$,
- c) $\bigwedge p \in F \bigwedge q \in \mathbb{B} (p \leq q \rightarrow q \in F)$.

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que un conjunto que cumpla las propiedades indicadas es un filtro (en $\mathbb{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$). Recíprocamente, todo filtro cumple estas propiedades. Quizá la menos obvia es la 2), pero si $p, q \in F$, entonces existe $r \in F$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, luego $r \leq p \wedge q$, luego $p \wedge q \in F$. ■

En las álgebras de Boole, el concepto de filtro tiene asociado un concepto dual que no tiene un equivalente en c.p.o.s arbitrarios:

Definición 7.17 *Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole. Diremos que un subconjunto $I \subset \mathbb{B}$ es un ideal de \mathbb{B} si cumple las propiedades siguientes:*

- a) $\mathbf{0} \in I$, $\mathbf{1} \notin I$,
- b) $\bigwedge pq \in I \ p \vee q \in I$,
- c) $\bigwedge p \in I \bigwedge q \in \mathbb{B} (q \leq p \rightarrow q \in I)$.

Es inmediato comprobar que I es un ideal si y sólo si su conjunto dual I' es un filtro y viceversa. De hecho la correspondencia $X \mapsto X'$ biyecta los ideales con los filtros.

Ejercicio: Comprobar que toda álgebra de Boole \mathbb{B} tiene estructura de anillo conmutativo y unitario de característica 2 con las operaciones dadas por

$$p + q = (p \wedge q') \vee (q \wedge p') = (p \vee q) \wedge (p \wedge q)', \quad p \cdot q = p \wedge q.$$

(Característica 2 quiere decir que $p + p = 0$ para todo p). Comprobar que un subconjunto I de \mathbb{B} es un ideal de \mathbb{B} en el sentido de la teoría de anillos si y sólo si lo es en el sentido de la definición anterior. En álgebras de conjuntos, la suma se corresponde con la operación conjuntista conocida como *diferencia simétrica*:

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Diremos que un subconjunto X de un álgebra de Boole \mathbb{B} tiene la *propiedad de la intersección finita* si para cualquier conjunto finito de elementos $x_1, \dots, x_n \in X$ se cumple $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \neq \emptyset$.

Diremos que un conjunto x_1, \dots, x_n de elementos de \mathbb{B} es un *cubrimiento finito* si $x_1 \vee \dots \vee x_n = \mathbf{1}$.

El teorema siguiente se demuestra sin dificultad:

Teorema 7.18 *Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole.*

- La intersección de una familia de ideales/filtros de \mathbb{B} es un ideal/filtro.*
- Si $X \subset \mathbb{B}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces el conjunto*

$$(X)_f = \{p \in \mathbb{B} \mid \text{existen } n \in \omega \text{ y } x_1, \dots, x_n \in X \text{ tales que } x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq p\}$$
es un filtro de \mathbb{B} que contiene a X y está contenido en cualquier otro filtro de \mathbb{B} que contenga a X . Se le llama filtro generado por X .
- Si $X \subset \mathbb{B}$ no contiene cubrimientos finitos, entonces el conjunto*

$$(X)_i = \{p \in \mathbb{B} \mid \text{existen } n \in \omega \text{ y } x_1, \dots, x_n \in X \text{ tales que } p \leq x_1 \vee \dots \vee x_n\}$$
es un ideal de \mathbb{B} que contiene a X y está contenido en cualquier otro ideal de \mathbb{B} que contenga a X . Se le llama ideal generado por X .
- Si $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de álgebras y F e I son un filtro y un ideal duales en \mathbb{C} , entonces $f^{-1}[F]$ y $f^{-1}[I]$ son un filtro y un ideal duales en \mathbb{B} .*

Un filtro genérico en un c.p.o. divide a las condiciones en “verdaderas” y “falsas”. En un álgebra de Boole, esto nos lleva a la noción de ultrafiltro, que introducimos seguidamente junto a su concepto dual.

Definición 7.19 *Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole, I un ideal y F un filtro en \mathbb{B} .*

- a) Se dice que I es un *ideal primo* en \mathbb{B} si $\bigwedge p \in \mathbb{B} (p \in I \vee p' \in I)$.
- b) Se dice que F es un *ultrafiltro* en \mathbb{B} si $\bigwedge p \in \mathbb{B} (p \in F \vee p' \in F)$.

Es evidente que los ideales primos son los duales de los ultrafiltros y viceversa. Si I y F son un ideal primo y un ultrafiltro duales entre sí, entonces $\mathbb{B} = I \cup F$, $I \cap F = \emptyset$.

En la sección siguiente demostraremos que los filtros genéricos son ciertamente ultrafiltros. Esto nos proporciona una especie de *tertium non datur*: o bien una condición o bien su complementaria ha de ser “verdadera” respecto a un filtro genérico. La existencia de ultrafiltros e ideales primos es consecuencia inmediata del lema de Zorn y de la caracterización siguiente:

Teorema 7.20 *Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole, I un ideal y F un filtro en \mathbb{B} . Entonces I es un ideal primo (resp. F es un ultrafiltro) si y sólo si es maximal respecto de la inclusión en el conjunto de ideales (resp. filtros) de \mathbb{B} .*

DEMOSTRACIÓN: Si I es primo pero existe un ideal J tal que $I \subsetneq J \subsetneq \mathbb{B}$, sea $q \in J \setminus I$. Como $q \notin I$, ha de ser $q' \in I$, pero entonces $q, q' \in J$, contradicción.

Recíprocamente, si I es maximal, dado $p \in \mathbb{B}$ tal que $p \notin I$, entonces $I \cup \{p\}$ ha de contener un cubrimiento finito de \mathbb{B} , o de lo contrario generaría un ideal mayor que I . Así pues, existe $i \in I$ tal que $\mathbb{1} = p \vee i$, de donde $p' \leq i$, con lo que $p' \in I$. Esto prueba que I es primo. Similarmente se razona con ultrafiltros (o, alternativamente, empleamos la dualidad). ■

Ejercicio: Probar que en un álgebra de Boole, vista como anillo, los ideales maximales coinciden con los primos (en el sentido algebraico usual) y son precisamente los que hemos definido arriba como ideales primos.

Según comentábamos, el lema de Zorn implica trivialmente el teorema siguiente, que es hasta ahora la única aplicación de axioma de elección en este capítulo:

Teorema 7.21 (Teorema del ultrafiltro/del ideal primo) *Todo filtro de un álgebra de Boole está contenido en un ultrafiltro y todo ideal está contenido en un ideal primo.*

7.3 Extensiones con álgebras de Boole

En virtud del teorema 7.15, cualquier extensión genérica puede obtenerse con un álgebra de Boole. En esta sección veremos que al trabajar con extensiones genéricas la teoría se simplifica y clarifica notablemente.

Comencemos observando que, al contrario de lo que sucede con la fórmula “ser un c.p.o.”, la fórmula “ser un álgebra de Boole completa” no es absoluto para modelos transitivos de ZFC. Sí lo es “ser un álgebra de Boole”, pero no la completitud. Más concretamente, si M es un modelo transitivo de ZFC y $\mathbb{B} \in M$

es un álgebra de Boole, entonces \mathbb{B} es completa^M si todo $X \in M$, $X \subset \mathbb{B}$ tiene supremo.

Pasemos ahora a caracterizar los filtros genéricos de un álgebra de Boole:

Teorema 7.22 *Sea M un modelo transitivo de ZFC y sea $\mathbb{B} \in M$ un álgebra de Boole completa^M. Entonces G es un filtro \mathbb{B} -genérico sobre M si y sólo si G es un ultrafiltro en \mathbb{B} tal que $\bigwedge X \in M (X \subset G \rightarrow \bigwedge X \in G)$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que G es un filtro \mathbb{B} -genérico sobre M . Entonces G es un ultrafiltro por el teorema 4.9. Sea $X \in M$ tal que $X \subset G$ y consideremos el conjunto

$$D = \{p \in \mathbb{B} \setminus \{\emptyset\} \mid p \leq \bigwedge X \vee \bigvee x \in X p \wedge x = \emptyset\} \in M.$$

Veamos que D es denso en \mathbb{B} . Si $q \in \mathbb{B} \setminus \{\emptyset\}$, o bien $q \leq \bigwedge X$, en cuyo caso $q \in D$, o bien existe un $x \in X$ tal que $q \not\leq x$. Entonces existe $r \leq q$, $r \neq \emptyset$, $r \wedge x = \emptyset$ y, por consiguiente, $r \in D$, $r \leq q$.

Concluimos entonces que existe $p \in G \cap D$, pero como $X \subset G$, tal condición ha de cumplir necesariamente $p \leq \bigwedge X$, luego $\bigwedge X \in G$.

Supongamos ahora que G cumple las condiciones del enunciado y sea $D \in M$ un subconjunto denso de \mathbb{B} . Sea $X = D' \in M$. Si fuera $G \cap D = \emptyset$, como G es un ultrafiltro tendríamos $X \subset G$, luego por hipótesis $\bigwedge X \in G$, luego en particular $\bigwedge X \neq \emptyset$. Como D es denso, existe $p \in D$ (en particular $p \neq \emptyset$) tal que $p \leq \bigwedge X$, pero entonces $p \leq p'$, lo cual es absurdo. ■

Debido a este teorema, y a pesar de que precisamente por él es redundante, es costumbre hablar de “ultrafiltros genéricos” en lugar de “filtros genéricos” en un álgebra de Boole completa.

Aunque, en principio, el c.p.o. que utilizamos al hablar de un álgebra \mathbb{B} es $\mathbb{B} \setminus \{\emptyset\}$, es conveniente admitir que \emptyset pueda aparecer en los \mathbb{B} -nombres, es decir, considerar \mathbb{B} -nombres propiamente dichos en lugar de $\mathbb{B} \setminus \{\emptyset\}$ -nombres. Esto no altera ningún resultado pues, como \emptyset no pertenece a ningún filtro, la presencia de un par (σ, \emptyset) en un \mathbb{B} -nombre no tiene ninguna repercusión. Así mismo resulta conveniente definir la fórmula $\emptyset \Vdash \phi$ como siempre verdadera. En realidad, al trabajar con álgebras de Boole completas podemos sustituir la relación \Vdash por el concepto de valor de una fórmula, que introducimos a continuación:

Definición 7.23 Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa y sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in V^{\mathbb{B}}$. Definimos el *valor* de $\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ en \mathbb{B} como la condición

$$\|\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\| = \bigvee \{p \in \mathbb{B} \mid p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\}.$$

En principio, el valor de ϕ es el supremo de las condiciones que fuerzan ϕ . Seguidamente probamos que $\|\phi\|$ fuerza ϕ , con lo que de hecho es la mayor condición que fuerza ϕ .

Teorema 7.24 Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa, sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in V^{\mathbb{B}}$ y sea $p \in \mathbb{B}$. Entonces

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \text{ syss } p \leq \|\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\|.$$

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es evidente. Para la otra basta probar que $\|\phi\| \Vdash \phi$. A su vez, para ello basta probar que el conjunto de las condiciones que fuerzan ϕ es denso bajo $\|\phi\|$ (teorema 4.24). En efecto, si $q \leq \|\phi\|$ y $q \neq \mathbb{0}$, entonces

$$\mathbb{0} < q = q \wedge \|\phi\| = \bigvee \{q \wedge p \mid p \in \mathbb{B} \wedge p \Vdash \phi\},$$

luego existe $p \in \mathbb{B}$ tal que $p \Vdash \phi$ y $q \wedge p \neq \mathbb{0}$, luego hemos encontrado una condición $r = q \wedge p$ tal que $r \leq q$ y $r \Vdash \phi$. ■

Así pues, al trabajar con álgebras de Boole completas no necesitamos elegir condiciones que fuercen determinadas fórmulas, sino que podemos usar siempre la mejor condición posible en cada caso, el valor de la fórmula. En estos términos, el teorema fundamental de la teoría de extensiones puede reescribirse como sigue:

Teorema 7.25 (Teorema fundamental de la teoría de extensiones) Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{B} \in M$ un álgebra de Boole completa^M, sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in M^{\mathbb{B}}$ y sea G un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M . Entonces

$$\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \dots, \sigma_{nG}) \text{ syss } \|\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\|^M \in G.$$

En lo sucesivo siempre que trabajemos en un modelo M con un álgebra de Boole completa^M escribiremos $\|\phi\|$ en lugar de $\|\phi\|^M$ sin que ello pueda llevar a confusión.

Ejercicio: Probar que si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas y \mathbb{B} es un álgebra de Boole completa casi homogénea, entonces para todos los conjuntos $x_1, \dots, x_n \in V$ se cumple $\|\phi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)\| \in \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$.

La compleja definición de la relación \Vdash (la que en su momento llamamos \Vdash^*) de debía a la falta de medios con que nos encontramos al trabajar con un c.p.o. arbitrario. Con las posibilidades de un álgebra de Boole completa las cosas cambian notablemente. la función $\|\cdot\|$ (que contiene la misma información que la relación \Vdash) tiene una definición natural.

Teorema 7.26 Sean ϕ y ψ dos fórmulas. Si \mathbb{B} es un álgebra de Boole completa, entonces:

- a) $\|\neg\phi\| = \|\phi\|'$,
- b) $\|\phi \wedge \psi\| = \|\phi\| \wedge \|\psi\|$,
- c) $\|\phi \vee \psi\| = \|\phi\| \vee \|\psi\|$,

- d) $\|\phi \rightarrow \psi\| = \|\phi\| \rightarrow \|\psi\|$,
- e) $\|\phi \leftrightarrow \psi\| = \|\phi\| \leftrightarrow \|\psi\|$,
- f) $\|\bigwedge x \phi(x)\| = \bigwedge_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|$,
- g) $\|\bigvee x \phi(x)\| = \bigvee_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|$,
- h) $\|\bigwedge x \in \tau \phi(x)\| = \bigwedge_{\sigma \in \text{Dom}(\tau)} (\|\sigma \in \tau\| \rightarrow \|\phi(\sigma)\|)$,
- i) $\|\bigvee x \in \tau \phi(x)\| = \bigvee_{\sigma \in \text{Dom}(\tau)} (\|\sigma \in \tau\| \wedge \|\phi(\sigma)\|)$.

DEMOSTRACIÓN: En virtud del teorema de reflexión 1.27, para demostrar que $\|\neg\phi\| = \|\phi\|'$ basta probar que se cumple en todo modelo transitivo numerable M de ZF. Fijamos, pues un álgebra de Boole completa^M $\mathbb{B} \in M$ y nombres en $M^{\mathbb{B}}$ correspondientes a las variables libres de ϕ .

Sea G un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M tal que $\|\phi\|' \in G$. Entonces $\|\phi\| \notin G$, luego $\neg\phi^{M[G]}$. Esto prueba que $\|\phi\|' \Vdash \neg\phi$, luego $\|\phi\|' \leq \|\neg\phi\|$. Por otra parte, como $\|\phi\| \Vdash \phi$ y $\|\neg\phi\| \Vdash \neg\phi$, ha de ser $\|\phi\| \wedge \|\neg\phi\| = \mathbb{0}$, luego $\|\neg\phi\| \leq \|\phi\|'$ y tenemos la igualdad.

Como $\|\phi \wedge \psi\| \Vdash \phi \wedge \psi$, también $\|\phi \wedge \psi\| \Vdash \phi$ y $\|\phi \wedge \psi\| \Vdash \psi$. Por lo tanto $\|\phi \wedge \psi\| \leq \|\phi\|$ y $\|\phi \wedge \psi\| \leq \|\psi\|$ y así $\|\phi \wedge \psi\| \leq \|\phi\| \wedge \|\psi\|$. Por otro lado es claro que $\|\phi\| \wedge \|\psi\| \Vdash \phi \wedge \psi$, luego $\|\phi\| \wedge \|\psi\| \leq \|\phi \wedge \psi\|$ y tenemos la igualdad.

Las igualdades c), d) y e) se deducen formalmente de a) y b). Sólo hay que tener presente que si dos fórmulas son equivalentes en ZF entonces tienen claramente el mismo valor en \mathbb{B} .

Es claro que $\|\bigwedge x \phi(x)\| \Vdash \phi(\sigma)$ para todo $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$, luego $\|\bigwedge x \phi(x)\| \leq \|\phi(\sigma)\|$ y, por lo tanto, $\|\bigwedge x \phi(x)\| \leq \bigwedge_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|$.

Si la desigualdad fuera estricta existiría una condición $p \leq \bigwedge_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|$ no nula y tal que $p \wedge \|\bigwedge x \phi(x)\| = \mathbb{0}$, pero entonces $p \leq \|\bigwedge x \phi(x)\|' = \|\bigvee x \neg\phi(x)\|$. Por 4.29 i) existen $q \leq p$ ($q \neq \mathbb{0}$) y $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$ de manera que $q \Vdash \neg\phi(\sigma)$, o sea, $q \leq \|\neg\phi(\sigma)\| = \|\phi(\sigma)\|'$. Por lo tanto $p \leq \bigwedge_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\| \leq \|\phi(\sigma)\| \leq q'$, de donde $q \leq p \wedge p'$, contradicción.

$$\|\bigvee x \phi(x)\| = \|\bigwedge x \neg\phi(x)\|' = \left(\bigwedge_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|' \right)' = \bigvee_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|.$$

Las propiedades h) e i) se prueban como f) y g) pero usando 4.29 k) en lugar de 4.29 i). ■

De este modo, supuestos definidos los términos $\|\sigma \in \tau\|$ y $\|\sigma = \tau\|$, el teorema anterior puede usarse como definición de $\|\phi\|$ para fórmulas arbitrarias y la definición es la más natural posible. Respecto al valor de las fórmulas atómicas, de momento podemos decir lo siguiente:

Teorema 7.27 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa y $\sigma, \tau \in V^{\mathbb{B}}$. Entonces

$$\|\sigma = \tau\| = \bigwedge_{\pi \in \text{Dom}(\sigma)} (\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\|) \wedge \bigwedge_{\pi \in \text{Dom}(\tau)} (\|\pi \in \tau\| \rightarrow \|\pi \in \sigma\|),$$

$$\|\sigma \in \tau\| = \bigvee_{\pi \in \text{Dom}(\tau)} (\|\pi \in \tau\| \wedge \|\phi(\tau)\|).$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\|\sigma = \tau\| \leftrightarrow \bigwedge x \in \sigma x \in \tau \wedge \bigwedge x \in \tau x \in \sigma = \mathbf{1},$$

luego $\|\sigma = \tau\| = \|\bigwedge x \in \sigma x \in \tau \wedge \bigwedge x \in \tau x \in \sigma\|$. Ahora basta aplicar el teorema anterior. Para la segunda igualdad partimos de que

$$\|\sigma \in \tau\| \leftrightarrow \bigvee x \in \tau x = \sigma = \mathbf{1}$$

y razonamos del mismo modo. ■

A partir de aquí podríamos dar una definición recurrente alternativa de $\|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|$, pero ésta se simplificará considerablemente si primero nos restringimos a una clase de nombres más estructurada que $V^{\mathbb{B}}$.

Definición 7.28 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa y $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$. Diremos que σ es *hereditariamente unívoco* si es una función y todos los nombres de su dominio son hereditariamente unívocos.

Naturalmente, esta definición está justificada por el principio de \in -recursión. A cada \mathbb{B} -nombre σ podemos asociarle un \mathbb{B} -nombre hereditariamente unívoco σ^* tal que $\|\sigma = \sigma^*\| = \mathbf{1}$. En efecto, supuesto definido τ^* para los nombres $\tau \in \text{Dominio}(\sigma)$, definimos

$$D_{\sigma} = \{\tau^* \mid \tau \in \text{Dominio}(\sigma)\}$$

y entonces $\sigma^* : D_{\sigma} \rightarrow \mathbb{B}$ es la aplicación dada por

$$\sigma^*(\pi) = \bigvee \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \tau \in V^{\mathbb{B}} (\pi = \tau^* \wedge (\tau, p) \in \sigma)\}.$$

Equivalentemente, para construir σ^* empezamos reemplazando cada τ en el dominio de σ por τ^* y después sustituimos todos los pares (π, p) con la misma primera componente π por un único par cuya segunda componente sea el supremo de todas las condiciones p que aparecían en dichos pares.

No es difícil probar que, tal y como hemos dicho, $\|\sigma = \sigma^*\| = \mathbf{1}$, pero no vamos a hacerlo porque refinando la construcción podemos conseguir un nombre con una propiedad adicional. Si σ es un nombre hereditariamente unívoco y τ es un nombre en su dominio, resulta que sólo hay un par en σ con primera componente τ , y su segunda componente es $\sigma(\tau)$. Podría pensarse entonces que $\|\tau \in \sigma\| = \sigma(\tau)$, pero esto no es necesariamente cierto ya que, por ejemplo, podría haber otro nombre π en el dominio de σ tal que $\pi \neq \tau$ pero $\|\pi = \tau\| = \mathbf{1}$, y en tal caso $\|\tau \in \sigma\|$ dependería también del valor de $\sigma(\pi)$. Esto nos lleva a definir los nombres extensionales:

Definición 7.29 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa y $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$ un nombre hereditariamente unívoco. Diremos que σ es *extensional* si

$$\bigwedge \pi \tau \in \text{Dominio}(\sigma) (\sigma(\pi) \wedge \|\pi = \tau\| \leq \sigma(\tau)).$$

Diremos que σ es *hereditariamente extensional* si es extensional y todos los nombres de su dominio son hereditariamente extensionales.

Para nombres extensionales sí se cumple la relación sobre la que estábamos especulando y nos da la interpretación más natural de la noción de “nombre”: un \mathbb{B} -nombre (hereditariamente extensional) es una función σ que a cada nombre τ de su dominio le asigna la “probabilidad” de que el objeto nombrado por τ pertenezca al objeto nombrado por σ .

Teorema 7.30 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa, σ un \mathbb{B} -nombre extensional y $\tau \in \text{Dominio}(\sigma)$. Entonces $\|\tau \in \sigma\| = \sigma(\tau)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZF. Obviamente $\sigma(\tau) \leq \|\tau \in \sigma\|$. La desigualdad contraria equivale a $\sigma(\tau)' \leq \|\tau \notin \sigma\|$. Para probarla tomamos un ultrafiltro genérico G tal que $\sigma(\tau)' \in G$ y hemos de ver que $\tau_G \notin \sigma_G$. En caso contrario existiría un $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ tal que $\pi_G = \tau_G$ y $\sigma(\pi) \in G$. Ahora bien, la extensionalidad^M de σ nos da que $\sigma(\pi) \wedge \|\pi = \tau\| \leq \sigma(\tau)$. El miembro izquierdo está en G , luego también $\sigma(\tau) \in G$, contradicción. ■

Ahora modificamos la definición anterior de σ^* para conseguir un nombre que no sólo sea hereditariamente unívoco sino también hereditariamente extensional. Supuesto definido τ^* para todo τ de su dominio, consideramos

$$A_\sigma = \{\tau^* \mid \tau \in \text{Dominio}(\sigma)\}.$$

Definimos $\sigma^* : A_\sigma \rightarrow \mathbb{B}$ mediante

$$\sigma^*(\rho) = \bigvee \{\|\pi = \tau\| \wedge p \mid \pi, \tau \in \text{Dominio}(\sigma) \wedge \pi^* = \rho \wedge (\tau, p) \in \sigma\}.$$

Teorema Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa y $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$. Entonces σ^* es hereditariamente extensional y $\|\sigma = \sigma^*\| = \mathbf{1}$.

DEMOSTRACIÓN Lo probamos por \in -inducción sobre σ . Para ello lo suponemos cierto para los nombres de su dominio. Ciertamente, σ^* es hereditariamente unívoco. Hemos de ver que es extensional. Tomamos $\rho_1, \rho_2 \in \text{Dominio}(\sigma^*)$, de modo que $\rho_i = \pi_i^*$, con $\pi_i \in \text{Dominio}(\sigma)$.

Por hipótesis de inducción $\|\pi_i = \rho_i\| = \mathbf{1}$. Consideremos un par $(\tau, p) \in \sigma$ y un $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ tal que $\rho_1 = \pi^*$. También por hipótesis de inducción $\|\pi = \rho_1\| = \mathbf{1}$. Así:

$$\|\rho_1 = \rho_2\| \wedge \|\pi = \tau\| \wedge p \leq \|\pi_2 = \tau\| \wedge p \leq \sigma^*(\rho_2).$$

Tomando el supremo a la izquierda sobre todas las ternas (π, τ, p) obtenemos que

$$\|\rho_1 = \rho_2\| \wedge \sigma^*(\rho_1) \leq \sigma^*(\rho_2).$$

Esto prueba que σ^* es extensional y así, por hipótesis de inducción, es hereditariamente extensional.

Para probar que $\|\sigma^* = \sigma\|$ basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZF, es decir, podemos suponer que \mathbb{B} es un álgebra de Boole completa^M y $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$. Sea G un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M . Basta probar que $\sigma_G = \sigma_G^*$.

Si $x \in \sigma_G$, entonces $x = \pi_G$, con $(\pi, p) \in \sigma$, $p \in G$. Por hipótesis de inducción $\|\pi = \pi^*\| = \mathbf{1} \in G$, luego $x = \pi_G^*$. Además $p = \|\pi = \pi^*\| \wedge p \leq \sigma^*(\pi^*)$, luego $\sigma^*(\pi^*) \in G$. Por consiguiente $x = \pi_G^* \in \sigma_G^*$.

Supongamos ahora que $x \in \sigma_G^*$. Entonces $x = \pi_G^*$, con $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ y $\sigma^*(\pi^*) \in G$. Por hipótesis de inducción $x = \pi_G$. Basta probar que $\|\pi \in \sigma\| \in G$.

Por reducción al absurdo, supongamos que $\|\pi \in \sigma\| \notin G$. Como G es un ultrafiltro, esto implica que $\|\pi \in \sigma\|' \in G$. Entonces $\|\pi \in \sigma\|' \wedge \sigma^*(\pi^*) \in G$, luego $\|\pi \in \sigma\|' \wedge \sigma^*(\pi^*) \neq \mathbf{0}$.

Por la definición de $\sigma^*(\pi^*)$, existen π', τ, p tales que

$$\|\pi \in \sigma\|' \wedge \|\pi' = \tau\| \wedge p \neq \mathbf{0}, \quad \pi \in \text{Dominio}(\sigma), \quad \pi'^* = \pi^*, \quad (\tau, p) \in \sigma.$$

Pero la última condición implica que $p \leq \|\tau \in \sigma\|$ y por hipótesis de inducción $\|\pi'^* = \pi^*\| = \mathbf{1}$, $\|\pi^* = \pi\| = \mathbf{1}$, luego $\|\pi = \pi'\| = \mathbf{1}$. Por consiguiente,

$$\mathbf{0} \neq \|\pi \in \sigma\|' \wedge \|\pi' = \tau\| \wedge p \leq \|\pi \in \sigma\|' \wedge \|\pi \in \sigma\| = \mathbf{0},$$

contradicción. ■

Todavía podemos conseguir nombres mejores. La igualdad $\|\tau \in \sigma\| = \sigma(\tau)$ sólo tiene sentido para nombres en el dominio de σ , mientras que, para otros nombres, el valor $\|\tau \in \sigma\|$ tiene que calcularse comparando τ con los nombres del dominio de σ (ver el teorema 7.27). Lo ideal sería que el dominio de un nombre fuese la clase de todos los \mathbb{B} -nombres, pero eso es imposible porque no es un conjunto. Recordemos que hemos convenido en admitir que un nombre tome el valor $\mathbf{0}$. Esto nos permite extender trivialmente el dominio de un nombre (asignando ceros a los nombres añadidos). Con ello podemos restringirnos a nombres cuyos dominios formen una sucesión transfinita definida de forma natural:

Definición 7.31 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa. Definimos

$$\begin{aligned} V_0^{\mathbb{B}} &= \emptyset, \\ V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} &= \{\sigma \in \mathbb{B}^{(V_\alpha^{\mathbb{B}})} \mid \sigma \text{ es un nombre extensional}\}, \\ V_\lambda^{\mathbb{B}} &= \bigcup_{\delta < \lambda} V_\delta^{\mathbb{B}}, \\ V^{\mathbb{B}} &= \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha^{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

La clase $V^{\mathbb{B}}$ que acabamos de definir no es, ciertamente, la clase de todos los \mathbb{B} -nombres, pero la llamamos así porque trabajando con un álgebra de Boole completa no es necesario considerar más nombres que los de (esta) $V^{\mathbb{B}}$. En efecto, para cada \mathbb{B} -nombre hereditariamente extensional σ podemos definir un $\sigma' \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $\|\sigma = \sigma'\| = \mathbf{1}$. En efecto, supuesto definido τ' para los nombres τ en el dominio de σ , consideramos el mínimo ordinal α tal que

$$\bigwedge \tau \in \text{Dominio}(\sigma) \tau' \in V_{\alpha}^{\mathbb{B}}$$

y definimos $\sigma' : V_{\alpha}^{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{B}$ mediante $\sigma'(\tau) = \|\tau \in \sigma\|$.

Notemos que σ' es extensional, pues si $\pi, \tau \in V_{\alpha}^{\mathbb{B}}$, se cumple que

$$\|\pi = \tau\| \wedge \sigma'(\pi) = \|\pi = \tau\| \wedge \|\pi \in \sigma\| \leq \|\tau \in \sigma\| = \sigma'(\tau).$$

Por consiguiente $\sigma' \in V^{\mathbb{B}}$.

Teorema 7.32 *Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa y σ un \mathbb{B} -nombre hereditariamente extensional. Entonces $\|\sigma = \sigma'\| = \mathbf{1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Probaremos la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable de ZF. Lo suponemos cierto para nombres en el dominio de σ . Sea G un ultrafiltro genérico. Si $x \in \sigma_G$, entonces $x = \pi_G$, para cierto nombre $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$. Por hipótesis de inducción $\|\pi = \pi'\|$. Por definición $\pi' \in \text{Dominio}(\sigma')$ y $\sigma'(\pi') = \|\pi' \in \sigma\| = \|\pi \in \sigma\| \in G$, lo que significa que $x = \pi'_G \in \sigma'_G$.

Si $x \in \sigma'_G$ entonces $x = \pi_G$ para cierto $\pi \in \text{Dominio}(\sigma')$ tal que $\sigma'(\pi) \in G$, pero por definición $\sigma'(\pi) = \|\pi \in \sigma\|$, luego $x = \pi_G \in \sigma_G$.

Esto prueba que $\sigma_G = \sigma'_G$, luego $\|\sigma = \sigma'\| = \mathbf{1}$. ■

Observemos que si \mathbb{P} es un c.p.o., $\mathbb{B} = R(\mathbb{P})$ es su completión, e $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ es la inmersión densa, la aplicación $i' : V^{\mathbb{P}} \rightarrow V^{\mathbb{B}}$ dada por¹ $i'(\sigma) = i(\sigma)^{*}$ transforma \mathbb{P} -nombres en \mathbb{B} -nombres de modo que si $G_{\mathbb{P}}$ y $G_{\mathbb{B}}$ son filtros relacionados según el teorema 6.4, entonces $\sigma_{G_{\mathbb{P}}} = i'(\sigma)_{G_{\mathbb{B}}}$.

En lo sucesivo escribiremos i en lugar de i' . Es claro que si $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$, entonces, para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$,

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \text{ syss } p \leq \|\phi(i(\sigma_1), \dots, i(\sigma_n))\|.$$

En suma, al pasar de un c.p.o. \mathbb{P} a su completión \mathbb{B} podemos considerar únicamente \mathbb{B} -nombres según la definición 7.31. Notemos que si x es un conjunto entonces $\check{x} \notin V^{\mathbb{B}}$, pero podemos redefinir \check{x} como \check{x}^* .

Ejercicio: Dar una construcción explícita de \check{x} como elemento de $V^{\mathbb{B}}$.

Ejercicio: Probar que si \mathbb{B} es un álgebra de Boole completa y $f \in \text{Aut } \mathbb{B}$ entonces f induce una biyección $f : V^{\mathbb{B}} \rightarrow V^{\mathbb{B}}$, y si $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in V^{\mathbb{B}}$, para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ se cumple

$$f(\|\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\|) = \|\phi(f(\sigma_1), \dots, f(\sigma_n))\|.$$

¹Aquí hay que entender $V^{\mathbb{P}}$ en el sentido general para c.p.o.s y $V^{\mathbb{B}}$ en el sentido de 7.31.

Hemos definido el valor $\|\phi\|$ de una fórmula a partir de la relación \Vdash . Veamos ahora una definición alternativa que no requiere la compleja definición de \Vdash . En la definición siguiente supondremos conocida únicamente la definición de \mathbb{B} -nombre.

Definición 7.33 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa. Vamos a definir una sucesión transfinita creciente $V_\alpha^{\mathbb{B}}$ de conjuntos de \mathbb{B} -nombres junto con dos aplicaciones $\|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|$ definidas sobre $V_\alpha^{\mathbb{B}} \times V_\alpha^{\mathbb{B}}$ con valores en \mathbb{B} (tales que cada una extienda a las anteriores).

Partimos de $V_0^{\mathbb{B}} = \emptyset$.

Supuestos definidos $\{V_\delta^{\mathbb{B}}\}_{\delta < \lambda}$ junto con sus funciones booleanas correspondientes, definimos

$$V_\lambda^{\mathbb{B}} = \bigcup_{\delta < \lambda} V_\delta^{\mathbb{B}}.$$

Las funciones booleanas de $V_\lambda^{\mathbb{B}}$ son las extensiones de las correspondientes a los $V_\delta^{\mathbb{B}}$.

Supuesto definido $V_\alpha^{\mathbb{B}}$ con sus funciones correspondientes, definimos

$$V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} = V_\alpha^{\mathbb{B}} \cup \{\sigma \mid \sigma \text{ es un } \mathbb{B}\text{-nombre extensional}^2 \text{ y } \text{Dominio}(\sigma) = V_\alpha^{\mathbb{B}}\},$$

Para definir las funciones booleanas en $V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}}$ distinguimos cinco casos:

a) $\sigma \in V_\alpha^{\mathbb{B}}, \tau \notin V_\alpha^{\mathbb{B}}$.

1. $\|\sigma \in \tau\| = \tau(\sigma)$,
2. $\|\sigma = \tau\| = \bigwedge_{\pi \in \text{Dom}(\sigma)} (\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\|) \wedge \bigwedge_{\pi \in V_\alpha^{\mathbb{B}}} (\|\pi \in \tau\| \rightarrow \|\pi \in \sigma\|)$,
3. $\|\tau \in \sigma\| = \bigvee_{\pi \in \text{Dom}(\sigma)} (\|\pi = \tau\| \wedge \|\pi \in \sigma\|)$,

b) $\sigma \notin V_\alpha^{\mathbb{B}}, \tau \notin V_\alpha^{\mathbb{B}}$,

1. $\|\sigma = \tau\| = \bigwedge_{\pi \in V_\alpha^{\mathbb{B}}} (\|\pi \in \sigma\| \leftrightarrow \|\pi \in \tau\|)$,
2. $\|\sigma \in \tau\| = \bigvee_{\pi \in V_\alpha^{\mathbb{B}}} (\|\sigma = \pi\| \wedge \|\pi \in \tau\|)$.

En el caso a), definimos además $\|\tau = \sigma\| = \|\sigma = \tau\|$.

Es claro que las definiciones de $\|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|$ son absolutas para modelos transitivos de ZF. En el teorema siguiente tomamos como definición de ultrafiltro genérico la caracterización dada en el teorema 7.22 y suponemos conocida la definición de σ_G .

²Esto es correcto porque la definición de “extensional” únicamente requiere tener definido $\|\sigma = \tau\|$ sobre elementos de $V_\alpha^{\mathbb{B}}$.

Teorema 7.34 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZF , sea \mathbb{B} un álgebra de Boole completa^M y sean $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{B}} = (V^{\mathbb{B}})^M$. Sea G un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M . Entonces*

$$\|\sigma = \tau\| \in G \text{ sys } \sigma_G = \tau_G, \quad \|\sigma \in \tau\| \in G \text{ sys } \sigma_G \in \tau_G.$$

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre el mínimo ordinal β para el que se cumpla que $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{B}}$. Necesariamente $\beta = \alpha + 1$. Distinguiamos los cinco casos que hemos considerado en la definición anterior.

a 1) Si $\|\sigma \in \tau\| \in G$, entonces $\tau(\sigma) \in G$, luego claramente $\sigma_G \in \tau_G$.

Si $\sigma_G \in \tau_G$, entonces $\sigma_G = \pi_G$, con $\pi \in \text{Dominio}(\tau)$ y $\tau(\pi) \in G$. Por hipótesis de inducción $\|\sigma = \pi\| \in G$ y por extensionalidad,

$$\|\sigma = \pi\| \wedge \tau(\pi) \leq \tau(\sigma) = \|\sigma \in \tau\| \in G,$$

a 2) Si $\|\sigma = \tau\| \in G$ y $x \in \sigma_G$, entonces $x = \pi_G$, para un $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ y $\sigma(\pi) \in G$. Claramente entonces, $\|\pi \in \sigma\| \in G$. Por definición de $\|\sigma = \tau\|$, tenemos que $\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\| \in G$, luego $\|\pi \in \tau\| \in G$. Por el caso anterior, esto implica que $x = \pi_G \in \tau_G$, luego $\sigma_G \subset \tau_G$. Igualmente se prueba la otra inclusión, con lo que $\sigma_G = \tau_G$.

Recíprocamente, si $\sigma_G = \tau_G$, vamos a probar que, para todo $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$, se cumple $\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\| \in G$, para lo cual suponemos que $\|\pi \in \sigma\| \in G$ y hemos de probar que $\|\pi \in \tau\| \in G$.

Por el caso anterior $\pi_G \in \sigma_G = \tau_G$, luego, de nuevo por el caso anterior, $\|\pi \in \tau\| \in G$.

Como G es un ultrafiltro genérico y el conjunto de las condiciones de la forma $\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\|$, con $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ está contenido en G , concluimos que

$$\bigwedge_{\pi \in \text{Dom}(\sigma)} (\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\|) \in G.$$

Similarmente se prueba que

$$\bigwedge_{\pi \in V_{\alpha}^{\mathbb{B}}} (\|\pi \in \tau\| \rightarrow \|\pi \in \sigma\|) \in G,$$

con lo que $\|\sigma = \tau\| \in G$.

a 3) Del hecho de que G es un ultrafiltro genérico se sigue fácilmente que $\|\tau \in \sigma\| \in G$ si y sólo si existe $\pi \in \text{Dominio}(\sigma)$ tal que $\|\pi = \tau\| \wedge \|\pi \in \sigma\| \in G$. Por el caso anterior y por hipótesis de inducción, esto equivale $\tau_G = \pi_G \in \sigma_G$.

Los casos b 1) y b 2) se razonan análogamente. ■

A partir de aquí podemos tomar como definición $\|\phi\|$ el teorema 7.26 y es muy fácil dar una prueba natural del teorema fundamental de la teoría de extensiones en su versión 7.25.

Quizá el lector se pregunte si no hubiera sido mejor olvidarse de los c.p.o.s arbitrarios y haber desarrollado toda la teoría de extensiones en términos únicamente de álgebras de Boole completas. La realidad es que, si bien algunos conceptos de la teoría de extensiones sólo se entienden adecuadamente cuando se conoce la versión en términos de álgebras de Boole (como es el caso de la relación \Vdash), también hay otros que se entienden mejor en términos de c.p.o.s arbitrarios. Por ejemplo, el producto cartesiano $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ de álgebras de Boole completas tiene estructura natural de álgebra de Boole, pero no es completa en general, por lo que se suele definir $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ como la completación del producto cartesiano. Así, el tratamiento de las extensiones genéricas con productos de álgebras completas se entiende mejor si se comprende que en realidad todo depende del producto cartesiano (conjuntista) de las álgebras, que es un c.p.o. denso en el producto cartesiano algebraico.

En resumen, hay muchas razones por las cuales es conveniente conocer el aspecto de la teoría en términos de álgebras de Boole, pero también la posibilidad de trabajar con c.p.o.s arbitrarios. Naturalmente un enfoque alternativo es iniciar la teoría en términos de álgebras de Boole para después generalizar a c.p.o.s arbitrarios (definiendo \Vdash en términos de $\| \parallel$).

Terminamos la sección probando un teorema importante sobre la teoría general de extensiones en el que el uso de álgebras de Boole simplifica notablemente la demostración.

Teorema 7.35 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $A \in M[G]$ tal que $A \subset M$. Entonces existe un modelo transitivo numerable de ZFC al que llamaremos $M[A]$ tal que $M \subset M[A] \subset M[G]$, $\Omega^M = \Omega^{M[A]}$ y que está caracterizado por que si N es un modelo transitivo de ZF tal que $M \subset N$ y $A \in N$ entonces $M[A] \subset N$.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que \mathbb{P} es un álgebra de Boole completa^M \mathbb{B} . Sea $A = \sigma_G$, con $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$. Sea $C \in M$ tal que $A \subset C$ (basta tomar $C = V_\alpha \cap M$, donde $\alpha = \text{rang } A$). Sea $X = \{\|\check{c} \in \sigma\| \mid c \in C\} \in M$ y llamemos $\mathbb{C} \in M$ a la subálgebra completa generada^M por X en \mathbb{B} . Entonces \mathbb{C} está completamente contenida^M en \mathbb{B} , luego $H = G \cap \mathbb{C}$ es un ultrafiltro \mathbb{C} -genérico sobre M (teorema 6.3). Se cumple que

$$G \cap X = G \cap \mathbb{C} \cap X = H \cap X \in M[H],$$

luego

$$A = \{c \in C \mid \|\check{c} \in \sigma\| \in G \cap X\} \in M[H].$$

Vamos a comprobar que definiendo $M[A] = M[H]$ se cumple lo pedido. Sea, pues, N un modelo transitivo de ZF tal que $M \subset N$ y $A \in N$. Sólo tenemos que probar que $H \in N$, pues entonces $M[H] \subset N$. En principio tenemos que

$$H \cap X = G \cap X = \{\|\check{c} \in \sigma\| \mid c \in A\} \in N.$$

Llamemos $\kappa = (|\mathbb{C}|^+)^M$. Definimos una sucesión $\{X_\alpha\}_{\alpha \leq \kappa} \in M$ mediante

$$X_0 = X \wedge \bigwedge \alpha < \kappa X_{\alpha+1} = \{\bigvee Z \mid Z \subset X_\alpha \cup X'_\alpha\}^M \wedge \bigwedge \lambda \leq \kappa X_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} X_\delta.$$

Notemos que si $\alpha < \kappa$ entonces $X_\alpha \cup X'_\alpha \subset X_{\alpha+1}$, pues si $a \in X_\alpha \cup X'_\alpha$ basta tomar $Z = \{a\} \in M$, de modo que $\bigvee Z = a$. Si $Z \in M$ cumple $Z \subset X_\kappa$ entonces $|Z|^M < \kappa$, luego existe un $\alpha < \kappa$ tal que $Z \subset X_\alpha$, con lo que $\bigvee Z \in X_{\alpha+1} \subset X_\kappa$. También es obvio que si $a \in X_\kappa$ entonces $a' \in X_\kappa$, luego $X_\kappa \in M$ es una subálgebra completa^M de \mathbb{C} y contiene a X , por lo que $X_\kappa = \mathbb{C}$.

Definimos ahora una sucesión $\{H_\alpha\}_{\alpha \leq \kappa} \in N$. Partimos de $H_0 = H \cap X$, que ya hemos visto que está en N . Si $\alpha < \kappa$ definimos

$$H_{\alpha+1} = \{\bigvee Z \mid Z \in M \wedge Z \subset X_\alpha \cup X'_\alpha \wedge Z \cap (H_\alpha \cup (X_\alpha \setminus H_\alpha)') \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $Z \in M$ puede sustituirse por $Z \in (\mathcal{P}\mathbb{C})^M \in M \subset N$. Así es fácil ver que $H_{\alpha+1} \in N$.

Finalmente, si $\lambda \leq \kappa$ definimos $H_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} H_\delta$. Es claro que toda la construcción es la relativización a N de una definición recurrente, luego la sucesión $\{H_\alpha\}_{\alpha \leq \kappa}$ está en N , como habíamos afirmado. Vamos a probar por inducción que $H_\alpha = H \cap X_\alpha$, con lo que $H = H_\kappa \in N$ y el teorema quedará probado.

Ciertamente se cumple para $\alpha = 0$ y si vale para todo $\delta < \lambda$ también vale para λ . Supongamos que $H_\alpha = H \cap X_\alpha$ y veámoslo para $\alpha + 1$. Como H es un ultrafiltro, se cumple que $H_\alpha \cup (X_\alpha \setminus H_\alpha)' = H \cap (X_\alpha \cup X'_\alpha)$. En consecuencia todo elemento de $H_{\alpha+1}$ está por encima de un elemento de H , luego está en H . Claramente entonces $H_{\alpha+1} \subset H \cap X_{\alpha+1}$.

Todo elemento de $H \cap X_{\alpha+1}$ es de la forma $\bigvee Z$, donde $Z \in M$, $Z \subset X_\alpha \cup X'_\alpha$. Basta probar que $Z \cap (H_\alpha \cup (X_\alpha \setminus H_\alpha)') \neq \emptyset$, pero es que si se diera el caso contrario entonces $Z \cap H = \emptyset$, luego $Z' \subset H$ y como H es \mathbb{C} -genérico sobre M también $\bigwedge Z' \in H$, luego $\bigvee Z \notin H$, contradicción. ■

En general, si M es un modelo transitivo de ZFC y $A \subset M$, no tiene por qué existir un mínimo modelo N de ZFC tal que $M \subset N$ y $A \in N$. El teorema anterior nos dice que una condición suficiente para que esto ocurra es que A pertenezca a una extensión genérica de M . Conviene observar que entonces $M[A]$ es también una extensión genérica. Otro hecho elemental es que si $A = G$, entonces $M[A]$ en el sentido del teorema anterior es $M[G]$, por lo que la notación es consistente.

7.4 Álgebras cociente

Dedicamos las dos últimas secciones de este capítulo a exponer algunos resultados adicionales que no nos han hecho falta, pero que son poco menos que imprescindibles para trabajar con álgebras de Boole. En esta sección definiremos y estudiaremos el cociente de un álgebra de Boole respecto a un filtro.

Tras la definición 7.17 hemos dejado como ejercicio comprobar que un álgebra de Boole \mathbb{B} es un anillo conmutativo y unitario con la suma definida por

$$p + q = (p \wedge q') \vee (q \wedge p') = (p \vee q) \wedge (p \wedge q)' \quad (7.1)$$

y el producto \wedge . Los elementos neutros son $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ y además se cumple que $p + p = \mathbf{0}$ para todo $p \in \mathbb{B}$. Equivalentemente, $p = -p$. Además I es un ideal de \mathbb{B} en el sentido de la teoría de anillos. Esto nos permite hablar del anillo cociente de un álgebra respecto de un ideal (o, por conveniencia, respecto de un filtro):

Definición 7.36 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole y sean I, F un ideal y un filtro en \mathbb{B} duales entre sí. Definimos el \mathbb{B} la *congruencia módulo I* (o *módulo F*) en \mathbb{B} como la relación de equivalencia dada por

$$p R q \text{ syss } p + q \in I \text{ syss } (p \leftrightarrow q) \in F.$$

(notemos que $p + q \in I$ equivale en este contexto a $p - q \in I$, que es la definición usual de congruencia en teoría de anillos.)

Llamaremos $\mathbb{B}/I = \mathbb{B}/F$ al conjunto cociente respecto a esta relación. El próximo teorema, cuya prueba es inmediata, muestra que tiene una estructura natural de álgebra de Boole, y se le llama *álgebra cociente* de \mathbb{B} determinada por I o por F .

Teorema 7.37 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole y sean I, F un ideal y un filtro en \mathbb{B} duales entre sí. Entonces:

- a) Si $p \in \mathbb{B}$, entonces la clase de congruencia de p es $[p] = \{p + i \mid i \in I\}$.
- b) $\mathbb{B}/I = \mathbb{B}/F$ es un álgebra de Boole con las operaciones dadas por

$$[p] \wedge [q] = [p \wedge q], \quad [p] \vee [q] = [p \vee q], \quad [p]' = [p'].$$

- c) La aplicación $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}/I$ dada por $f(p) = [p]$ es un epimorfismo de álgebras al que llamaremos epimorfismo canónico del cociente.

Ejercicio: Probar que si $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ es un epimorfismo de álgebras de Boole entonces $I = f^{-1}[\{\mathbf{0}\}]$ y $F = f^{-1}[\{\mathbf{1}\}]$ son un ideal y un filtro de \mathbb{B} duales entre sí (I es el *núcleo* de f). Probar que la aplicación $\bar{f} : \mathbb{B}/I \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\bar{f}([p]) = f(p)$ es un isomorfismo de álgebras (teorema de isomorfía).

Ejercicio: Sea $\mathbb{B}(\text{ZF})$ el álgebra de Lindenbaum de ZF y $([\text{AE}])$ el ideal generado por la clase del axioma de elección. Probar que $\mathbb{B}(\text{ZF})/([\text{AE}]) \cong \mathbb{B}(\text{ZFC})$.

Ejercicio: Sea κ un cardinal de cofinalidad $\mu > \aleph_0$. Sean $\text{cna}(\kappa)$ el filtro de $\mathcal{P}\kappa$ generado por los conjuntos cerrados no acotados en κ y $\text{cna}(\mu)$ el correspondiente filtro en $\mathcal{P}\mu$. Probar que $\mathcal{P}\kappa/\text{cna}(\kappa) \cong \mathcal{P}\mu/\text{cna}(\mu)$.

Vamos a dar un criterio útil para establecer la completitud de un álgebra cociente. Nos basaremos en un criterio general para álgebras cualesquiera:

Definición 7.38 Si κ es un cardinal infinito, diremos que un álgebra de Boole \mathbb{B} es κ -*completa* si todo subconjunto de \mathbb{B} de cardinal menor que κ tiene supremo (o, equivalentemente, ínfimo).

Teorema 7.39 *Si \mathbb{B} es un álgebra de Boole κ -completa y cumple la condición de cadena κ entonces \mathbb{B} es completa.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $X \subset \mathbb{B}$ y veamos que X tiene supremo. Sea $Y = \{p \in \mathbb{B} \mid \forall q \in X \ p \leq q\}$. Sea A una anticadena maximal en Y . Claramente también es una anticadena en \mathbb{B} , luego por hipótesis $|A| < \kappa$ y existe $\bigvee A$. Veamos que este supremo es también el supremo de X .

Si $p \in X \subset Y$ pero $p \not\leq \bigvee A$, entonces $\mathbb{0} \neq p \wedge (\bigvee A)' \leq p$, de donde concluimos que $p \wedge (\bigvee A)' \in Y$ y es incompatible con todos los elementos de A . Esto permite extender A a una anticadena mayor, en contradicción con su maximalidad. Así pues, $\bigvee A$ es una cota superior de X .

Si t es una cota superior de X , también lo es de Y , luego de A , luego $\bigvee A \leq t$. Esto prueba que $\bigvee A$ es la menor cota superior de X . ■

Ahora daremos condiciones para que un cociente satisfaga las hipótesis de este teorema. En primer lugar nos ocupamos de la completitud:

Definición 7.40 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole, sean I, F un ideal y un filtro en \mathbb{B} , respectivamente, y sea κ un cardinal infinito.

I es κ -completo si todo subconjunto de I de cardinal menor que κ tiene supremo y éste pertenece a I .

F es κ -completo si todo subconjunto de F de cardinal menor que κ tiene ínfimo y éste pertenece a F .

Obviamente un ideal es κ -completo si y sólo si lo es su filtro dual, y viceversa.

Teorema 7.41 *Sea κ un cardinal infinito, \mathbb{B} un álgebra de Boole κ -completa e I un ideal κ -completo de \mathbb{B} . Entonces el álgebra cociente \mathbb{B}/I es κ -completa. Además, para todo $X \subset \mathbb{B}$ tal que $|X| < \kappa$ se cumple*

$$\bigvee_{p \in X} [p] = \left[\bigvee_{p \in X} p \right].$$

DEMOSTRACIÓN: Todo subconjunto de \mathbb{B}/I de cardinal menor que κ es de la forma $Y = \{[p] \mid p \in X\}$, donde $X \subset \mathbb{B}$, $|X| < \kappa$. Claramente $\left[\bigvee_{p \in X} p \right]$ es una cota superior de Y .

Si $[q]$ es otra cota superior, entonces $[p] \leq [q]$ para todo $p \in X$, es decir, $p \wedge q' \in I$. Por la completitud de I concluimos que

$$\left(\bigvee_{p \in X} p \right) \wedge q' = \bigvee_{p \in X} (p \wedge q') \in I,$$

luego $\left[\bigvee_{p \in X} p \right] \leq [q]$. Esto prueba que $\left[\bigvee_{p \in X} p \right]$ es el supremo de Y . ■

Consideramos ahora la condición de cadena κ :

Definición 7.42 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole, I un ideal de \mathbb{B} y κ un cardinal infinito. Diremos que I cumple la *condición de cadena* κ o que es κ -saturado si toda anticadena en $\mathbb{B} \setminus I$ tiene cardinal menor que κ .

Teorema 7.43 Sea κ un cardinal infinito, sea \mathbb{B} un álgebra de Boole κ completa e I un ideal κ -completo de \mathbb{B} . Entonces I cumple la c.c. κ si y sólo si el álgebra \mathbb{B}/I cumple la c.c. κ .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que I cumple la c.c. κ y sea $\{[p_\alpha]\}_{\alpha < \kappa}$ una anticadena en \mathbb{B}/I , donde las clases son distintas dos a dos. Podemos suponer además que $\bigwedge_{\alpha < \kappa} p_\alpha \notin I$. Así, si $\alpha < \beta < \kappa$ entonces $p_\alpha \wedge p_\beta \in I$. Definimos

$$q_\beta = p_\beta \wedge \bigwedge_{\alpha < \beta} p'_\alpha.$$

Así, si $\alpha < \beta < \kappa$ tenemos que $q_\alpha \wedge q_\beta \leq p_\alpha \wedge p'_\alpha = \mathbb{0}$, luego $\{q_\beta\}_{\beta < \kappa}$ es una anticadena en \mathbb{B} . Hemos de probar que está, de hecho, en $\mathbb{B} \setminus I$.

Notemos que si $\alpha < \beta$ entonces $p_\beta \wedge p_\alpha \in I$, luego por la completitud de I resulta que $p_\beta \wedge \bigvee_{\alpha < \beta} p_\alpha \in I$.

Si $q_\beta \in I$ entonces $p_\beta = (p_\beta \wedge \bigwedge_{\alpha < \beta} p'_\alpha) \vee (p_\beta \wedge \bigvee_{\alpha < \beta} p_\alpha) \in I$, contradicción, luego ciertamente tenemos una anticadena en $\mathbb{B} \setminus I$, lo que a su vez contradice la saturación de I . El recíproco es evidente. ■

Ejercicio: Sea κ un cardinal regular no numerable y sea $\text{cna}(\kappa)$ el filtro en $\mathcal{P}\kappa$ generado por los subconjuntos cerrados no acotados. Probar que $\text{cna}(\kappa)$ no es κ^+ completo, pero que el álgebra $\mathcal{P}\kappa/\text{cna}(\kappa)$ sí lo es. De hecho es completa.

Ejercicio: Sea \mathbb{B} el álgebra de los subconjuntos de Borel de la recta real y sea I el ideal de los conjuntos nulos para la medida de Lebesgue. Probar que el álgebra cociente \mathbb{B}/I es completa.

7.5 Espacios de Stone

Vamos a probar que toda álgebra de Boole es isomorfa a un álgebra de conjuntos. La prueba nos llevará a estudiar una importante relación entre las álgebras de Boole y los espacios topológicos compactos cero-dimensionales.³

Definición 7.44 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole. Llamaremos $S(\mathbb{B})$ al conjunto de todos los ultrafiltros de \mathbb{B} . Para cada $p \in \mathbb{B}$ definimos

$$C_p = \{x \in S(\mathbb{B}) \mid p \in x\}, \quad \tilde{\mathbb{B}} = \{C_p \mid p \in \mathbb{B}\}.$$

Teorema 7.45 (Teorema de representación de Stone) Si \mathbb{B} es un álgebra de Boole, entonces $\tilde{\mathbb{B}}$ es un álgebra de conjuntos sobre $S(\mathbb{B})$ y la aplicación $h : \mathbb{B} \rightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ dada por $h(p) = C_p$ es un isomorfismo de álgebras.

³Recordemos que un espacio topológico compacto es *cero-dimensional* si tiene una base formada por abiertos-cerrados.

DEMOSTRACIÓN: Dados $p, q \in \mathbb{B}$, se cumple que

$$x \in C_p \cap C_q \text{ syss } p \in x \wedge q \in x \text{ syss } p \wedge q \in x \text{ syss } x \in C_{p \wedge q}.$$

Así pues, $C_{p \wedge q} = C_p \cap C_q$. Por otra parte,

$$x \in S(\mathbb{B}) \setminus C_p \text{ syss } p \notin x \text{ syss } p' \in x \text{ syss } x \in C_{p'},$$

luego $C_{p'} = S(\mathbb{B}) \setminus C_p$.

Esto prueba que $\tilde{\mathbb{B}}$ es un álgebra de conjuntos y que $h : \mathbb{B} \longrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ es un epimorfismo de álgebras. Para probar que es inyectivo basta ver que su núcleo es trivial. Si $p \in \mathbb{B}$ cumple $h(p) = \mathbb{0}$, entonces $C_p = \emptyset$, con lo que p no pertenece a ningún ultrafiltro de \mathbb{B} , pero todo elemento no nulo de un álgebra genera un filtro que, a su vez, está contenido en un ultrafiltro. Por consiguiente $p = \mathbb{0}$. ■

En virtud de este teorema, para probar un resultado algebraico (es decir, que se conserve por isomorfismos) sobre álgebras de Boole es suficiente probarlo para álgebras de conjuntos. Esto simplifica a menudo las demostraciones.

Veamos ahora que el teorema de Stone se puede refinar notablemente:

Definición 7.46 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole. Entonces, por ser un álgebra de conjuntos, $\tilde{\mathbb{B}}$ es la base de una topología sobre $S(\mathbb{B})$. Llamaremos *espacio de Stone* del álgebra \mathbb{B} al espacio $S(\mathbb{B})$ con la topología generada por $\tilde{\mathbb{B}}$.

Teorema 7.47 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole. Entonces $S(\mathbb{B})$ es un espacio compacto cero-dimensional y \tilde{B} es su álgebra de abiertos-cerrados. Por consiguiente, el teorema de representación de Stone afirma que toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de abiertos-cerrados de su espacio de Stone.

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in S(\mathbb{B})$, $x \neq y$. Entonces existe un $p \in x$ tal que $p \notin y$, luego $p \in x$, $p' \in y$, luego $x \in C_p \wedge y \in C_{p'}$, y ciertamente $C_p \cap C_{p'} = \emptyset$, luego C_p y $C_{p'}$ son entornos disjuntos de x e y . Esto prueba que $S(\mathbb{B})$ es un espacio de Hausdorff.

Sea $\{G_j\}_{j \in J}$ un cubrimiento abierto de $S(\mathbb{B})$. Para cada $x \in S(\mathbb{B})$, tomemos $j_x \in J$ y $p_x \in \mathbb{B}$ tales que $x \in C_{p_x} \subset G_{j_x}$. Si $\{G_j\}_{j \in J}$ no admitiera subcubrimientos finitos, tampoco los admitiría el cubrimiento $\{C_{p_x}\}$. Por consiguiente, dados $x_1, \dots, x_n \in S(\mathbb{B})$, se cumpliría que $C_{p_{x_1}} \cup \dots \cup C_{p_{x_n}} \neq S(\mathbb{B}) = C_{\mathbb{1}}$, es decir, $p_{x_1} \vee \dots \vee p_{x_n} \neq \mathbb{1}$ y así $p'_{x_1} \wedge \dots \wedge p'_{x_n} \neq \mathbb{0}$.

Esto significa que la familia $\{p'_x\}$ genera un filtro en \mathbb{B} , que a su vez está contenido en un ultrafiltro $y \in S(\mathbb{B})$.

Para todo $x \in S(\mathbb{B})$ tenemos que $p'_x \in y$, luego $y \in C_{p'_x}$ y así $y \notin C_{p_x}$. Esto contradice que $\{C_{p_x}\}$ sea un cubrimiento.

Hemos probado que $S(\mathbb{B})$ es compacto. Claramente los elementos de \tilde{B} son abiertos-cerrados en $S(\mathbb{B})$. De hecho son todos los abiertos-cerrados, pues cualquiera de ellos entonces es unión de abiertos de $S(\mathbb{B})$, pero por compacidad es unión de un número finito de ellos, luego está en $\tilde{\mathbb{B}}$. ■

Los teoremas siguientes demuestran que hay una correspondencia natural entre las álgebras de Boole y los espacios compactos cero-dimensionales.

Teorema 7.48 *Sea K un espacio compacto cero-dimensional y sea \mathbb{B} su álgebra de abiertos-cerrados. Entonces K es homeomorfo a $S(\mathbb{B})$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : K \rightarrow S(\mathbb{B})$ dada por $f(x) = \{C \in \mathbb{B} \mid x \in C\}$. Claramente $f(x)$ es un ultrafiltro en \mathbb{B} y f es suprayectiva, pues si $p \in S(\mathbb{B})$ entonces p es una familia de cerrados en K con la propiedad de la intersección finita, luego existe un $x \in K$ que pertenece a todos los elementos de p , es decir, tal que $p \subset f(x)$. Por la maximalidad de p ha de ser $f(x) = p$.

Si x, y son puntos distintos en K , entonces existe un $C \in \mathbb{B}$ tal que $x \in C$, $y \notin C$, luego $C \in f(x) \setminus f(y)$, lo que prueba que f es inyectiva.

Es fácil ver que para todo $A \in \mathbb{B}$ se cumple $f^{-1}[A] = A$, lo que prueba que f es continua y, por compacidad, un homeomorfismo. ■

Teorema 7.49 *Sea $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras de Boole. Entonces la aplicación $f^* : S(\mathbb{C}) \rightarrow S(\mathbb{B})$ dada por $f^*(x) = \{p \in \mathbb{B} \mid f(p) \in x\}$ es continua. Además f es inyectiva si y sólo si f^* es suprayectiva y f es suprayectiva si y sólo si f^* es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato comprobar que $f^*(x) \in S(\mathbb{B})$. Además $(f^*)^{-1}[C_p] = C_{f(p)}$, luego f^* es continua.

Si f es inyectiva e $y \in S(\mathbb{B})$, es fácil ver que $\{f(p) \mid p \in y\}$ tiene la propiedad de la intersección finita en \mathbb{C} , luego está contenido en un ultrafiltro $x \in S(\mathbb{C})$. Es fácil comprobar así mismo que $f^*(x) = y$.

Si f^* es suprayectiva y $p \in \mathbb{B}$ es no nulo, entonces p está contenido en un ultrafiltro $y \in S(\mathbb{B})$, que tendrá una antiimagen $x \in S(\mathbb{C})$. Así $p \in y = f^*(x)$, luego $f(p) \in x$, luego $f(p) \neq \emptyset$. Así pues, f es inyectiva.

Si f es suprayectiva y $f^*(x) = f^*(y)$, para ciertos $x, y \in S(\mathbb{C})$, entonces para todo $p \in \mathbb{B}$ se cumple $f(p) \in x$ si y sólo si $f(p) \in y$, pero esto significa que $x = y$, luego f^* es inyectiva.

Si f^* es suprayectiva entonces es un homeomorfismo en la imagen, luego, dado $q \in \mathbb{C}$, se cumple que $f^*[C_q]$ es abierto en $f^*[S(\mathbb{C})]$, con lo que $f^*[C_q] = f^*[S(\mathbb{C})] \cap A$, donde A es un abierto en $S(\mathbb{B})$. Tenemos que A es unión de abiertos básicos de \mathbb{B} , los cuales forman un cubrimiento abierto del compacto $f^*[C_q]$, luego podemos extraer un subcubrimiento finito cuya unión es un abierto básico C_p tal que $f^*[C_q] \subset C_p \subset A$. Por consiguiente $f^*[C_q] = f^*[S(\mathbb{C})] \cap C_p$. Esto implica que $C_q = (f^*)^{-1}[C_p]$, luego

$$\bigwedge x \in S(\mathbb{C})(x \in C_q \leftrightarrow f^*(x) \in C_p),$$

luego

$$\bigwedge x \in S(\mathbb{C})(x \in C_q \leftrightarrow p \in f^*(x)),$$

luego

$$\bigwedge x \in S(\mathbb{C})(x \in C_q \leftrightarrow f(p) \in x),$$

luego

$$\bigwedge x \in S(\mathbb{C})(x \in C_q \leftrightarrow c \in C_{f(p)}),$$

y esto significa que $C_q = C_{f(p)}$, por lo que $f(p) = q$. Así pues, f es suprayectiva. ■

Teorema 7.50 Sean \mathbb{B} y \mathbb{C} dos álgebras de Boole y sea $f : S(\mathbb{B}) \rightarrow S(\mathbb{C})$ una aplicación continua. Entonces la aplicación $f^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ que a cada $q \in \mathbb{C}$ le asigna el único $p \in \mathbb{B}$ tal que $f^{-1}[C_q] = C_p$ es un homomorfismo de álgebras. Además $f^{**} = f$. Si $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de álgebras, también se cumple que $g^{**} = g$.

DEMOSTRACIÓN: No tiene ninguna dificultad probar que f^* es un homomorfismo. Si $x \in S(\mathbb{B})$, entonces

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \{q \in \mathbb{C} \mid f^*(q) \in x\} = \{q \in \mathbb{C} \mid x \in C_{f^*(q)}\} = \{q \in \mathbb{C} \mid x \in f^{-1}[C_q]\} \\ &= \{q \in \mathbb{C} \mid f(x) \in C_q\} = \{q \in \mathbb{C} \mid q \in f(x)\} = f(x). \end{aligned}$$

Si $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de álgebras y $p \in \mathbb{B}$, entonces $g^{**}(p) = q$ es equivalente a las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} (g^*)^{-1}[C_p] &= C_q \\ \bigwedge x \in S(\mathbb{C})(p \in g^*(x) \leftrightarrow q \in x) \\ \bigwedge x \in S(\mathbb{C})(g(p) \in x \leftrightarrow q \in x) \\ \bigwedge x \in S(\mathbb{C})(x \in C_{g(p)} \leftrightarrow x \in C_q), \\ C_{g(p)} &= C_q, \end{aligned}$$

luego $g^{**}(p) = q$ si y sólo si $g(p) = q$, es decir, $g^{**} = g$. ■

En definitiva, tenemos que a cada álgebra de Boole le corresponde un espacio compacto cero-dimensional (su espacio de Stone) y a cada espacio compacto cero-dimensional le corresponde un álgebra de Boole (su álgebra de abiertos-cerrados). Además los homomorfismos de álgebras se corresponden con las aplicaciones continuas, de modo que los isomorfismos se corresponden con los homeomorfismos. De este modo álgebras isomorfas tienen espacios de Stone homeomorfos y viceversa.

Existe una correspondencia biunívoca entre los filtros de un álgebra de Boole \mathbb{B} y los cerrados de su espacio de Stone. Concretamente, para cada filtro F , el epimorfismo canónico $p : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}/F$ se corresponde con una aplicación inyectiva y continua $p^* : S(\mathbb{B}/F) \rightarrow S(\mathbb{B})$ que determina el cerrado $C_F = p^*[S(\mathbb{B}/F)]$. Recíprocamente, si $C \subset S(\mathbb{B})$ es un cerrado, la inclusión $i : C \rightarrow S(\mathbb{B})$ se corresponde con un epimorfismo $i^* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$, donde \mathbb{C} es el álgebra de abiertos-cerrados de C . Entonces $F_C = (i^*)^{-1}[\{\mathbf{1}\}]$ es un filtro en \mathbb{B} y es fácil ver que estas dos correspondencias que hemos definido son mutuamente inversas.

Si \mathbb{B} es un álgebra de Boole y $p \in \mathbb{B}$, entonces p es un átomo si y sólo si no tiene extensiones no nulas, si y sólo si C_p no contiene estrictamente abiertos no

vacíos, si y sólo si $C_p = \{x\}$ para cierto $x \in S(\mathbb{B})$, que será un punto aislado. Recíprocamente, todo punto aislado determina un abierto básico de $S(\mathbb{B})$ que a su vez determina un átomo de \mathbb{B} . Es fácil ver que estas correspondencias son mutuamente inversas, de modo que existe una biyección entre los átomos de un álgebra de Boole y los puntos aislados de su espacio de Stone.

Un álgebra de Boole es atómica si y sólo si el conjunto de sus átomos es denso, lo cual equivale a que los puntos aislados en $S(\mathbb{B})$ sean un conjunto denso.

Ejercicio: Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole atómica y A el conjunto de sus átomos. Probar que la aplicación $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{P}A$ dada por $f(p) = \{q \in A \mid q \leq p\}$ es un monomorfismo denso. En particular si \mathbb{B} es completa es un isomorfismo, luego las únicas álgebras completas atómicas son, salvo isomorfismo, las álgebras $\mathcal{P}X$.

Ejercicio: Probar que toda álgebra de Boole finita es isomorfa a $\mathcal{P}n$, para cierto $n \in \omega$.

Teorema 7.51 *Un álgebra de Boole \mathbb{B} es completa si y sólo si su espacio de Stone es extremadamente desconexo, es decir, las clausuras de sus abiertos son abiertas.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que \mathbb{B} es completa y sea A un abierto en $S(\mathbb{B})$. Entonces A es unión de una familia X de abiertos-cerrados. Sea S el supremo de X en el álgebra de abiertos cerrados. Claramente $A \subset S$ y, como S es cerrado, $\text{cl} A \subset S$. El abierto $S \setminus \text{cl} A$ ha de ser vacío, o de lo contrario contendría un abierto-cerrado no vacío B , y entonces $S \setminus B$ sería una cota superior de X menor que S , lo cual es imposible. Por consiguiente $\text{cl} A = S$ es abierto.

Recíprocamente, si $S(\mathbb{B})$ es extremadamente desconexo y X es una familia de abiertos-cerrados en $S(\mathbb{B})$, es fácil ver que $\text{cl} \bigcup_{A \in X} A$ es el supremo de X . ■

Capítulo VIII

El problema de Suslin

En 1920 apareció la revista *Fundamenta Mathematicae*, en cuyo primer número M. Suslin formuló la conjetura que hoy se conoce como la hipótesis de Suslin (HS). Esta hipótesis resultó ser independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos. Concretamente, en 1968 S. Tennenbaum y T.J. Jech encontraron modelos donde falla la hipótesis de Suslin. Poco después R.B. Jensen demostró que $\neg HS$ se deduce del axioma de constructibilidad. Finalmente, en 1971 R.M. Solovay y S. Tennenbaum demostraron con una extensión genérica la consistencia de la hipótesis de Suslin.

La solución del problema de Suslin fue el siguiente gran éxito de la teoría de conjuntos después de zanjar el problema del continuo de Cantor y de la consistencia del axioma de elección. Cabe señalar que la respuesta al problema de Suslin no se obtuvo como mera aplicación de las técnicas desarrolladas para el problema de la hipótesis del continuo, sino que requirió nuevos resultados y dio lugar a nuevas ideas, que a su vez han sido útiles para abordar muchos otros problemas. De hecho, el planteamiento general de la teoría de extensiones genéricas que hemos expuesto en los capítulos anteriores dista mucho del enfoque original de Cohen y debe bastante al trabajo de Tennenbaum y muchos más.

Todo esto hace que si queremos alcanzar un buen conocimiento de las técnicas básicas de pruebas de consistencia conviene que conozcamos también el tratamiento del problema de Suslin.

8.1 La hipótesis de Suslin

Cantor había dado gran importancia a caracterizar los tipos de orden más importantes. Así, por ejemplo, es claro que un conjunto está ordenado como el conjunto de los números naturales si está bien ordenado y todos sus elementos distintos del mínimo tienen un inmediato anterior. La caracterización del orden de los números racionales viene dada por el teorema siguiente:

Teorema 8.1 *Un conjunto totalmente ordenado D es semejante al conjunto \mathbb{Q} de los números racionales si y sólo si cumple las propiedades siguientes:*

- a) D es numerable.
- b) D no tiene máximo ni mínimo.
- c) D es denso en sí mismo, es decir, entre cada par de sus elementos hay un tercero.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \omega\}$ y sea $D = \{d_n \mid n \in \omega\}$. Definimos $f : \mathbb{Q} \rightarrow D$ mediante el siguiente proceso recurrente: Hacemos $f(q_0) = d_0$ y si ya están definidos $f(q_0), \dots, f(q_n)$, definimos $f(q_{n+1}) = d_m$, donde m es el mínimo natural tal que q_m está respecto a $f(q_0), \dots, f(q_n)$ en la misma posición en que q_{n+1} está respecto a q_0, \dots, q_n . Las hipótesis b) y c) garantizan la existencia de m .

Claramente f así definida es inyectiva y conserva el orden. Sólo hay que probar que es suprayectiva. Supongamos que d_0, \dots, d_n tienen antiimagen $f(q_{i_k}) = d_k$. Sea r el máximo de i_1, \dots, i_k y sea s el mínimo natural tal que q_s está respecto a q_0, \dots, q_r en la misma posición que d_{n+1} respecto a $f(q_0), \dots, f(q_r)$. Entonces $f(q_s) = d_t$, donde t es el mínimo número natural tal que d_t está respecto a $f(q_0), \dots, f(q_{s-1})$ en la misma posición que q_s respecto a q_0, \dots, q_{s-1} , y ése es claramente $n + 1$, luego $f(q_s) = d_{n+1}$. ■

A partir de aquí, Cantor caracterizó el tipo de orden de los números reales:

Teorema 8.2 *Un conjunto totalmente ordenado X es semejante al conjunto \mathbb{R} de los números reales si y sólo si cumple las propiedades siguientes:*

- a) X es denso en sí mismo y no tiene máximo ni mínimo.
- b) X es completo, es decir, todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo.
- c) X es separable, es decir, tiene un subconjunto denso numerable (un subconjunto D tal que todo intervalo abierto no vacío de X corta a D).

DEMOSTRACIÓN: De a) y b) se sigue que el conjunto denso D ha de ser denso en sí mismo y no puede tener máximo ni mínimo. Por consiguiente el teorema anterior nos da una semejanza $f : \mathbb{Q} \rightarrow D$. Definimos $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow X$ mediante

$$\bar{f}(r) = \sup_X \{f(q) \mid q < r\}.$$

Es inmediato comprobar que \bar{f} está bien definida y extiende a f . Igualmente podemos definir $\overline{f^{-1}} : X \rightarrow \mathbb{R}$ y entonces $\bar{f} \circ \overline{f^{-1}}$ conserva el orden y es la identidad en \mathbb{Q} , de donde se sigue inmediatamente que es la identidad en \mathbb{R} . Similarmente $\overline{f^{-1}} \circ \bar{f}$ es la identidad en X , y por consiguiente \bar{f} es biyectiva. ■

La conjetura de Suslin era que en el teorema anterior es posible sustituir la condición c) por una condición claramente más débil, a saber:

c') X cumple la condición de cadena numerable, es decir, toda familia de intervalos en X disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable.

Es obvio que c) implica c').

Definición 8.3 Un conjunto totalmente ordenado X que cumpla a), b) y c') pero que no cumpla c) es una *recta de Suslin*. La *hipótesis de Suslin* es la sentencia

HS: *No existen rectas de Suslin.*

En realidad las propiedades a) y b) resultan ser irrelevantes:

Teorema 8.4 *Son equivalentes:*

- a) *Existe un conjunto totalmente ordenado con la condición de cadena numerable no separable.*
- b) *Existe un conjunto ordenado denso en sí mismo, sin extremos, con la condición de cadena numerable y en la que ningún intervalo es separable.*
- c) *Existe una recta de Suslin en la que ningún intervalo es separable.*
- d) *Existe una recta de Suslin.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que probar que a) implica b) y que b) implica c).

Sea Y un conjunto totalmente ordenado que cumpla b) y consideremos la relación en Y dada por $x \sim y$ si y sólo si el intervalo comprendido entre ellos, $]x, y[$ o $]y, x[$, es separable. (Consideramos que un intervalo finito o incluso vacío es separable.) Es inmediato comprobar que se trata de una relación de equivalencia. Llamamos X al conjunto cociente.

Veamos que si $[x] = [y] \in X$ y $x < z < y$, entonces $[x] = [z] = [y]$.

En efecto, tenemos que $]x, y[$ es separable, luego $]x, z[$ también lo es.

De aquí se sigue fácilmente que si $[x_1] = [x_2]$, $[y_1] = [y_2]$, entonces

$$x_1 < y_1 \leftrightarrow x_2 < y_2.$$

Por consiguiente podemos definir la relación de orden total en X dada por

$$[x] \leq [y] \leftrightarrow x \leq y.$$

Vamos a probar que X cumple b).

En primer lugar probamos que si $I \in X$ entonces I es un subconjunto separable de Y .

En efecto, sea M una familia maximal de intervalos abiertos no vacíos disjuntos dos a dos con extremos en I . Como Y cumple la condición de cadena numerable, tenemos que M es numerable. Digamos que $M = \{]x_n, y_n[\mid n \in \omega\}$. Como $x_n, y_n \in I$, tenemos que $x_n \sim y_n$, luego $]x_n, y_n[$ es separable. Sea D_n un subconjunto denso numerable de $]x_n, y_n[$. Sea $D = \bigcup_{n \in \omega} D_n \subset I$ numerable. Veamos que es denso en I .

Sea $]x, y[$ un intervalo abierto no vacío con $x, y \in I$. La maximalidad de M implica que existe un $n \in \omega$ tal que $]x_n, y_n[\cap]x, y[\neq \emptyset$. Esta intersección contiene un intervalo no vacío, luego corta a D_n , luego a D , luego $]x, y[\cap D \neq \emptyset$.

En particular concluimos que X tiene al menos dos puntos, pues en otro caso $X = \{Y\}$ y tendríamos que Y sería separable.

Veamos que X es denso en sí mismo (en particular es infinito).

Sean $[x] < [y]$ dos elementos de X y supongamos que no hay ningún otro elemento entre ambos. Supongamos que $x < z < y$. Entonces $[x] \leq [z] \leq [y]$, luego $[x] = [z]$ o $[z] = [y]$, luego $z \in [x] \cup [y]$. Así pues, $]x, y[\subset [x] \cup [y]$. Como $[x]$ e $[y]$ son subconjuntos separables de Y , también lo es su unión y también lo es $]x, y[$, luego $[x] = [y]$, contradicción.

Veamos que X cumple la condición de cadena numerable.

Supongamos que $\{[x_\alpha], [y_\alpha]\}_{\alpha < \omega_1}$ es una familia de intervalos de X disjuntos dos a dos. Tomando intervalos estrictamente contenidos en los dados, podemos exigir que $[x_\alpha] \neq [y_\beta]$ para todo $\alpha, \beta < \omega_1$.

Como los intervalos de X son no vacíos, es claro que $]x_\alpha, y_\alpha[\neq \emptyset$. Más aún, son disjuntos dos a dos, pues si existe $z \in]x_\alpha, y_\alpha[\cap]x_\beta, y_\beta[$, entonces $[z] = [x_\alpha] \vee [z] = [y_\alpha]$ y, por otra parte, $[z] = [x_\beta] \vee [z] = [y_\beta]$, luego $[z] = [x_\alpha] = [x_\beta]$ o bien $[z] = [y_\alpha] = [y_\beta]$, pero esto sólo es posible si $\alpha = \beta$.

Así pues, la familia $\{]x_\alpha, y_\alpha[\}_{\alpha < \omega_1}$ contradice la condición de cadena numerable de Y .

Veamos que ningún intervalo abierto de X es separable.

Supongamos que un intervalo $]x], [y[$ en X tiene un subconjunto denso numerable $\{d_n \mid n \in \omega\}$.

Sea $H = \bigcup_{[x] \leq L \leq [y]} L \subset Y$. Es claro que $]x, y[\subset H$, luego si probamos que H es separable tendremos que $]x, y[$ también lo será, luego $[x] = [y]$, lo cual es absurdo, pues hemos tomado $[x] < [y]$.

Observemos que el conjunto de las clases $[x] \leq L \leq [y]$ con más de dos puntos ha de ser numerable, pues de cada una de ellas obtenemos un intervalo en Y no vacío con los cuales se forma una anticadena en Y . Sea $\{L_n\}_{n < \omega}$ el conjunto de estas clases. Sabemos que L_n contiene un conjunto denso numerable D_n . Sea D la unión de todos los conjuntos D_n más un elemento de cada clase d_n . Entonces D es denso en H , pues si $u < v$ son elementos de H y $]u, v[\neq \emptyset$, o bien $[u] = [v] = L_n$ y entonces $]u, v[\cap D_n \neq \emptyset$, o bien $[u] < [v]$, en cuyo caso existe n tal que $[u] < d_n < [v]$, con lo que también $]u, v[\cap D \neq \emptyset$.

Así X cumple b) salvo por el hecho de que puede tener máximo o mínimo elemento. Ahora bien, como X es denso en sí mismo, si eliminamos los posibles máximo y mínimo, obtenemos un nuevo conjunto ordenado ya no tiene máximo ni mínimo y sigue cumpliendo las otras propiedades.

Ahora veamos que b) implica c). Sea X un conjunto totalmente ordenado en las condiciones de b) y vamos a construir otro W que cumpla c). El proceso es el mismo por el que se construye \mathbb{R} a partir de \mathbb{Q} .

Llamamos W al conjunto de todos los subconjuntos S de X que cumplen:

- a) $S \neq \emptyset \wedge S \neq X$,
- b) $\bigwedge x \in X \bigwedge y \in S (x < y \rightarrow x \in S)$,
- c) $\bigwedge x \in S \bigvee y \in S x < y$.

Se cumple que W está totalmente ordenado por la inclusión, pues si tomamos $S_1, S_2 \in W$ y existe $x \in S_2 \setminus S_1$, entonces todo $y \in S_1$ cumple $y < x$ por b) y por consiguiente $y \in S_2$ por b) otra vez. Así pues, $S_1 \subset S_2$.

La aplicación $i : X \rightarrow W$ dada por $i(x) = \{y \in X \mid y < x\}$ es inyectiva, conserva el orden y su imagen es densa en W . En efecto, si $x_1 < x_2$, existe $z \in X$ tal que $x_1 < z < x_2$, luego $i(x_1) < i(x_2)$ (ya que $z \in i(x_2) \setminus i(x_1)$). Si $S_1 < S_2$ son dos elementos de W , entonces existe $x \in X$ tal que $x \in S_2 \setminus S_1$ y por la propiedad c) existen $y, z \in S_2$ tales que $x < y < z$. Así pues, $S_1 \leq i(x) < i(y) < i(z) \leq S_2$.

De aquí se sigue que W es denso en sí mismo. También es fácil ver que W no tiene máximo ni mínimo. Si existiera una familia no numerable de intervalos no vacíos disjuntos dos a dos en W , dentro de cada uno de ellos podríamos tomar un intervalo no vacío con extremos en $i[X]$, y así obtendríamos una familia igual en X . Por lo tanto W cumple la condición de cadena numerable.

Si un intervalo $]S_1, S_2[$ en W tuviera un subconjunto denso numerable, tomamos $x, y \in X$ tales que $S_1 \leq i(x) < i(y) \leq S_2$. Sea D un subconjunto denso numerable en $]i(x), i(y)[$.

Para cada intervalo $]D_1, D_2[$ con extremos en D tomamos un punto $u \in]x, y[$ tal que $i(u) \in]D_1, D_2[$. Así obtenemos un subconjunto numerable de $]x, y[$ que claramente es denso, contradicción.

Veamos finalmente que W es completo. Sea $A \subset W$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Sea $T = \bigcup_{S \in A} S$. Es inmediato comprobar que $T \in W$ y que es el supremo de A . ■

Por consiguiente la hipótesis de Suslin equivale a que un conjunto totalmente ordenado es separable si y sólo si cumple la condición de cadena numerable.

El primer paso en la solución del problema de Suslin lo dio G. Kurepa en 1935 al demostrar que la hipótesis de Suslin admite un enunciado equivalente en términos de árboles. Dedicamos la sección siguiente a estudiar el concepto de árbol y su relación con el problema de Suslin.

8.2 Árboles

Definición 8.5 Un *árbol* es un conjunto parcialmente ordenado (A, \leq) tal que, para todo $x \in A$, el segmento $A_x^< = \{a \in A \mid a < x\}$ está bien ordenado.

Si $x \in A$, se llama *altura* de x a $\text{alt}_A x = \text{ord} A_x^<$.

Si $\alpha \in \Omega$, se llama *nivel* α -ésimo de A al conjunto

$$\text{Niv}_\alpha A = \{x \in A \mid \text{alt}_A x = \alpha\}.$$

Se llama *altura* de A al mínimo ordinal $\text{alt}A = \alpha$ tal que $\text{Niv}_\alpha A = \emptyset$. Es fácil ver que

$$\text{alt}A = \bigcup_{x \in A} (\text{alt}_A x + 1).$$

Dos elementos $x, y \in A$ son *compatibles* si $x \leq y \vee y \leq x$. En caso contrario se dice que son *incompatibles* y se representa por $x \perp y$.

Un subconjunto $C \subset A$ es una *cadena* si sus elementos son compatibles dos a dos, es decir, si está totalmente ordenado y, por consiguiente, bien ordenado.

Un subconjunto $R \subset A$ es una *rama* si es una cadena maximal respecto a la inclusión. Por el lema de Zorn, toda cadena se extiende hasta una rama. Llamaremos *altura* de R a

$$\text{alt}_A R = \text{ord}R = \bigcup_{x \in R} (\text{alt}_A x + 1).$$

Un subconjunto $C \subset A$ es un *camino* si es una rama tal que $\text{alt}_A C = \text{alt}A$, es decir, si es una rama que corta a todos los niveles no vacíos de A .

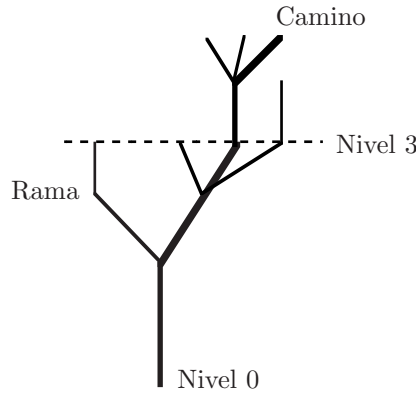
Un subconjunto $C \subset A$ es una *anticadena* si sus elementos son incompatibles dos a dos. Claramente los niveles son anticadenas.

Un subconjunto $A' \subset A$ es un *subárbol* de A si

$$\wedge x \in A \wedge y \in A' (x < y \rightarrow x \in A').$$

Claramente esto implica que si $x \in A'$ entonces $\text{alt}_A x = \text{alt}_{A'} x$.

He aquí un ejemplo de árbol de altura 6:



Los conceptos que hemos definido en los capítulos anteriores para c.p.o.s se ajustan a los que acabamos de definir para árboles a condición de que los pongamos “copa abajo”. Más concretamente, si definimos en A la relación $a \leq^* b \leftrightarrow b \leq a$, entonces (A, \leq^*) es un c.p.o. tal que dos elementos de A son incompatibles en (A, \leq^*) como c.p.o. si y sólo si lo son en (A, \leq) como árbol. Igualmente coinciden los conceptos de cadena o anticadena. A tendrá un máximo como c.p.o. si y sólo si $|\text{Niv}_0 A| = 1$, es decir, si el árbol tiene un

solo tallo. El teorema siguiente muestra, entre otras cosas, que normalmente podemos exigir que sea así.

Si κ es un cardinal, un κ -árbol es un árbol de altura κ cuyos niveles tienen todos cardinal menor que κ .

Diremos que un κ -árbol A está *bien podado* si $|\text{Niv}_0 A| = 1$ y

$$\bigwedge x \in A \bigwedge \alpha < \kappa (\text{alt}_A x < \alpha \rightarrow \bigvee y \in \text{Niv}_\alpha A \ x < y).$$

En otras palabras, un árbol está bien podado si tiene un único tallo y desde cualquiera de sus puntos se puede ascender hasta cualquier altura. Casi siempre se puede podar bien un árbol:

Teorema 8.6 *Si κ es un cardinal regular y A es un κ -árbol, entonces A tiene un κ -subárbol bien podado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A' = \{x \in A \mid |\{z \in A \mid x < z\}| = \kappa\}$. Claramente A' es un subárbol de A . Ciertamente no es vacío, pues

$$A = \bigcup_{x \in \text{Niv}_0 A} \{y \in A \mid x \leq y\},$$

y como $|\text{Niv}_0 A| < \kappa$, ha de haber un $x \in \text{Niv}_0 A$ tal que $|\{y \in A \mid x \leq y\}| = \kappa$, es decir, tal que $x \in A'$.

Sea $x \in A'$ y $\alpha < \kappa$ tal que $\text{alt}_A x < \alpha$. Sea $Y = \{y \in \text{Niv}_\alpha A \mid x < y\}$. Entonces

$$\{z \in A \mid x < z\} = \{z \in A \mid x < z \wedge \text{alt}_A z \leq \alpha\} \cup \{z \in A \mid x < z \wedge \text{alt}_A z > \alpha\}.$$

Por definición de A' , el primer conjunto de la línea anterior tiene cardinal κ , el segundo tiene cardinal menor que κ , pues está contenido en $\bigcup_{\beta \leq \alpha} \text{Niv}_\beta A$, κ es regular y los niveles tienen cardinal menor que κ .

Por consiguiente, el tercer conjunto ha de tener cardinal κ , pero

$$\{z \in A \mid x < z \wedge \text{alt}_A z > \alpha\} = \bigcup_{y \in Y} \{z \in A \mid y < z \wedge \text{alt}_A z > \alpha\},$$

y $|Y| \leq |\text{Niv}_\alpha A| < \kappa$, por lo que ha de existir un $y \in Y$ tal que

$$|\{z \in A \mid y < z \wedge \text{alt}_A z > \alpha\}| = \kappa.$$

En particular $|\{z \in A \mid x < z\}| = \kappa$, con lo que $y \in A'$. Así hemos probado que

$$\bigwedge x \in A' \bigwedge \alpha < \kappa (\text{alt}_A x < \alpha \rightarrow \bigvee y \in \text{Niv}_\alpha A' \ x < y).$$

En particular esto implica que A' es un κ -árbol. Para estar bien podado sólo le falta tener un único tallo. Ahora bien, si $x \in \text{Niv}_0 A'$, es inmediato comprobar que $B = \{y \in A' \mid x \leq y\}$ es un κ -subárbol bien podado de A' , luego de A . ■

Kurepa demostró que la existencia de una recta de Suslin equivale a la existencia de un \aleph_1 -árbol con ciertas peculiaridades. Antes de introducir este tipo de árboles vamos a probar un par de resultados que nos familiaricen con el comportamiento de los árboles respecto al tipo de cuestiones que nos van a interesar.

Teorema 8.7 (König) *Todo \aleph_0 -árbol tiene un camino.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A un \aleph_0 -árbol y sea A' un subárbol bien podado. Entonces hay un $x_0 \in \text{Niv}_0 A'$, hay un $x_1 \in \text{Niv}_1 A'$ tal que $x_0 < x_1$, hay un $x_2 \in \text{Niv}_2 A'$ tal que $x_1 < x_2$, y por recurrencia construimos un conjunto $C = \{x_n \mid n \in \omega\}$ que claramente es un camino en A . ■

Así pues, si un árbol llega hasta cualquier altura finita, podemos encontrar un camino que nos lleve tan arriba como queramos, sin que se corte inesperadamente. Esto, que parece obvio, no es necesariamente cierto si consideramos \aleph_1 -árboles:

Definición 8.8 Un *árbol de Aronszajn* es un \aleph_1 -árbol cuyas cadenas son todas numerables, es decir, que no tiene caminos.

Claramente, si A es un árbol de Aronszajn y A' es un subárbol bien podado, entonces A' es un árbol de Aronszajn bien podado.

La situación es curiosa: Imaginemos que estamos en el tallo x_0 de un árbol de Aronszajn bien podado y nos disponemos a trepar por él lo más alto que podamos. Tenemos varias opciones para pasar al nivel 1, pero no importa cuál tomemos, pues desde cualquier punto x_1 del nivel 1 podemos llegar hasta cualquier otro nivel. Igualmente no importa a qué punto x_2 del nivel 2 saltemos, pues desde él se podrá llegar seguro a cualquier altura. Pero cuando hayamos dado ω pasos por la ruta $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ podemos encontrarnos con que la rama se acaba aquí, que no hay ningún punto en el árbol mayor que todos estos. Podemos rectificar la ruta desde cualquier paso previo para garantizar que llegamos al nivel ω . Por ejemplo, si estamos dispuestos a cambiar a partir del nivel 2 tomamos un $x_\omega > x_1$ y seguimos el camino $x_0 < x_1 < x'_2 < x'_2 < \dots < x_\omega$ formado por los nudos anteriores a x_ω . A partir de aquí podemos pasar a un $x_{\omega+1}$ en el nivel $\omega + 1$, etc., hasta determinar una cadena

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_2 < \dots < x_\omega < x_{\omega+1} < x_{\omega+2} < \dots$$

pero de nuevo podemos encontrarnos con que esta rama se acaba aquí, y que para llegar más arriba hubiera sido necesario desviarse en cualquiera de los pasos previos. El hecho de que A sea un árbol de Aronszajn significa precisamente que, tarde o temprano, hagamos lo que hagamos, terminaremos en una rama numerable que no puede prolongarse más. Podemos subir tan alto como queramos, pero siempre llegará un momento en que para seguir subiendo tendremos que bajar un poco y cambiar de dirección. Ésta es la característica de los árboles de Aronszajn.

La existencia de árboles tan peculiares es dudosa, pero vamos a disipar la duda construyendo uno.

Definición 8.9 Si I es un conjunto no vacío y α un ordinal, llamaremos *árbol completo I -ádico de altura α* al conjunto $I^{<\alpha}$ con el orden dado por la inclusión.

Es claro que $I^{<\alpha}$ es un árbol de altura α cuyo nivel β (para $\beta < \alpha$) es I^β .

Teorema 8.10 (Aronszajn) *Existe un árbol de Aronszajn.*

DEMOSTRACIÓN: Partiremos de $A = \{s \in \omega^{<\omega_1} \mid s \text{ es inyectiva}\}$, que es un subárbol de $\omega^{<\omega_1}$. Es claro que para cada $\alpha < \omega_1$ se cumple que

$$\text{Niv}_\alpha A = \{s \in {}^\alpha\omega \mid s \text{ es inyectiva}\} \neq \emptyset,$$

luego $\text{alt} A = \aleph_1$. Si C fuera una cadena no numerable en A entonces $f = \bigcup_{a \in C} a$ es una función, porque los elementos de C son compatibles, y habría de ser $f : \omega_1 \rightarrow \omega$ inyectiva, lo cual es absurdo. Por lo tanto las cadenas de A son numerables. Sin embargo, A no es un árbol de Aronszajn porque sus niveles son no numerables.

Definimos en cada conjunto ${}^\alpha\omega$ la relación de equivalencia dada por

$$s \approx t \leftrightarrow \{\beta < \alpha \mid s(\beta) \neq t(\beta)\} \text{ es finito.}$$

Veamos por inducción que existe una sucesión $\{s_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ tal que

- a) $s_\alpha \in {}^\alpha\omega$ es inyectiva,
- b) Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $s_\alpha \approx s_\beta|_\alpha$,
- c) $\omega \setminus s_\alpha[\alpha]$ es infinito.

Tomamos $s_0 = \emptyset$. Definido s_α , tomamos cualquier $n \in \omega \setminus s_\alpha[\alpha]$ y es fácil ver que $s_{\alpha+1} = s_\alpha \cup \{(\alpha, n)\}$ cumple lo pedido. Supongamos definidos $\{s_\delta\}_{\delta < \lambda}$, para un límite $\lambda < \omega_1$.

Sea $\{\alpha_n\}_{n < \omega}$ una sucesión cofinal creciente en λ . Vamos a definir una sucesión de aplicaciones inyectivas $t_n : \alpha_n \rightarrow \omega$ tales que $t_0 = s_{\alpha_0}$ y para todo $n \in \omega$ se cumpla $t_n \approx s_{\alpha_n} \wedge t_{n+1}|_{\alpha_n} = t_n$.

Supuesto que estén definidas t_0, \dots, t_n , definimos $t_{n+1} : \alpha_{n+1} \rightarrow \omega$ mediante

$$t_{n+1}(\beta) = \begin{cases} t_n(\beta) & \text{si } \beta < \alpha_n, \\ s_{\alpha_{n+1}}(\beta) & \text{si } \alpha_n \leq \beta \text{ y } s_{\alpha_{n+1}}(\beta) \notin t_n[\alpha_n], \\ \min(\omega \setminus (t_n[\alpha_n] \cup s_{\alpha_{n+1}}[\alpha_{n+1}])) & \text{si } \alpha_n \leq \beta \text{ y } s_{\alpha_{n+1}}(\beta) \in t_n[\alpha_n]. \end{cases}$$

Como s_{α_n} coincide con t_n salvo en un número finito de casos, sólo puede ocurrir $s_{\alpha_{n+1}}(\beta) \in t_n[\alpha_n]$ en un número finito de casos. Por lo tanto se cumple $s_{\alpha_{n+1}} \approx t_{n+1}$.

Sea $t = \bigcup_{n \in \omega} t_n$. Claramente $t : \lambda \rightarrow \omega$ inyectiva. Definimos $s_\lambda : \lambda \rightarrow \omega$ mediante

$$s_\lambda(\beta) = \begin{cases} t(\alpha_{2n}) & \text{si } \beta = \alpha_n, \\ t(\beta) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De este modo, si $\alpha < \lambda$ será $\alpha < \alpha_n$ para cierto $n < \omega$, y entonces $s_\lambda|_\alpha \approx t_n|_\alpha$ (pues se diferencian a lo sumo en $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$), luego $s_\lambda|_\alpha \approx s_{\alpha_n}|_\alpha \approx s_\alpha$.

Además $\{t(\alpha_{2n+1}) \mid n \in \omega\} \subset \omega \setminus s_\lambda[\lambda]$, con lo que este último conjunto es infinito y se cumple todo lo pedido.

Definimos $A^* = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \{t \in \text{Niv}_\alpha A \mid t \approx s_\alpha\}$. Así A^* es un subárbol de A , pues si $x \in A^*$, $y \in A$, $y < x$, digamos que $\text{alt}_A x = \alpha$, $\text{alt}_A y = \beta$, entonces $x \approx s_\alpha$, luego $y = x|_\beta \approx s_\alpha|_\beta \approx s_\beta$ y por consiguiente $y \in A^*$.

Para cada $\alpha < \omega_1$ se cumple que $s_\alpha \in \text{Niv}_\alpha A^*$, luego $\text{alt} A^* = \aleph_1$. Como en A no hay cadenas numerables, tampoco las hay en A^* . Finalmente,

$$\text{Niv}_\alpha A^* = \{t \in {}^\alpha \omega \mid t \approx s_\alpha \wedge t \text{ inyectiva}\} = \bigcup_{\substack{x \subset \alpha \\ \text{finito}}} \{t \in {}^\alpha \omega \mid t|_{\alpha \setminus x} = s_\alpha|_{\alpha \setminus x}\},$$

y el miembro derecho es una unión numerable de conjuntos numerables. Concluimos que A^* es un árbol de Aronszajn. ■

Definición 8.11 Un *árbol de Suslin* es un árbol A tal que $|A| = \aleph_1$ cuyas cadenas y anticadenas son todas numerables.

Notemos que un árbol de Suslin es un \aleph_1 -árbol, pues un elemento de altura mayor o igual que \aleph_1 determinaría una cadena no numerable bajo sí y, por otro lado, como los niveles son anticadenas, son numerables, y ha de haber al menos \aleph_1 niveles no vacíos para que el cardinal del árbol pueda ser \aleph_1 .

Así pues, un árbol de Suslin puede definirse como un árbol de Aronszajn cuyas anticadenas son numerables.

Todo \aleph_1 -subárbol bien podado de un árbol de Suslin es un árbol de Suslin bien podado, por lo que si existe un árbol de Suslin, existe uno bien podado. Más aún:

Diremos que un árbol A está *ramificado* si todo $x \in A$ tiene extensiones incompatibles, es decir, si el conjunto $\{y \in A \mid x < y\}$ no está totalmente ordenado (equivalentemente, si el c.p.o. que resulta de poner A “copa abajo” es no atómico).

Teorema 8.12 *Todo árbol de Suslin bien podado está ramificado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A un árbol de Suslin bien podado. Sea $y \in A$. Sea C una cadena maximal que contenga a y . Entonces C es numerable, luego existe un ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $\text{alt } C < \alpha$. Como A está bien podado existe un $x \in A$ de altura α tal que $y < x$. No puede ocurrir que todos los elementos de C estén bajo x , luego tomando un $x' \in C$ con $y < x'$ que no esté bajo x , tenemos que x y x' son extensiones incompatibles de y . Por lo tanto A está ramificado. ■

Esto tiene interés porque la condición de Suslin se simplifica un tanto sobre los árboles ramificados.

Teorema 8.13 *Si A es un \aleph_1 -árbol ramificado en el que toda anticadena maximal es numerable, entonces A es un árbol de Suslin.*

DEMOSTRACIÓN: Toda anticadena está contenida en una anticadena maximal, luego todas las anticadenas de A son numerables. Si A tuviera una cadena no numerable, podríamos tomarla maximal, llamémosla B . Entonces B corta a todos los niveles no vacíos de A . Para cada $x \in A$, sea $f(x) > x$ tal que $f(x) \notin B$ (existe porque A está ramificado).

Definimos por recurrencia una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ de modo que $x_\alpha \in B$ y $\text{alt}_A x_\alpha \geq \bigcup_{\beta < \alpha} f(x_\beta)$.

Así $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha < \omega_1}$ es una anticadena no numerable en A , contradicción. ■

Terminamos la sección con la caracterización de Kurepa de la hipótesis de Suslin:

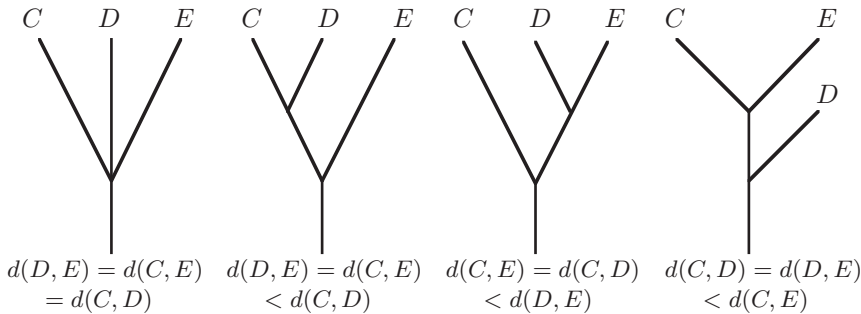
Teorema 8.14 *Existe un árbol de Suslin si y sólo si existe una recta de Suslin.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A es un árbol de Suslin. Podemos suponer que está bien podado. Sea L el conjunto de todas las ramas de A . Si $C \in L$, del hecho de que A está bien podado se sigue que $\text{alt } C$ es un ordinal límite. Si $\alpha < \text{alt } C$, llamaremos $C(\alpha)$ al único elemento en C de altura α . Si $C, D \in L, C \neq D$, llamaremos $d(C, D)$ al mínimo ordinal α tal que $C(\alpha) \neq D(\alpha)$. Claramente $d(C, D) < \text{alt } C \cap \text{alt } D$.

Fijemos un orden total \preceq en A y definamos en L el orden \leq dado por

$$C \leq D \leftrightarrow C = D \vee (C \neq D \wedge C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))).$$

Es claro que la relación \leq es reflexiva y antisimétrica. Veamos que es transitiva: Si $C \leq D \leq E$ y se da alguna igualdad es claro que $C \leq E$. Supongamos que $C < D < E$. Tenemos las posibilidades siguientes:



Sabemos que $C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))$, $D(d(D, E)) \prec E(d(D, E))$ y hemos de probar que $C(d(C, E)) \prec E(d(C, E))$, lo cual es cierto en los tres primeros casos, mientras que el cuarto contradice las hipótesis.

Es claro que dos ramas cualesquiera son comparables, es decir, L es un conjunto totalmente ordenado. Veamos que cumple la condición de cadena numerable. Supongamos que $\{[C_\alpha, D_\alpha]\}_{\alpha < \omega_1}$ es una familia de intervalos no vacíos disjuntos dos a dos. Sea $C_\alpha < E_\alpha < D_\alpha$ y sea β_α tal que

$$d(C_\alpha, E_\alpha) \cup d(E_\alpha, D_\alpha) < \beta_\alpha < \text{alt } E_\alpha.$$

Vamos a probar que $\{E_\alpha(\beta_\alpha)\}_{\alpha < \omega_1}$ es una anticadena en A , en contradicción con la definición de árbol de Suslin.

En caso contrario $E_\alpha(\beta_\alpha) \leq E_{\alpha'}(\beta_{\alpha'})$, para ciertos $\alpha, \alpha' < \omega_1$. Claramente entonces, $E_\alpha(\beta_\alpha) = E_{\alpha'}(\beta_{\alpha'})$ y así

$$d(E_\alpha, E_{\alpha'}) > \beta_\alpha > d(C_\alpha, E_\alpha) \cup d(E_\alpha, D_\alpha),$$

luego $d(C_\alpha, E_{\alpha'}) = d(C_\alpha, E_\alpha)$ y $d(E_\alpha, D_\alpha) = d(E_{\alpha'}, D_\alpha)$. Pero entonces las desigualdades $C_\alpha < E_\alpha < D_\alpha$ implican $C_\alpha < E_{\alpha'} < D_\alpha$, con lo que

$$E_{\alpha'} \in]C_\alpha, D_\alpha[\cap]C_{\alpha'}, D_{\alpha'}[= \emptyset,$$

contradicción.

Veamos, por último, que L no es separable. Supongamos que D es un subconjunto denso numerable en L . Las alturas de las ramas de D son ordinales numerables. Sea $\delta < \omega_1$ mayor que cualquiera de ellas y sea $x \in \text{Niv}_\delta A$. Como A está ramificado, existe un ordinal $\delta < \alpha < \omega$ tal que existen $r, s, t \in \text{Niv}_\alpha A$ por encima de x . Tomemos $E, F, G \in L$ tales que $r \in E, s \in F, t \in G$. Podemos suponer $E < F < G$. Así, $]E, G[$ es un intervalo no vacío, luego debería existir $C \in]E, G[\cap D$. Ahora bien, como $x \in E \cap G$, tenemos que $\delta = \text{alt}_A x < d(E, G)$, y como $d(C, E) < \text{alt } C < \delta$ (porque $C \in D$ y por la definición de δ), resulta que $d(C, E) = d(C, G)$, de donde se sigue que C es menor que E y G o mayor que ambos, contradicción.

Por consiguiente, L cumple 8.4 a), lo que implica que existe una recta de Suslin.

Supongamos ahora que existe una recta de Suslin L . Por 8.4 podemos suponer que no tiene intervalos separables. Llamemos B al conjunto de los intervalos abiertos no vacíos de L . Vamos a construir una sucesión $\{B_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ que cumpla lo siguiente:

- a) $B_\alpha \subset B$ y está formado por intervalos disjuntos dos a dos,
- b) $\bigcup_{x \in B_\alpha} x$ es denso en L ,
- c) Si $\alpha < \beta < \omega_1$, $I \in B_\alpha, J \in B_\beta$, entonces o bien $I \cap J = \emptyset$ o bien $J \subsetneq I$.

Para empezar tomamos como B_0 una familia maximal de intervalos disjuntos dos a dos. Por ser maximal $\bigcup_{x \in B_0} x$ es denso en L .

Supongamos definido B_α . Para cada $I \in B_\alpha$, sea H_I una familia maximal de elementos disjuntos del conjunto $\{K \in B \mid K \subsetneq I\}$. Sea $B_{\alpha+1} = \bigcup_{I \in B_\alpha} H_I$.

Es claro que $B_{\alpha+1}$ cumple a) y c). Veamos b). Para ello tomamos un intervalo abierto no vacío $J \in B$ y hemos de probar que corta a algún intervalo de $B_{\alpha+1}$. Sabemos que corta a un $I \in B_\alpha$. Como L es denso en sí mismo, dentro de $J \cap I$ podemos tomar un intervalo no vacío estrictamente contenido en I . De hecho, podemos suponer que $J \subsetneq I$. Entonces J ha de cortar a algún intervalo

de $H_I \subset B_{\alpha+1}$, o si no podríamos añadirlo a H_I contradiciendo la maximalidad de éste.

Supongamos definidos $\{B_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$, para un límite $\lambda < \omega_1$. Sea

$$H = \{K \in B \mid \bigwedge \delta < \lambda \bigwedge I \in B_\delta (I \cap K = \emptyset \vee H \subsetneq I)\}.$$

Tomamos como B_λ una familia maximal de intervalos disjuntos en H . En realidad hemos de probar que $H \neq \emptyset$, pero esto está implícito en la prueba de que B_λ cumple b). Sea $J \in B$ y veamos que corta a un intervalo de B_λ .

Como L cumple la condición de cadena numerable, cada B_α es numerable, luego $\bigcup_{\delta < \lambda} B_\delta$ también lo es. Sea E el conjunto de los extremos de los intervalos de esta unión, numerable también. Como J no es separable $E \cap J$ no es denso en J , luego existe un intervalo $K_1 \in B$, $K_1 \subset J$, $K_1 \cap E = \emptyset$.

Como L es denso en sí mismo, podemos tomar $K_2 \in B$, $K_2 \subsetneq K_1$. Entonces $K_2 \in H$, pues si $\delta < \lambda$ e $I \in B_\delta$, los extremos de I están en E , luego no están en K_1 , luego $K_1 \cap I = \emptyset$ o bien $K_1 \subset I$. Consecuentemente, $K_2 \cap I = \emptyset$ o bien $K_2 \subsetneq I$. Por la maximalidad de B_λ , el intervalo K_2 ha de cortar a alguno de sus intervalos, luego J también.

Obviamente B_λ cumple a) y c).

Llamemos $A = \bigcup_{\alpha < \omega_1} B_\alpha$ con el orden dado por la inversa de la inclusión.

Vamos a probar que es un árbol. Tomamos $x \in A$ y hemos de ver que $A_x^<$ está bien ordenado. En primer lugar probaremos que está totalmente ordenado. Tomemos $u, v \in A_x^<$. Esto significa que $x \subset u \cap v \neq \emptyset$. Es claro entonces que $u \subset v$ o $v \subset u$.

Tomemos ahora $C \subset A_x^<$ no vacío y veamos que tiene mínimo. Sea α el mínimo ordinal tal que $C \cap B_\alpha \neq \emptyset$. Sea $u \in C \cap B_\alpha$. Veamos que u es el mínimo de C . En caso contrario (puesto que C está totalmente ordenado) existiría $v \in C$ tal que $v < u$, o sea, $u \subsetneq v$. Digamos que $v \in B_\beta$, donde $\beta \geq \alpha$ por la minimalidad de α . Ahora bien, si $\beta = \alpha$ entonces u y v tendrían que ser disjuntos, luego $\beta > \alpha$, pero entonces tendría que ser $v \subsetneq u$, contradicción.

Tenemos, pues, que A es un árbol. Una anticadena en A está formada por intervalos de L disjuntos dos a dos, luego ha de ser numerable.

Si $\{I_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ fuera una cadena en A , para $\alpha < \omega_1$ se cumpliría que $I_{\alpha+1} \subsetneq I_\alpha$, y como L es denso en sí mismo $I_\alpha \setminus I_{\alpha+1}$ contendría un intervalo abierto no vacío J_α . Entonces $\{J_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ sería una familia de intervalos en L disjuntos dos a dos, contradicción.

Es claro que $|A| = \aleph_1$, luego A es un árbol de Suslin. ■

Así pues, ahora tenemos una expresión alternativa para la hipótesis de Suslin:

(HS): *No existen árboles de Suslin.*

8.3 El diamante de Jensen

Jensen demostró que el axioma de constructibilidad implica la existencia de un árbol de Suslin. Pero en realidad se dio cuenta de que la construcción

dependía de una consecuencia concreta del axioma de constructibilidad, lo suficientemente sencilla como para tener interés por sí misma, ya que puede ser usada en otras pruebas de consistencia y es más fácil de manejar que el axioma de constructibilidad. Se trata del primero de una larga lista de los llamados “principios combinatorios”.

Definición 8.15 Se llama *diamante de Jensen* a la sentencia

\diamond Existe una sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ tal que $\bigwedge \alpha < \omega_1 A_\alpha \subset \alpha$ que verifica

$\bigwedge A \subset \omega_1 \{\alpha < \omega_1 \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1 .

A las sucesiones $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ que cumplen \diamond se las llama sucesiones \diamond .

El teorema siguiente muestra que \diamond no es un teorema de ZFC:

Teorema 8.16 $\diamond \rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ una sucesión \diamond . Si $A \subset \omega$, puesto que $\{\alpha < \omega_1 \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario, en particular no está acotado, luego podemos tomar $\omega < \alpha < \omega_1$ tal que $A = A \cap \alpha = A_\alpha$. Así pues, todos los subconjuntos de ω aparecen en una sucesión \diamond , luego sólo hay \aleph_1 . ■

Puede probarse que \diamond no es equivalente a la hipótesis del continuo. Seguidamente probaremos las implicaciones $V = L \rightarrow \diamond \rightarrow \neg HS$. Con ello tendremos garantizada la consistencia de $\neg HS$. La consistencia de HS requiere ideas muy diferentes y la abordaremos en el próximo capítulo.

La prueba de \diamond a partir del axioma de constructibilidad es un refinamiento de la prueba de la hipótesis del continuo.

Teorema 8.17 $V = L \rightarrow \diamond$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $V = L$ y sea \trianglelefteq el buen orden constructible. De este modo, $x \trianglelefteq y$ es una fórmula con sólo dos variables libres absoluta para modelos transitivos de ZF. Definimos como sigue dos sucesiones $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ y $\{C_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$. Tomamos $A_0 = C_0 = \emptyset$, $A_{\alpha+1} = C_{\alpha+1} = \alpha + 1$ y para cada ordinal límite $\lambda < \omega_1$ definimos (A_λ, C_λ) igual al mínimo par (respecto \trianglelefteq) (A, C) tal que $A, C \subset \lambda$, C es c.n.a. en λ y $\bigwedge \alpha \in C A \cap \alpha \neq A_\alpha$ si existe tal par, o $A = C = \lambda$ en caso contrario.

Vamos a probar que $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ es una sucesión \diamond . Es importante destacar que gracias al uso de \trianglelefteq en la definición, tenemos que “ A_α ” y “ C_α ” son términos del lenguaje de la teoría de conjuntos con α como única variable libre. En particular “ $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ ” no tiene variables libres.

Si la sucesión que hemos construido no cumple \diamond , entonces existe un $X \subset \omega_1$ tal que el conjunto $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha = A_\alpha\}$ no es estacionario en ω_1 , luego existe un conjunto c.n.a. $C \subset \omega_1$ tal que $\bigwedge \alpha \in C X \cap \alpha \neq A_\alpha$. Sea (X, C) el mínimo par respecto a \trianglelefteq que cumple estos hechos.

Aplicamos el teorema 1.24 a la jerarquía constructible, con lo que obtenemos un ordinal límite η tal que L_η es un modelo transitivo de (el suficiente) $ZFC+V=L$ y además $X, C, {}^\omega\omega_1, \{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1} \in L_\eta$. También podemos exigir que el término A_α sea absoluto para L_η .

Sea N el núcleo de Skolem en L_η del conjunto $(\omega+1) \cup \{\omega_1, X, C\}$. Así, N es un submodelo elemental numerable de L_η tal que $\omega+1 \subset N, \omega_1 \in N, X \in N, C \in N$. (Notemos que N no puede ser transitivo). Según el teorema 1.17, esto significa que para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ se cumple

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in N (\phi^N(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^{L_\eta}(x_1, \dots, x_n)).$$

Vamos a probar que $\lambda = \omega_1 \cap N$ es un ordinal límite. Sea $\alpha \in \omega_1 \cap N$. Entonces $\bigvee f \in L_\eta f : \omega \rightarrow \alpha$ biyectiva (porque ${}^\omega\omega_1 \in L_\eta$). Esto equivale a $(\bigvee f f : \omega \rightarrow \alpha \text{ biyectiva})^{L_\eta}$, con lo que $(\bigvee f f : \omega \rightarrow \alpha \text{ biyectiva})^N$, de donde $\bigvee f \in N (f : \omega \rightarrow \alpha \text{ biyectiva})^N$ y así $\bigvee f \in N (f : \omega \rightarrow \alpha \text{ biyectiva})^{L_\eta}$, pero esto significa simplemente que existe $f \in N$ tal que $f : \omega \rightarrow \alpha$ biyectiva.

Fijado $n \in \omega \subset N$, el mismo razonamiento aplicado a $\bigvee \beta \beta = f(n)$ nos lleva a que $\bigvee \beta \in N \beta = f(n)$, con lo que $\alpha \subset N$.

En definitiva hemos visto que si $\alpha \in \lambda$ entonces $\alpha \subset \lambda$, luego λ es un conjunto transitivo de ordinales, luego es un ordinal. Para probar que es un ordinal límite tomamos $\alpha \in \lambda$ y aplicamos el razonamiento precedente a la fórmula $\bigvee \beta \beta = \alpha + 1$, con lo que concluimos que $\bigvee \beta \in N \beta = \alpha + 1$, es decir, $\alpha + 1 \in \lambda$.

Tenemos, pues, que $\lambda < \omega_1$ es un ordinal límite. La relación de pertenencia es extensional en N (porque N cumple el axioma de extensionalidad) y obviamente está bien fundada, luego podemos considerar la función colapsante $G : N \rightarrow L_\delta$. Notemos que el colapso transitivo es un L_δ , donde δ es un ordinal límite (numerable), porque es elementalmente equivalente a N , que a su vez es elementalmente equivalente a L_η , luego es un modelo de (el suficiente) $ZFC+V=L$ (teorema 3.15).

Recordemos que $G(y) = \{G(x) \mid x \in N \wedge x \in y\}$. Teniendo esto en cuenta, una simple inducción prueba que $\bigwedge \alpha < \lambda G(\alpha) = \alpha$, de donde $G(\omega_1) = \lambda$, $G(X) = X \cap \lambda$, $G(C) = C \cap \lambda$.

Por otra parte, si $\alpha < \lambda$ tenemos que $(\bigvee x x = A_\alpha)^{L_\eta}$ (porque A_α es absoluto para L_η), y de aquí se llega a que $\bigvee x \in N x = A_\alpha$, o sea, $A_\alpha \in N$, y como $A_\alpha \subset \alpha$, resulta que $G(A_\alpha) = A_\alpha \in L_\delta$.

Más aún, si llamamos $\phi(x, \alpha) \equiv x = A_\alpha$, tenemos $\phi^{L_\eta}(A_\alpha, \alpha)$, luego también $\phi^N(A_\alpha, \alpha)$ y, aplicando G , $\phi^{L_\delta}(A_\alpha, \alpha)$, pero esto significa que $A_\alpha = A_\alpha^{L_\delta}$.

Consideremos finalmente la fórmula $\phi(X, C, A) \equiv (X, C)$ es el mínimo par respecto a \leq tal que $X, C \subset A$, C es c.n.a. en A y $\bigwedge \alpha \in C X \cap \alpha \neq A_\alpha$.

Podemos exigir que ϕ sea absoluta para L_η , de modo que $\phi^{L_\eta}(X, C, \omega_1)$, luego $\phi^N(X, C, \omega_1)$ y, aplicando G , $\phi^{L_\delta}(X \cap \lambda, C \cap \lambda, \lambda)$, es decir, tenemos que $(C \cap \lambda, X \cap \lambda)$ es el mínimo par respecto a \leq tal que $X \cap \lambda, C \cap \lambda \subset \lambda$, $C \cap \lambda$ es

c.n.a. en λ y $\bigwedge \alpha \in C \cap \lambda \ X \cap \alpha \neq A_\alpha$, donde hemos usado que A_α es absoluto para L_δ y que L_δ es una sección inicial de \leq , lo que justifica que “mínimo respecto a \leq ” sea absoluto.

Por definición, esto significa que $(X \cap \lambda, C \cap \lambda) = (A_\lambda, C_\lambda)$, y en particular $X \cap \lambda = A_\lambda$. Por otra parte, como $C \cap \lambda$ no está acotado en λ y C es c.n.a. en ω_1 , resulta que $\lambda \in C$, y por la definición de (X, C) ha de ser $X \cap \lambda \neq A_\lambda$, contradicción. ■

Con la ayuda del \diamond construiremos un árbol de Suslin definiendo un orden adecuado sobre el propio ω_1 . Primeramente demostramos un hecho técnico.

Teorema 8.18 *Sea $B = (\omega_1, \leq^*)$ un \aleph_1 -árbol, sea $B_\alpha = \{x \in \omega_1 \mid \text{alt}_B x < \alpha\}$ y sea A una anticadena maximal de B . Entonces el conjunto*

$$\{\lambda < \omega_1 \mid B_\lambda = \lambda \wedge B_\lambda \cap A \text{ es una anticadena maximal en } B_\lambda\}$$

es c.n.a. en ω_1 .

DEMOSTRACIÓN: Sea C el conjunto del enunciado. Supongamos que $\lambda < \omega_1$ es un ordinal límite tal que $C \cap \lambda$ no está acotado en λ . Entonces para todo $x \in B$ se cumple que

$$\begin{aligned} x \in B_\lambda &\leftrightarrow \text{alt}_B x < \lambda \leftrightarrow \bigvee \delta \in C \cap \lambda \ \text{alt}_B x < \delta \\ &\leftrightarrow \bigvee \delta \in C \cap \lambda \ x \in B_\delta = \delta \leftrightarrow x \in \lambda, \end{aligned}$$

luego $B_\lambda = \lambda$.

Claramente $B_\lambda \cap A$ es una anticadena en B_λ . Si no es maximal existe un $x \in B_\lambda \setminus A$ incompatible con todos los elementos de $B_\lambda \cap A$. Entonces $\text{alt}_B x < \lambda$, luego existe $\delta \in C \cap \lambda$ tal que $\text{alt}_B x < \delta$. Así $x \in B_\delta \setminus A$ y es incompatible con todos los elementos de B_δ , y esto contradice que $B_\delta \cap A$ es una anticadena maximal de B_δ . Así pues, $\lambda \in C$ y C es cerrado.

Llamemos $f(\alpha) = \text{alt}_B \alpha$, $g(\alpha) = \bigcup_{\beta \in \text{Niv}_\alpha B} \beta$ y sea $h(\alpha)$ un elemento de A compatible con α . De este modo $f, g, h : \omega_1 \rightarrow \omega_1$, el conjunto

$$D = \{\lambda < \omega_1 \mid f[\lambda] \subset \lambda \wedge g[\lambda] \subset \lambda \wedge h[\lambda] \subset \lambda\}$$

es c.n.a. y es fácil ver que $D \subset C$, luego C no está acotado. ■

Teorema 8.19 $\diamond \rightarrow \neg\text{HS}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ una sucesión \diamond . Vamos a definir una relación de orden \leq^* en ω_1 de modo que $B = (\omega_1, \leq^*)$ sea un árbol de Suslin. Llamaremos

$$N_\alpha = \{\omega \cdot \alpha + n \mid n \in \omega\}.$$

Por las propiedades de la aritmética ordinal, los conjuntos $\{N_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ forman una partición de ω_1 en \aleph_1 subconjuntos numerables disjuntos dos a dos. Definiremos \leq^* de modo que N_α sea el nivel α -ésimo de B . De este modo tendremos garantizado que B será un \aleph_1 -árbol. Más concretamente, vamos construir un árbol B que cumpla las propiedades siguientes:

a) $\bigwedge \alpha < \omega_1 \text{ Niv}_\alpha B = N_\alpha$,

b) Para cada $\alpha < \omega_1$ y cada $n < \omega$ se cumple

$$\omega \cdot \alpha + n \leq^* \omega(\alpha + 1) + 2n \quad \text{y} \quad \omega \cdot \alpha + n \leq^* \omega(\alpha + 1) + 2n + 1$$

y los miembros derechos son los únicos elementos de $N_{\alpha+1}$ que extienden al miembro izquierdo.

c) Si $\beta < \alpha < \omega_1$ y $x \in N_\beta$, entonces $\bigvee y \in N_\alpha \ x \leq^* y$.

d) Si $\lambda < \omega_1$, $B_\lambda = \lambda$ (donde $B_\lambda = \{\alpha < \omega_1 \mid \text{alt}_B \alpha < \lambda\}$) y A_λ es una anticadena maximal en B_λ , entonces

$$\bigwedge x \in N_\lambda \bigvee y \in A_\lambda \ y \leq^* x.$$

La propiedad b) afirma que el elemento n -simo del nivel α -ésimo tiene exactamente dos extensiones en el nivel $\alpha + 1$ -ésimo, a saber, los elementos $2n$ -simo y $2n + 1$ -ésimo. La propiedad c) afirma que desde cualquier punto se puede ascender hasta cualquier altura. La propiedad d) es la que nos dará la propiedad de Suslin.

Razonamos por recurrencia. Definiremos una sucesión de árboles

$$B_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta$$

de modo que cada cual sea un subárbol de los siguientes y cumpla las propiedades anteriores.

En $B_1 = N_0$ la relación \leq^* se restringe a ser reflexiva, pues los niveles son anticadenas. Si $\lambda < \omega_1$ es un ordinal límite y \leq^* está definida en B_δ , para cada $\delta < \lambda$, entonces, como

$$B_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} B_\delta,$$

la relación en B_λ está completamente determinada (y cumple trivialmente todas las propiedades requeridas).

Más aún, si suponemos que \leq^* está definida sobre $B_{\alpha+1}$ (es decir, hasta el nivel α), la propiedad b) determina completamente su extensión a $B_{\alpha+2}$. Así pues, el único paso no trivial consiste en suponer definida \leq^* sobre $B_\lambda = \omega \cdot \lambda$ y extenderla a $B_{\lambda+1}$, es decir, determinar qué elementos de B_λ son anteriores a cada $\omega \cdot \lambda + n \in N_\lambda$.

Numeremos los elementos de $\omega \cdot \lambda = \{x_n \mid n \in \omega\}$. Vamos a probar que para cada $n \in \omega$ existe una cadena $B(n)$ en B_λ tal que $x_n \in B(n)$ y $B(n)$ corta a todos los niveles N_δ para todo $\delta < \lambda$.

Sea $\{\beta_m(n)\}_{m \in \omega}$ una sucesión cofinal creciente en λ tal que $\text{alt } x_n < \beta_0(n)$. Sean $\{y_m(n)\}_{m \in \omega}$ tales que $y_m(n) \in N_{\beta_m(n)}$ y $x_n <^* y_0(n) <^* y_1(n) <^* \dots$ (existen por c). Basta tomar $B(n) = \{z \in B_\lambda \mid \bigvee m \in \omega \ z <^* y_m(n)\}$.

Supongamos momentáneamente que $B_\lambda = \lambda$ y que A_λ (de la sucesión \diamond) sea una anticadena maximal en B_λ . Entonces cada x_n es compatible en B_λ con algún elemento de A_λ , es decir, existe un $a(n) \in A_\lambda$ anterior o posterior a x_n . En cualquier caso existe un $y \in B_\lambda$ tal que $x_n <^* y \wedge a(n) <^* y$. Podemos escoger la sucesión $\{y_m(n)\}_{m \in \omega}$ de modo que $y_0(n) = y$, con lo que $a(n) \in B(n)$.

Volviendo al caso general, extendemos \leq^* a $B_{\lambda+1}$ estableciendo que los elementos anteriores a $\omega \cdot \lambda + n$ son exactamente los de $B(n)$, con lo que ciertamente $\omega \cdot \lambda + n$ tiene exactamente λ anteriores en $B_{\lambda+1}$, luego N_λ es el nivel λ -ésimo de $B_{\lambda+1}$. Obviamente $B_{\lambda+1}$ cumple las propiedades a), b) y c). La propiedad d) también se cumple, pues si $B_\lambda = \lambda$ y A_λ es una anticadena maximal en B_λ y $x \in N_\lambda$, entonces $x = \omega \cdot \lambda + n$ para cierto $n \in \omega$ y por construcción $a(n) \in A_\lambda$ cumple $a(n) \in B_n$, es decir, $a(n) <^* x$.

Así pues, tenemos definido un árbol $B = (\omega_1, \leq^*)$ que cumple las propiedades a), b), c) y d). Por a) es un \aleph_1 -árbol. Por b) es ramificado, luego para probar que es un árbol de Suslin basta ver que todas sus anticadenas maximales son numerables (teorema 8.13). Sea, pues, A una anticadena maximal en B .

Por el teorema anterior, el conjunto

$$C = \{\lambda < \omega_1 \mid B_\lambda = \lambda \wedge B_\lambda \cap A \text{ es una anticadena maximal en } B_\lambda\}$$

es c.n.a. en ω_1 . Por \diamond , el conjunto $\{\alpha < \omega_1 \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1 , luego existe un $\lambda \in C$ tal que $A \cap \lambda = A_\lambda$. Tenemos entonces que $A_\lambda \subset A$ es una anticadena maximal en B_λ . Ahora bien, por construcción, todos los elementos de N_λ tienen por debajo un elemento de A_λ , pero de hecho todo elemento de B de altura $\geq \lambda$ tiene bajo sí un elemento de N_λ , luego un elemento de A . Esto significa que $A \subset B_\lambda$ (más concretamente, $A = A_\lambda$), y en particular es numerable. ■

Si meditamos sobre la construcción anterior veremos que esencialmente consiste en garantizar que una cierta anticadena A_λ no puede extenderse más allá del nivel λ , haciendo que todos los elementos del nivel λ sean compatibles con ella. El diamante hace falta para garantizar que una anticadena maximal arbitraria del árbol que resulte de la construcción coincidirá hasta un cierto nivel λ con A_λ .

Terminamos con una prueba alternativa de la consistencia del diamante, esta vez mediante una extensión genérica. El teorema 5.26 prueba que el c.p.o. $\text{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)$ fuerza la hipótesis del continuo. A continuación veremos que de hecho fuerza el diamante. Con ello obtenemos que el diamante es consistente con cualquier determinación de la función del continuo con tal de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Teorema 8.20 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, consideremos $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)^M$ y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces se cumple $\diamond^{M[G]}$. Si $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)^M$, entonces \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades y la función del continuo es la misma en M y en $M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X = \{(\alpha, \beta) \mid \beta < \alpha < \omega_1^M\}$ y sea $\mathbb{Q} = \text{Fn}(X, 2, \aleph_1)^M$. Como $(|X| = \aleph_1)^M$, resulta que \mathbb{P} y \mathbb{Q} son semejantes^M, luego $M[G]$ puede

obtenerse también a partir de \mathbb{Q} . Así pues, supondremos que G es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M .

Como \mathbb{Q} es \aleph_1 -cerrado en M es fácil ver (usando 5.8) que $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$. Por simplificar la notación escribiremos ω_1 para referirnos a este ordinal numerable (en ningún momento necesitaremos nombrar al ω_1 real). Así mismo es claro que $\mathcal{P}\omega \cap M = \mathcal{P}\omega \cap M[G]$.

Sea $f_G : \omega_1 \times \omega_1 \rightarrow 2$ la aplicación genérica construida a partir de G (es decir, la unión de las condiciones en G). Por la definición de \mathbb{Q} es claro que si definimos $f_G^\alpha(\beta) = f(\alpha, \beta)$ entonces $f_G^\alpha : \alpha \rightarrow 2$ (aquí usamos de forma estándar que G es genérico). Definimos los conjuntos $A_\alpha = \{\beta < \alpha \mid f_G^\alpha(\beta) = 1\}$. Puesto que $G \in M[G]$ es claro que $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1} \in M[G]$. Vamos a probar que es una sucesión \diamond en $M[G]$.

En caso contrario existen $B, C \in M[G]$ tales que $B \subset \omega_1$, C es c.n.a. en ω_1 y el conjunto $\{\alpha < \omega_1 \mid B \cap \alpha = A_\alpha\}$ no corta a C . Sea $\tau_G : \omega_1 \rightarrow 2$ la función característica de B y sea $C = \sigma_G$, con $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{Q}}$. Sea Γ el nombre canónico de G definido en 4.16. Sea $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$p \Vdash (\tau : \omega_1 \rightarrow 2 \wedge \sigma \text{ es c.n.a. en } \check{\omega}_1 \wedge \bigwedge \alpha \in \sigma \tau|_\alpha \neq f_\Gamma^\alpha).$$

Si $q \in \mathbb{Q}$, llamaremos *soporte* de q (abreviado $\text{sop } q$) al mínimo ordinal $\beta < \omega_1$ tal que $\text{Dominio}(q) \subset \{(\alpha, \delta) \mid \delta < \alpha < \beta\}$. Construimos en M sucesiones $\{p_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$ y $\{b_n\}$, con $n \in \omega$, de modo que

- a) $p_0 = p$,
- b) $\beta_n = \text{sop } p_n$,
- c) $\beta_n < \delta_n < \beta_{n+1}$,
- d) $p_{n+1} \leq p_n$,
- e) $p_{n+1} \Vdash \delta_n \in \sigma$,
- f) $b_n : \beta_n \rightarrow 2$ y $p_{n+1} \Vdash \tau|_{\check{\beta}_n} = \check{b}_n$.

Esto es posible, pues si tenemos $p_n, \beta_n, \delta_{n-1}$ y b_{n-1} que cumplan estas propiedades, como $p_n \leq p$, tenemos que $p \Vdash \sigma$ es c.n.a. en $\check{\omega}_1$, y por consiguiente $p_n \Vdash \bigvee x \in \check{\omega}_1 (\check{\beta}_n < x \wedge x \in \sigma)$. Por 4.29 k) existen $q \leq p_n$ y $\delta_n \in \omega_1$ tales que $q \Vdash (\check{\beta}_n < \check{\delta}_n \wedge \check{\delta}_n \in \sigma)$.

Sea r una extensión de q con $\text{sop } r > \delta_n$. Sea $F = (\beta_n 2)^M$. Como \mathbb{Q} es \aleph_1 -cerrado en M , se cumple que $r \Vdash \tau|_{\check{\beta}_n} \in \check{F}$ o, expresado en otros términos, $r \Vdash \bigvee x \in \check{F} \tau|_{\check{\beta}_n} = x$. Aplicando de nuevo 4.29 k) tenemos que existen $b_n \in F$ y $p_{n+1} \leq r \leq p_n$ de modo que $p_{n+1} \Vdash \tau|_{\check{\beta}_n} = \check{b}_n$. Tomando $\beta_{n+1} = \text{sop } p_{n+1}$ es claro que $p_{n+1}, \beta_{n+1}, \delta_n$ y b_n cumplen las propiedades anteriores.

Como $\beta_0 < \delta_0 < \beta_1 < \delta_1 < \dots$, se cumple que las sucesiones $\{\beta_n\}$ y $\{\delta_n\}$ tienen el mismo supremo γ . Sea $p' = \bigcup_{n \in \omega} p_n \in \mathbb{Q}$. Claramente $\text{sop } p' = \gamma$ y, como p' extiende a todas las condiciones p_n , resulta que $p' \Vdash \tau|_{\check{\beta}_n} = \check{b}_n$ para todo

$n \in \omega$. Considerando una extensión por un filtro que contenga a p' concluimos que cada b_{n+1} extiende a b_n , que $b' = \bigcup_{n \in \omega} b_n$ cumple $b' : \gamma \rightarrow 2$ y además que $p' \Vdash \tau|_{\gamma'} = b'$.

Como $\text{sop } p' = \gamma$, en p' no hay pares de la forma (γ, ϵ) , luego podemos extender p' a una condición s tal que $s(\gamma, \epsilon) = b'(\epsilon)$ para todo $\epsilon < \gamma$. De este modo $s \Vdash \tau|_{\tilde{\gamma}} = f_{\Gamma}^{\tilde{\gamma}}$. Además $s \leq p'$, luego $s \Vdash \sigma$ es c.n.a. en $\tilde{\omega}_1$ y para todo $n \in \omega$, se cumple que $s \Vdash \tilde{\delta}_n \in \sigma$. De aquí se sigue que $s \Vdash \tilde{\gamma} \in \sigma$.

En definitiva, $s \Vdash \bigvee \gamma \in \sigma \tau|_{\gamma} = f_{\Gamma}^{\tilde{\gamma}}$, cuando por otra parte $s \leq p$ y p fuerza lo contrario. Con esta contradicción queda probado $\diamond^{M[G]}$.

Si M cumple la hipótesis del continuo entonces \mathbb{P} cumple la c.c. \aleph_2 en M y, por consiguiente, conserva cardinales y cofinalidades (por 5.16). Además, $(|\mathbb{P}| = \aleph_1)^M$, el número M de anticadenas en \mathbb{P} es a lo sumo $(2^{\aleph_1})^M$ y si κ es un cardinal no numerable M , según (5.1), el número M de buenos nombres M para subconjuntos de $\tilde{\kappa}$ es a lo sumo $((2^{\aleph_1})^{\kappa})^M = (2^{\kappa})^M$. Según 5.20, esto implica que $(2^{\kappa})^{M[G]} \leq (2^{\kappa})^M$, y la otra desigualdad es obvia. Por lo tanto la función del continuo en M es la misma que en $M[G]$. ■

Capítulo IX

Extensiones iteradas

En 1971, R.M. Solovay y S. Tennenbaum probaron mediante una extensión genérica la consistencia de la hipótesis de Suslin. El argumento se basaba en las ideas siguientes. Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC y queremos conseguir una extensión genérica en la que no haya árboles de Suslin. De hecho basta con garantizar que no haya árboles de Suslin bien podados. Si $(A, \leq) \in M$ es un árbol de Suslin bien podado en M , entonces $\mathbb{P} = (A, \leq^*)$, donde $p \leq^* q \leftrightarrow q \leq p$, es un c.p.o. (con máximo) en el que los conjuntos $D_\alpha = \{p \in A \mid \text{alt}_A p \geq \alpha\}$ son densos. Además \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable. Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces A sigue siendo un \aleph_1 -árbol en $M[G]$, pero ya no es un árbol de Suslin, pues el conjunto $C = \{p \in A \mid \forall q \in G \ p \leq q\}$ es un camino en A .

Vemos así que para destruir un árbol de Suslin basta con ponerlo “copa abajo” y pasar a una extensión genérica. Ahora bien, con esto no garantizamos la hipótesis de Suslin, pues en M puede haber más árboles de Suslin o, lo que es peor, pueden aparecer nuevos árboles de Suslin en $M[G]$ que no estuvieran en M . Solovay y Tennenbaum resolvieron esto mediante una sucesión transfinita de extensiones genéricas en cada una de las cuales se destruía un árbol de Suslin mediante el procedimiento anterior. Esto requiere resultados sobre extensiones iteradas más potentes que los que empleamos para demostrar el teorema de Easton, pues ahora hemos de reducir a una única extensión genérica una sucesión de extensiones respecto a c.p.o.s que no están necesariamente en el modelo base, sino que aparecen gradualmente en los pasos intermedios. Dedicamos las primeras secciones a desarrollar esta teoría general de extensiones iteradas.

9.1 Productos generalizados

Sabemos que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y \mathbb{P}, \mathbb{Q} son dos c.p.o.s en M , entonces una extensión respecto a \mathbb{P} seguida de una extensión respecto a \mathbb{Q} es equivalente a una única extensión respecto al producto $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. El problema que abordamos ahora consiste básicamente en partir de un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$, de un filtro G \mathbb{P} -genérico sobre M y de un c.p.o. $\mathbb{Q} \in M[G]$. Hemos

de reducir una extensión por \mathbb{Q} de $M[G]$ a una única extensión de M . Para ello expresaremos $\mathbb{Q} = \pi_G$ y definiremos un c.p.o. $\mathbb{P} * \pi \in M$ que hará las veces de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. En realidad estas ideas han de ser precisadas en varios puntos. En primer lugar probamos un par de resultados técnicos que nos evitarán trabajar con clases propias de nombres.

Teorema 9.1 *Sea \mathbb{P} un c.p.o. y π un \mathbb{P} -nombre. Entonces existe un ordinal α tal que si σ es un \mathbb{P} -nombre y $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi$, entonces existe un \mathbb{P} -nombre $\sigma' \in V_\alpha$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = \{\sigma \in V^{\mathbb{P}} \mid \mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi\}$. No es difícil probar que, salvo en casos triviales, A es una clase propia, aunque no vamos a necesitar este hecho (en realidad es el inconveniente que hace que el teorema no sea trivial).

Para cada par de nombres $\sigma, \tau \in V^{\mathbb{P}}$, sea $D_{\sigma\tau} = \{p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \sigma = \tau\}$. Definimos $f : A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Dominio}(\pi) \times \mathcal{P}\mathbb{P})$ mediante

$$f(\sigma) = \{(\tau, D_{\sigma\tau}) \mid \tau \in \text{Dominio}(\pi)\}.$$

Vamos a ver que si $\sigma, \sigma' \in A$, entonces $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$ si y sólo si $f(\sigma) = f(\sigma')$. Una implicación es obvia. Respecto a la otra, si $\neg \mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$ pero $f(\sigma) = f(\sigma')$, entonces existe una condición $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \sigma \neq \sigma'$. Como $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi$, existen un $q \leq p$ y un $\tau \in \text{Dominio}(\pi)$ tales que $q \Vdash \sigma = \tau$, es decir,

$$q \in D_{\sigma\tau} = f(\sigma)(\tau) = f(\sigma')(\tau) = D_{\sigma'\tau},$$

con lo que también $q \Vdash \sigma' = \tau$ y así $q \Vdash \sigma = \sigma'$, mientras que p fuerza lo contrario.

Si escogemos una antiimagen para cada elemento del rango de f , obtenemos un subconjunto B de A tal que para todo $\sigma \in A$ existe un $\sigma' \in B$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$. Basta tomar un α tal que $B \in V_\alpha$. ■

Definición 9.2 *Sea \mathbb{P} un c.p.o. y π un \mathbb{P} -nombre. Sea α el mínimo ordinal que cumple el teorema anterior. Llamaremos $\hat{\pi} = \{\sigma \in V_\alpha \mid \sigma \in V^{\mathbb{P}} \wedge \mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi\}$.*

Teorema 9.3 *Sea \mathbb{P} un c.p.o. y π un \mathbb{P} -nombre.*

- $\hat{\pi}$ es un conjunto de \mathbb{P} -nombres tal que si $\sigma \in \hat{\pi}$ entonces $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi$.
- Si $\hat{\pi} \neq \emptyset$, σ es un \mathbb{P} -nombre y $p \Vdash \sigma \in \pi$, entonces existe un $\sigma' \in \hat{\pi}$ de manera que $p \Vdash \sigma = \sigma'$.
- En particular si $\phi(x)$ es una fórmula quizá con más variables libres, $\hat{\pi} \neq \emptyset$ y $p \Vdash \forall x \in \pi \phi(x)$ (donde las demás variables de ϕ se interpretan como \mathbb{P} -nombres cualesquiera), existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \phi(\sigma)$.

DEMOSTRACIÓN: a) es inmediato por la definición de $\hat{\pi}$.

b) Notemos que $\mathbb{1} \Vdash \forall x \in \pi (\sigma \in \pi \rightarrow \sigma = x)$. Aquí usamos que, como $\hat{\pi} \neq \emptyset$, se cumple que $\mathbb{1} \Vdash \forall x x \in \pi$.

Por el teorema 4.38 existe $\rho \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbf{1} \Vdash \rho \in \pi \wedge (\sigma \in \pi \rightarrow \sigma = \rho)$. En particular $\mathbf{1} \Vdash \rho \in \pi$, luego por el teorema anterior existe un $\sigma' \in \hat{\pi}$ tal que $\mathbf{1} \Vdash \sigma = \sigma'$, de donde también $\mathbf{1} \Vdash (\sigma \in \pi \rightarrow \sigma = \sigma')$. Claramente entonces $p \Vdash \sigma = \sigma'$.

c) Si $p \Vdash \bigvee x \in \pi \phi(x)$, por 4.38 existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \sigma' \in \pi \wedge \phi(\sigma')$. Por b) existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \sigma' = \sigma$, luego $p \Vdash \phi(\sigma)$. ■

En definitiva, $\hat{\pi}$ es un conjunto con nombres suficientes para nombrar a cualquier posible elemento de π en una extensión genérica. Ahora ya podemos definir un producto generalizado entre un c.p.o. y el nombre de otro c.p.o. que no esté necesariamente en el modelo base.

Definición 9.4 Sea \mathbb{P} un c.p.o. Un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. es una terna (π, π', π'') de \mathbb{P} -nombres tales que $\pi'' \in \hat{\pi}$ y $\mathbf{1} \Vdash (\pi, \pi', \pi'')$ es un c.p.o.

En la práctica escribiremos \leq_{π} o simplemente \leq en lugar de π' y $\mathbf{1}_{\pi}$ o simplemente $\mathbf{1}$ en lugar de π'' . Si no hay confusión escribiremos π en lugar de $(\pi, \leq_{\pi}, \mathbf{1}_{\pi})$.

Sea \mathbb{P} un c.p.o. y π un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. Definimos $\mathbb{P} * \pi$ como el producto cartesiano $\mathbb{P} \times \hat{\pi}$ con el preorden dado por

$$(p, \sigma) \leq (q, \tau) \leftrightarrow p \leq q \wedge p \Vdash \sigma \leq_{\pi} \tau.$$

Es fácil ver que el *producto generalizado* $\mathbb{P} * \pi$ es ciertamente un c.p.o. con máximo $\mathbf{1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}_{\pi})$. Notemos que el preorden no es antisimétrico.

Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y $\pi \in M$ es un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. ^{M} , por simplicidad escribiremos $\hat{\pi}$ en lugar de $\hat{\pi}^M$ y $\mathbb{P} * \pi$ en lugar de $(\mathbb{P} * \pi)^M = \mathbb{P} \times \hat{\pi}^M$, pero hemos de tener presente que estos conceptos no son absolutos.

Aún no es evidente que estos conceptos recojan realmente la situación que queríamos estudiar. Los teoremas siguientes lo ponen de manifiesto.

Teorema 9.5 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y sea π un nombre para un c.p.o. ^{M} . Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $\mathbb{Q} = \pi_G$. Entonces $(\mathbb{Q}, \leq_{\pi_G}, \mathbf{1}_{\pi_G})$ es un c.p.o. tal que todo $q \in \mathbb{Q}$ es de la forma $q = \sigma_G$, donde $\sigma \in \hat{\pi}$.

DEMOSTRACIÓN: Notemos que $\hat{\pi} \neq \emptyset$ porque por definición $\mathbf{1}_{\pi} \in \hat{\pi}$, luego siempre podemos aplicar el teorema 9.3. Sea $q = \rho_G$, para cierto $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Obviamente $\mathbf{1} \Vdash \bigvee x \in \pi (\rho \in \pi \rightarrow x = \rho)$. Por 9.3 c) existe $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que

$$\mathbf{1} \Vdash (\rho \in \pi \rightarrow \sigma = \rho).$$

En particular esto es cierto en $M[G]$, es decir, $q \in \mathbb{Q} \rightarrow \sigma_G = q$ y por consiguiente $q = \sigma_G$. ■

Todavía falta probar que la definición que hemos dado de nombre para un c.p.o. no es restrictiva, en el sentido de que todo c.p.o. en una extensión genérica admite un nombre en esas condiciones.

Teorema 9.6 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y sea $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}, \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) \in M[G]$ un c.p.o. Entonces existe un buen nombre para un c.p.o. $(\pi, \leq_{\pi}, \mathbf{1}_{\pi}) \in M$ tal que $\mathbb{Q} = \pi_G$, $\leq_{\mathbb{Q}} = \leq_{\pi G}$ y $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = \mathbf{1}_{\pi G}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathbb{Q} = \rho_G$, $\leq_{\mathbb{Q}} = \rho'_G$, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = \rho''_G$. Entonces

$$\mathbb{1} \Vdash \forall xyz((x, y, z) \text{ es un c.p.o.} \wedge ((\rho, \rho', \rho'') \text{ es un c.p.o.} \rightarrow (\rho, \rho', \rho'') = (x, y, z))),$$

luego por 4.38 existen $\pi, \pi', \pi'' \in M^{\mathbb{P}}$ tales que

$$\mathbb{1} \Vdash (\pi, \pi', \pi'') \text{ es un c.p.o.} \wedge ((\rho, \rho', \rho'') \text{ es un c.p.o.} \rightarrow (\rho, \rho', \rho'') = (\pi, \pi', \pi'')).$$

En particular $\mathbf{1} \Vdash \pi'' \in \pi$, luego por 9.3 existe $\mathbf{1}_{\pi} \in \hat{\pi}$ tal que $\mathbf{1} \Vdash \pi'' = \mathbf{1}_{\pi}$. Esto nos permite sustituir π'' por $\mathbf{1}_{\pi}$ en la fórmula anterior. Llamando $\leq_{\pi} = \pi'$ tenemos que $(\pi, \leq_{\pi}, \mathbf{1}_{\pi})$ es un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. y

$$\mathbb{1} \Vdash ((\rho, \rho', \rho'') \text{ es un c.p.o.} \rightarrow (\rho, \rho', \rho'') = (\pi, \leq_{\pi}, \mathbf{1}_{\pi})).$$

Obviamente entonces $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}, \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) = (\pi_G, \leq_{\pi G}, \mathbf{1}_{\pi G})$. ■

Nuestra intención es probar que si, en las condiciones del teorema anterior, tenemos también un filtro H \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G]$, entonces la extensión $M[G][H]$ puede reducirse a una única extensión genérica de M respecto al producto $\mathbb{P} * \pi$. Demostramos un resultado previo:

Teorema 9.7 *Sea \mathbb{P} un c.p.o. y π un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. Entonces la aplicación $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} * \pi$ dada por $i(p) = (p, \mathbf{1}_{\pi})$ es una inmersión completa y cumple $i(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que i es una inmersión que cumple $i(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Dado $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi$, se cumple que p es una reducción de (p, σ) a \mathbb{P} , pues si $p' \leq p$, entonces $(p', \sigma) \leq (p, \sigma) \wedge (p', \sigma) \leq (p', \mathbf{1})$, luego $i(p')$ es compatible con (p, σ) . ■

Ahora demostramos los dos teoremas fundamentales sobre productos generalizados. Necesitamos la siguiente definición, que generaliza la noción de producto cartesiano de filtros genéricos.

Definición 9.8 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y π un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. ^{M} . Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $H \subset \pi_G$. Definimos $G * H = \{(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi \mid p \in G \wedge \sigma_G \in H\}$.*

Teorema 9.9 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea π un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. ^{M} e $i \in M$ la inmersión completa natural de \mathbb{P} en $\mathbb{P} * \pi$. Sea K un filtro $\mathbb{P} * \pi$ -genérico sobre M , sea $G = i^{-1}[K]$ y sea $H = \{\sigma_G \mid \sigma \in \hat{\pi} \wedge \forall p \in \mathbb{P} (p, \sigma) \in K\}$. Entonces G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , H es un filtro π_G -genérico sobre $M[G]$, $K = G * H$ y $M[K] = M[G][H]$.*

DEMOSTRACIÓN: Como i es una inmersión completa, por 6.3 sabemos que G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Sea $\mathbb{Q} = \pi_G$. También sabemos que \mathbb{Q} es un c.p.o. en $M[G]$. Veamos que H es un filtro en \mathbb{Q} . Como $(\mathbf{1}_\mathbb{P}, \mathbf{1}_\pi) \in K$, se cumple que $\mathbf{1}_\mathbb{Q} = \mathbf{1}_{\pi_G} \in H$.

Sean $\sigma_G \in H$, $\tau_G \in \mathbb{Q}$ tales que $\sigma_G \leq \tau_G$ (podemos suponer que $\sigma, \tau \in \hat{\pi}$). Por definición de H existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $(q, \sigma) \in K$. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma \leq \tau$. Entonces $i(p) = (p, \mathbf{1}) \in K$. Sea $(r, \rho) \in K$ tal que $(r, \rho) \leq (p, \mathbf{1})$ y $(r, \rho) \leq (q, \sigma)$.

Como $r \leq p$ se cumple que $r \Vdash \sigma \leq \tau$ y como $(r, \rho) \leq (q, \sigma)$ también $r \Vdash \rho \leq \sigma$, luego $r \Vdash \rho \leq \tau$, de donde $(r, \rho) \leq (r, \tau)$. Por consiguiente $(r, \tau) \in K$ y $\tau_G \in H$.

Sean ahora $\sigma_G, \tau_G \in H$, es decir, $\sigma, \tau \in \hat{\pi}$ y existen $q, q' \in \mathbb{P}$ tales que $(q, \sigma), (q', \tau) \in K$. Sea $(r, \rho) \in K$ tal que $(r, \rho) \leq (q, \sigma)$ y $(r, \rho) \leq (q', \tau)$. Entonces $(r, \rho) \leq (r, \mathbf{1})$, luego $i(r) = (r, \mathbf{1}) \in K$ y por consiguiente $r \in G$. Como $(r, \rho) \leq (q, \sigma)$, se cumple que $r \Vdash \rho \leq \sigma$, de donde $\rho_G \leq \sigma_G$, e igualmente $\rho_G \leq \tau_G$. Como $(r, \rho) \in K$ se cumple que $\rho_G \in H$.

Seguidamente probamos que H es \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G]$. Para ello tomamos $D \in M[G]$ denso en \mathbb{Q} . Sea $\delta \in M^\mathbb{P}$ tal que $D = \delta_G$. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash \delta$ es denso en π . Sea

$$D' = \{(q, \tau) \in \mathbb{P} * \pi \mid q \Vdash \tau \in \delta\} \in M.$$

Veamos que D' es denso bajo $(p, \mathbf{1})$. Si $(q, \sigma) \leq (p, \mathbf{1})$, entonces $q \leq p$, luego $q \Vdash \delta$ es denso en π . También $q \Vdash \sigma \in \pi$, luego $q \Vdash \bigvee x \in \pi (x \in \delta \wedge x \leq \sigma)$. Por 9.3 existe un $\rho \in \hat{\pi}$ tal que $q \Vdash \rho \in \delta \wedge \rho \leq \sigma$. Es claro entonces que $(q, \rho) \in \mathbb{P} * \pi$, $(q, \rho) \leq (q, \sigma)$ y $(q, \rho) \in D'$.

Como $(p, \mathbf{1}) = i(p) \in K$, existe un $(q, \tau) \in K \cap D'$, y así $\tau_H \in H \cap D \neq \emptyset$.

Veamos ahora que $K = G * H$. Si $(p, \sigma) \in K$, entonces $\sigma_G \in H$ y, como $(p, \sigma) \leq (p, \mathbf{1})$ también $(p, \mathbf{1}) \in K$, luego $p \in G$. En consecuencia $(p, \sigma) \in G * H$.

Recíprocamente, si $(p, \sigma) \in G * H$, entonces $p \in G$, $\sigma \in \hat{\pi}$ y $\sigma_G \in H$. Esto último implica que existen $\sigma' \in \hat{\pi}$ y $q \in \mathbb{P}$ de modo que $\sigma_G = \sigma'_G$ y $(q, \sigma') \in K$.

Sea $q' \in G$ tal que $q' \Vdash \sigma = \sigma'$. Entonces $i(q') = (q', \mathbf{1}) \in K$. Sea $(r, \tau) \in K$ tal que $(r, \tau) \leq (q, \sigma')$ y $(r, \tau) \leq (q', \mathbf{1})$. Tenemos que $r \Vdash \tau \leq \sigma'$ y $r \Vdash \sigma = \sigma'$, luego $r \Vdash \tau \leq \sigma$, $(r, \tau) \leq (q, \sigma)$ y $(q, \sigma) \in K$. Ahora $(p, \mathbf{1}) \in K$ y $(q, \sigma) \in K$, luego existe un $(s, \rho) \in K$ tal que $(s, \rho) \leq (p, \mathbf{1})$, $(s, \rho) \leq (q, \sigma)$, con lo que $s \leq p$ y $s \Vdash \rho \leq \sigma$. Por consiguiente $(s, \rho) \leq (p, \sigma)$ y concluimos que $(p, \sigma) \in K$.

Es claro que $G, H \in M[K]$, luego $M[G][H] \subset M[K]$. Así mismo es claro que $K = G * H \in M[G][H]$, luego $M[K] \subset M[G][H]$. Esto nos da la igualdad. ■

Teorema 9.10 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC Y π un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o.^M. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , sea $\mathbb{Q} = \pi_G$ y sea H un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G]$. Entonces $K = G * H$ es un filtro $\mathbb{P} * \pi$ -genérico sobre M y los filtros G y H construidos en en teorema anterior a partir de K son los dados. Por lo tanto $M[K] = M[G][H]$.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \in K$.

Tomemos pares $(p, \sigma), (p', \sigma') \in K$. Entonces $p, p' \in G$ y $\sigma_G, \sigma'_G \in H$. Por lo tanto existen $q \in G$ y $h \in H$ tales que $q \leq p, q \leq p', h \leq \sigma_G, h \leq \sigma'_G$. Por 9.3 se cumple que $h = \tau_G$, con $\tau \in \hat{\pi}$. Sea $q \in \mathbb{P}$ tal que $q' \Vdash \tau \leq \sigma \wedge \tau \leq \sigma'$. Podemos tomar $q' \leq q$. Entonces $(q', \tau) \in K, (q', \tau) \leq (p, \sigma)$ y $(q', \tau) \leq (p', \sigma')$.

Ahora suponemos que $(p, \sigma) \in K, (p', \sigma') \in \mathbb{P} * \pi$ y $(p, \sigma) \leq (p', \sigma')$. Entonces $p \in G$ y $p \leq p'$, luego $p' \in G$. Por otra parte $p \Vdash \sigma \leq \sigma'$, luego $\sigma_G \leq \sigma'_G$ y, como $\sigma_G \in H$, también $\sigma'_G \in H$, de donde $(p', \sigma') \in K$.

Para probar que K es genérico tomamos un conjunto $D \in M$ denso en $\mathbb{P} * \pi$. Sea

$$D^* = \{\sigma_G \mid \sigma \in \hat{\pi} \wedge \forall p \in G (p, \sigma) \in D\} \in M[G].$$

Vamos a probar que D^* es denso en \mathbb{Q} . Para ello tomamos $q = \tau_G \in \mathbb{Q}$. Podemos suponer que $\tau \in \hat{\pi}$. Definimos

$$D' = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall \sigma \in \hat{\pi} (p \Vdash \sigma \leq \tau \wedge (p, \sigma) \in D)\} \in M.$$

Se cumple que D' es denso en \mathbb{P} , pues si $t \in \mathbb{P}$, entonces $(t, \tau) \in \mathbb{P} * \pi$, luego existe un $(p, \sigma) \in D$ tal que $(p, \sigma) \leq (t, \tau)$, luego $p \leq t$ y $p \in D'$.

Tomemos, pues, $p \in D' \cap G$. Sea $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \sigma \leq \tau \wedge (p, \sigma) \in D$. Entonces $\sigma_G \leq \tau_G = q$ y $\sigma_G \in D^*$. Esto prueba la densidad de D^* .

Por consiguiente podemos tomar un $\sigma_G \in D^* \cap H$. Así, existe un $p \in G$ tal que $(p, \sigma) \in D$ y, en consecuencia, $(p, \sigma) \in D \cap K$.

Así queda probado que K es $\mathbb{P} * \pi$ -genérico sobre M . Se comprueba inmediatamente que G y H son los filtros construidos en el teorema anterior a partir de K . ■

Estos teoremas generalizan claramente al teorema del producto que vimos en el capítulo VI.

Ejercicio: Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} dos c.p.o.s. Probar que existe una inmersión densa de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$.

Para probar la consistencia de la hipótesis de Suslin hemos de aplicar estos resultados a c.p.o.s que no son sino posibles árboles de Suslin puestos del revés. En realidad los aplicaremos en un contexto ligeramente distinto, pero siempre a c.p.o.s que cumplen la condición de cadena numerable. Terminaremos esta sección demostrando que las condiciones de cadena se conservan bajo hipótesis naturales al formar productos generalizados. Para ello necesitamos un hecho técnico.

Teorema 9.11 *Sea κ un cardinal regular y \mathbb{P} un c.p.o. que cumpla la c.c.κ. Sea $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbf{1} \Vdash (\sigma \subset \check{\kappa} \wedge |\sigma| < \check{\kappa})$. Entonces existe un $\beta < \kappa$ tal que $\mathbf{1} \Vdash \sigma \subset \check{\beta}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de reflexión 1.27, basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea

$$E = \{\alpha < \kappa \mid \forall p \in \mathbb{P} p \Vdash \check{\alpha} \text{ es el supremo de } \sigma\} \in M.$$

Por el axioma de elección^M existe $\{p_\alpha\}_{\alpha \in E} \in M$ tal que, para cada $\alpha \in E$ se cumple que $p_\alpha \Vdash \check{\alpha}$ es el supremo de σ . Es claro que si $\alpha \neq \beta$ entonces $p_\alpha \perp p_\beta$, pues ambas condiciones fuerzan fórmulas contradictorias. Así, la aplicación $\alpha \mapsto p_\alpha$ es inyectiva y su imagen es una anticadena en \mathbb{P} . Por hipótesis $|E|^M < \kappa$. Como κ es regular^M, existe un $\beta < \kappa$ tal que $E \subset \beta$.

Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , como \mathbb{P} cumple la c.c. κ en M , tenemos que \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades $\geq \kappa$, luego κ es un cardinal regular^{M[G]}. Por hipótesis $\sigma_G \subset \kappa$ y $|\sigma_G|^{M[G]} < \kappa$. Por consiguiente, el supremo α de σ_G cumple $\alpha < \kappa$. Existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \check{\alpha}$ es el supremo de σ , luego $\alpha \in E$ y por tanto $\alpha < \beta$, es decir, $\sigma_G \subset \beta$. ■

Teorema 9.12 *Sea κ un cardinal regular, sea \mathbb{P} un c.p.o. que cumpla la c.c. κ y sea π un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ cumple la c.c. $\check{\kappa}$. Entonces $\mathbb{P} * \pi$ cumple la c.c. κ .*

DEMOSTRACIÓN: Como en el teorema anterior, basta probar la relativización de este teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Supongamos que existe una anticadena en $\mathbb{P} * \pi$ con κ elementos: $\{(p_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha < \kappa} \in M$. Sea $\sigma = \{(\check{\alpha}, p_\alpha) \mid \alpha < \kappa\} \in M^{\mathbb{P}}$. Claramente $\mathbb{1} \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$.

Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces

$$\sigma_G = \{\alpha < \kappa \mid p_\alpha \in G\} \in M[G].$$

Sea $W = \{\tau_{\alpha G} \mid \alpha \in \sigma_G\} \in M[G]$. Veamos que si $\alpha, \beta \in \sigma_G$, $\alpha \neq \beta$, entonces $\tau_{\alpha G} \perp \tau_{\beta G}$. En efecto, supongamos que existe $\rho_G \in \pi_G$ (con $\rho \in \hat{\pi}$) tal que $\rho_G \leq \tau_{\alpha G}$ y $\rho_G \leq \tau_{\beta G}$. Tomemos entonces $q \in G$ tal que $q \Vdash \rho \leq \tau_\alpha \wedge \rho \leq \tau_\beta$. Como $\alpha, \beta \in \sigma_G$, ha de ser $p_\alpha, p_\beta \in G$, luego podemos tomar $q \leq p_\alpha \wedge q \leq p_\beta$. Así $(q, \rho) \leq (p_\alpha, \tau_\alpha) \wedge (q, \rho) \leq (p_\beta, \tau_\beta)$, en contradicción con que estos pares forman parte de una anticadena.

Por hipótesis $|\sigma_G|^{M[G]} = |W|^{M[G]} < \kappa$, pues W es una anticadena en π_G y éste cumple la c.c. κ en $M[G]$.

Con esto hemos probado que $\mathbb{1} \Vdash (\sigma \subset \check{\kappa} \wedge |\sigma| < \check{\kappa})$ y por el teorema anterior existe un $\beta < \kappa$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma \subset \check{\beta}$, pero por definición de σ tenemos que $p_\beta \Vdash \check{\beta} \in \sigma$, contradicción. ■

Ejercicio: Probar que si \mathbb{P} y \mathbb{Q} son dos c.p.o.s y κ es un cardinal regular, entonces $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ cumple la c.c. κ si y sólo si \mathbb{P} cumple la c.c. κ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\mathbb{Q}}$ cumple la c.c. $\check{\kappa}$.

Podríamos probar un resultado similar para la propiedad de ser κ -cerrado, pero como vamos a trabajar con c.p.o.s con la condición de cadena numerable no nos va a ser necesario.

9.2 Iteraciones de preórdenes

Los resultados de la sección anterior nos permiten reducir un número finito de extensiones genéricas sucesivas a una única extensión (aunque los c.p.o.s

utilizados no estén todos en el modelo de partida). Por conveniencia podemos suponer en primer lugar la extensión trivial producida con el c.p.o. $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$ (es trivial porque todos los \mathbb{P} -nombres son canónicos). Un \mathbb{P}_0 -nombre para un c.p.o. es de la forma $\pi_0 = \dot{\mathbb{Q}}$, donde \mathbb{Q} es un cierto c.p.o. en el modelo base. El producto $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_0 * \pi_0$ es equivalente a \mathbb{Q} , en el sentido de que hay una inmersión densa natural de \mathbb{Q} en \mathbb{P}_1 . Ahora tomamos un \mathbb{P}_1 -nombre π_1 para un c.p.o. y formamos el producto $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1 * \pi_1 = (\mathbb{P}_0 * \pi_0) * \pi_1$. Tomamos un \mathbb{P}_2 -nombre π_2 para un c.p.o. y formamos el producto $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_2 * \pi_2 = ((\mathbb{P}_0 * \pi_0) * \pi_1) * \pi_2$, y así sucesivamente.

Notemos que un elemento de \mathbb{P}_3 es de la forma $(\emptyset, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$. A la hora de generalizar esta construcción a un producto infinito conviene sustituir las n -tuplas que se obtienen de este modo por sucesiones, de modo que podemos identificar a la cuádrupla $(\emptyset, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ con la sucesión $\{(0, \sigma_0), (1, \sigma_1), (2, \sigma_2)\}$. Esto no supone más que pasar de un c.p.o. a otro semejante. De este modo, la generalización al caso infinito consiste esencialmente en considerar sucesiones transfinitas en lugar de sucesiones finitas. En realidad en los términos correspondientes a ordinales límite tenemos cierta libertad de decisión, tal y como se refleja en la definición siguiente:

Definición 9.13 Sea α un ordinal. Una *iteración de preórdenes* de longitud α es un par $(\{\mathbb{P}_\delta, \leq_{\mathbb{P}_\delta}, \mathbf{1}_{\mathbb{P}_\delta}\}_{\delta < \alpha}, \{\pi_\delta, \leq_{\pi_\delta}, \mathbf{1}_{\pi_\delta}\}_{\delta < \alpha})$ que cumpla las condiciones siguientes:

- a) Cada $(\mathbb{P}_\delta, \leq_{\mathbb{P}_\delta}, \mathbf{1}_{\mathbb{P}_\delta})$ es un c.p.o. cuyos elementos son funciones de dominio δ , de modo que si $\delta < \epsilon \leq \alpha$ y $p \in \mathbb{P}_\epsilon$, entonces $p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta$. En particular $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$.
- b) Cada $(\pi_\delta, \leq_{\pi_\delta}, \mathbf{1}_{\pi_\delta})$ es un \mathbb{P}_δ -nombre para un c.p.o. Si $p \in \mathbb{P}_\delta$, se cumple

$$\bigwedge \epsilon < \delta \ p(\epsilon) \in \hat{\pi}_\epsilon \quad \text{y} \quad \bigwedge \epsilon < \delta \ \mathbf{1}_{\mathbb{P}_\delta}(\epsilon) = \mathbf{1}_{\pi_\epsilon}.$$

- c) Si p es una función de dominio $\delta + 1$,

$$p \in \mathbb{P}_{\delta+1} \leftrightarrow p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta \wedge p(\delta) \in \hat{\pi}_\delta.$$

Si $p, p' \in \mathbb{P}_{\delta+1}$, entonces

$$p \leq p' \leftrightarrow p|_\delta \leq p'_\delta \wedge p|_\delta \Vdash p(\delta) \leq_{\pi_\delta} p'(\delta).$$

- d) Si $\lambda \leq \alpha$ es un ordinal límite se da una de las posibilidades siguientes, donde, en general, si p es una función de dominio δ llamaremos *soporte* de p al conjunto $\text{sop } p = \{\epsilon < \delta \mid p(\epsilon) \neq \mathbf{1}_{\pi_\epsilon}\}$.

1. Para toda función p de dominio λ

$$p \in \mathbb{P}_\lambda \leftrightarrow \bigwedge \delta < \lambda \ p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta \wedge \bigvee \delta < \lambda \ \text{sop } p \subset \delta.$$

En tal caso diremos que \mathbb{P}_λ es el *límite directo* del sistema $\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta < \lambda}$.

2. Para toda función p de dominio λ

$$p \in \mathbb{P}_\lambda \leftrightarrow \bigwedge \delta < \lambda \ p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta.$$

En tal caso diremos que \mathbb{P}_λ es el *límite inverso* del sistema $\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta < \lambda}$.

En cualquiera de los dos casos, si $p, p' \in \mathbb{P}_\lambda$, entonces

$$p \leq p' \leftrightarrow \bigwedge \delta < \lambda \ p|_\delta \leq p'|_\delta.$$

Notemos que la condición c) afirma que la aplicación $p \mapsto (p|_\delta, p(\delta))$ es una semejanza entre $\mathbb{P}_{\delta+1}$ y $\mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$. En la práctica, para definir una iteración de preórdenes sólo hemos de determinar π_δ supuestos definidos $\{\mathbb{P}_\epsilon\}_{\epsilon \leq \delta}$ y $\{\pi_\epsilon\}_{\epsilon < \delta}$ y especificar qué tipo de límite se toma en cada ordinal límite.

Las iteraciones con límites directos (es decir, las iteraciones en las que todos los \mathbb{P}_λ son el límite directo de los c.p.o.s anteriores) se llaman también iteraciones *con soportes finitos*, pues es fácil ver que el apartado d) equivale en tal caso a

$$p \in \mathbb{P}_\lambda \leftrightarrow \bigwedge \delta < \lambda \ p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta \wedge \text{sop } p \text{ es finito.}$$

En las condiciones de la definición anterior, si $\epsilon \leq \delta \leq \alpha$, definimos la aplicación $i_{\epsilon\delta} : \mathbb{P}_\epsilon \longrightarrow \mathbb{P}_\delta$ de modo que si $p \in \mathbb{P}_\epsilon$ entonces

$$i_{\epsilon\delta}(p)|_\epsilon = p \wedge \bigwedge \gamma (\epsilon \leq \gamma < \delta \rightarrow i_{\epsilon\delta}(p)(\gamma) = \mathbb{1}|_{\pi_\gamma}).$$

Una simple inducción sobre δ prueba que, en efecto, $i_{\epsilon\delta}(p) \in \mathbb{P}_\delta$. Notemos que $i_{\delta\delta}$ es la identidad y que $i_{\delta\delta+1}$ se corresponde a través de la semejanza $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$ con la inmersión completa natural $p \mapsto (p, \mathbb{1})$.

Veamos ahora algunas propiedades elementales de las iteraciones de preórdenes.

Teorema 9.14 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ una iteración de preórdenes y consideremos ordinales $\epsilon \leq \delta \leq \gamma \leq \alpha$.*

a) $i_{\epsilon\gamma} = i_{\epsilon\delta} \circ i_{\delta\gamma}$.

b) $i_{\epsilon\delta}(\mathbb{1}|_{\mathbb{P}_\epsilon}) = \mathbb{1}|_{\mathbb{P}_\delta}$.

c) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\delta (p \leq p' \rightarrow p|_\epsilon \leq p'|_\epsilon)$.

d) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\epsilon (p \leq p' \leftrightarrow i_{\epsilon\delta}(p) \leq i_{\epsilon\delta}(p'))$.

e) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\delta (p|_\epsilon \perp p'|_\epsilon \rightarrow p \perp p')$.

f) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\delta (\text{sop } p \cap \text{sop } p' \subset \epsilon \rightarrow (p|_\epsilon \perp p'|_\epsilon \leftrightarrow p \perp p'))$.

g) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\epsilon (p \perp p' \leftrightarrow i_{\epsilon\delta}(p) \perp i_{\epsilon\delta}(p'))$.

h) $i_{\epsilon\delta} : \mathbb{P}_\epsilon \longrightarrow \mathbb{P}_\delta$ es una inmersión completa.

DEMOSTRACIÓN: a) y b) son inmediatas, c) y d) se prueban fácilmente por inducción sobre δ , e) es consecuencia de c).

Una implicación de f) se da por e), luego sólo hemos de probar que si $p \perp p'$ entonces $p|_\epsilon \perp p'|_\epsilon$. Supongamos que existe $p'' \in \mathbb{P}_\epsilon$ tal que $p'' \leq p|_\epsilon$ y $p'' \leq p'|_\epsilon$. Sea p^* la función de dominio δ dada por $p^*|_\epsilon = p''$ y, para todo ordinal γ tal que $\epsilon \leq \gamma < \delta$

$$p^*(\gamma) = \begin{cases} p(\gamma) & \text{si } \gamma \in \text{sop } p, \\ p'(\gamma) & \text{si } \gamma \in \text{sop } p', \\ \mathbb{1}_{\pi_\gamma} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La hipótesis sobre los soportes hace que p^* esté bien definida y una simple inducción sobre γ demuestra que si $\epsilon \leq \gamma \leq \delta$ entonces

$$p^*|_\gamma \in \mathbb{P}_\gamma \wedge p^*|_\gamma \leq p|_\gamma \wedge p^*|_\gamma \leq p'|_\gamma.$$

En particular $p^* \in \mathbb{P}_\delta \wedge p^* \leq p \wedge p^* \leq p'$, luego p y p' son compatibles.

g) es un caso particular de f), pues $\text{sop } i_{\epsilon\delta}(p) = \text{sop } p \subset \epsilon$.

h) Por d) y g) tenemos que $i_{\epsilon\delta}$ es una inmersión. Si $p \in \mathbb{P}_\delta$ entonces $p|_\epsilon$ es una reducción de p a \mathbb{P}_ϵ , pues si $q \leq p|_\epsilon$ entonces $i_{\epsilon\delta}(q)|_\epsilon = q$, luego $\neg i_{\epsilon\delta}(q)|_\epsilon \perp p|_\epsilon$ y, por f), $\neg i_{\epsilon\delta}(q) \perp p$. ■

Es inmediato comprobar que las iteraciones de preórdenes dan lugar a sucesiones transfinitas de extensiones genéricas:

Teorema 9.15 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, y consideremos una iteración de preórdenes^M $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta < \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$. Sea G un filtro \mathbb{P}_α -genérico sobre M . Para cada $\delta \leq \alpha$ sea $G_\delta = i_{\delta\alpha}^{-1}[G]$. Entonces G_δ es un filtro \mathbb{P}_δ -genérico sobre M y si $\delta \leq \epsilon \leq \alpha$ entonces $M[G_\delta] \subset M[G_\epsilon]$. Además si llamamos $\mathbb{Q}_\delta = \pi_\delta G_\delta \in M[G_\delta]$ y $H_\delta = \{\rho_{G_\delta} \mid \rho \in \hat{\pi}_\delta \wedge \bigvee p \in \mathbb{P}_\delta p \cup \{(\delta, \rho)\} \in G_{\delta+1}\}$, entonces tenemos que \mathbb{Q}_δ es un c.p.o., H_δ es un filtro \mathbb{Q}_δ -genérico sobre $M[G_\delta]$ y $M[G_{\delta+1}] = M[G_\delta][H_\delta]$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $i_{\delta\alpha} \in M$ es una inmersión completa, el teorema 6.3 nos da que G_δ es \mathbb{P}_δ -genérico sobre M . Evidentemente, $G_\delta = i_{\delta\epsilon}^{-1}[G_\epsilon]$, luego este mismo teorema nos da la inclusión $M[G_\delta] \subset M[G_\epsilon]$.

Se cumple que \mathbb{Q}_δ es un c.p.o. por la definición de buen nombre para un c.p.o. Claramente H_δ se corresponde a través de la semejanza $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$ con el filtro considerado en el teorema 9.9, luego H_δ es un filtro \mathbb{Q}_δ -genérico sobre $M[G_\delta]$ y $M[G_{\delta+1}] = M[G_\delta][H_\delta]$. ■

Así pues, en las condiciones del teorema anterior tenemos una sucesión de extensiones genéricas

$$M = M[G_0] \subset M[G_1] \subset M[G_2] \subset \cdots \subset M[G_\omega] \subset M[G_{\omega+1}] \subset \cdots$$

de modo que cada $M[G_{\delta+1}]$ es una extensión genérica de $M[G_\delta]$.

Notemos que si \mathbb{P}_λ es límite directo de los c.p.o.s anteriores, entonces

$$\mathbb{P}_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} i_{\delta\lambda}[\mathbb{P}_\delta] \quad \text{y} \quad G_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} i_{\delta\lambda}[G_\delta].$$

Podría conjeturarse que $M[G_\lambda] = \bigcup_{\delta < \lambda} M[G_\delta]$, pero esto es falso incluso en los casos más simples. Lo máximo que tenemos a este respecto es el teorema siguiente:

Teorema 9.16 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\lambda \in M$ un ordinal límite y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta < \lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \lambda})$ una iteración de preórdenes en M tal que \mathbb{P}_λ sea límite directo. Sea G un filtro \mathbb{P}_λ -genérico sobre M . Supongamos que $S \in M$, $X \in M[G]$, $X \subset S$ y $(|S| < \text{cf } \lambda)^{M[G]}$. Entonces existe un $\delta < \lambda$ tal que $X \in M[G_\delta]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\sigma \in M^{\mathbb{P}_\lambda}$ tal que $X = \sigma_G$. Claramente, si $s \in S$, se cumple

$$s \in X \leftrightarrow \bigvee p \in G \ p \Vdash \check{s} \in \sigma.$$

Como \mathbb{P}_λ es límite directo, podemos formar $\{\delta_s\}_{s \in X} \in M[G]$ de modo que si $s \in X$, entonces $\delta_s < \lambda$ y $\bigvee p \in G_{\delta_s} \ i_{\delta_s \lambda}(p) \Vdash \check{s} \in \sigma$. (Aquí usamos que $p \Vdash \sigma \in \tau$ es absoluta para modelos transitivos de ZF.)

Sea $\delta = \bigcup_{s \in X} \delta_s \in M[G]$. Por la hipótesis sobre S tenemos que $\delta < \lambda$. Entonces

$$X = \{s \in S \mid \bigvee p \in G_\delta \ i_{\delta \lambda}(p) \Vdash \check{s} \in \sigma\} \in M[G_\delta].$$

■

Terminamos la sección generalizando el teorema 9.12 sobre condiciones de cadena a iteraciones de preórdenes.

Teorema 9.17 *Sea κ un cardinal regular no numerable y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ una iteración de preórdenes con soportes finitos tal que para todo $\delta < \alpha$ se cumpla que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ cumple la c.c.κ̄. Entonces para todo $\delta \leq \alpha$ tenemos que \mathbb{P}_δ cumple la c.c.κ.*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre δ . Es obvio que $\mathbb{P}_0 = \{\mathbb{1}\}$ cumple la c.c.κ. Si la cumple \mathbb{P}_δ también la cumple $\mathbb{P}_{\delta+1}$ por 9.12. Supongamos que $\lambda \leq \alpha$ es un ordinal límite tal que todos los \mathbb{P}_δ con $\delta < \lambda$ cumplen la c.c.κ.

Si $\{p_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ es una anticadena en \mathbb{P}_λ , o bien la familia de los soportes tiene cardinal menor que κ , en cuyo caso existe $A \subset \kappa$ tal que $|A| = \kappa$ y todas las condiciones $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tienen el mismo soporte $r \subset \lambda$; o bien la familia de los soportes tiene cardinal κ , en cuyo caso podemos aplicarle el lema de los sistemas Δ (es una familia no numerable de conjuntos finitos) de modo que existe $A \subset \kappa$, con $|A| = \kappa$, y la familia $\{\text{sop } p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es cuasidisjunta de raíz $r \subset \lambda$.

En cualquiera de los dos casos tenemos una familia $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de condiciones de \mathbb{P}_λ tal que si $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, entonces $\text{sop } p_\alpha \cap \text{sop } p_\beta = r$.

Sea $\delta < \lambda$ tal que $r \subset \delta$. Entonces por 9.14 f) tenemos que $\{p_\alpha|_\delta\}_{\alpha \in A}$ es una anticadena en \mathbb{P}_δ de cardinal κ , en contra de la hipótesis de inducción. ■

9.3 El axioma de Martin

Según comentábamos al principio del capítulo —concretando ahora un poco más— Solovay y Tennenbaum demostraron la consistencia de la hipótesis de Suslin construyendo una iteración de preórdenes $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ en un modelo M , de modo que cualquier árbol bien podado con la condición de cadena numerable A en el modelo final $M[G]$, puesto “copa abajo”, coincidiera con uno de los c.p.o.s $\mathbb{Q}_\delta = \pi_{\delta G_\delta} \in M[G_\delta]$. De este modo $M[G_{\delta+1}] = M[G_\delta][H_\delta]$ para un cierto filtro \mathbb{Q}_δ -genérico H_δ y, por consiguiente, $H_\delta \in M[G]$ resulta ser un camino en A , lo que garantiza que A no es un árbol de Suslin en $M[G]$. Sin embargo, D.A. Martin se dio cuenta de que en realidad no era necesario tratar únicamente con posibles árboles de Suslin, sino que bastaba exigir la condición de cadena numerable. Modificando así la prueba, se obtiene la consistencia de una sentencia que permite eliminar la teoría de extensiones de muchas pruebas de consistencia. Esta sentencia se conoce actualmente como el axioma de Martin.

Definición 9.18 Para cada cardinal κ , llamaremos *axioma de Martin* para κ a la fórmula:

$\text{AM}(\kappa)$ Si \mathbb{P} es un c.p.o. que cumple la condición de cadena numerable y \mathcal{D} es una familia de conjuntos densos en \mathbb{P} tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, entonces existe un filtro G en \mathbb{P} que corta a todos los elementos de \mathcal{D} .

El *axioma de Martin* (AM) es la sentencia $\bigwedge \kappa < 2^{\aleph_0}$ $\text{AM}(\kappa)$, es decir:

Si \mathbb{P} es un c.p.o. que cumple la condición de cadena numerable y \mathcal{D} es una familia de conjuntos densos en \mathbb{P} tal que $|\mathcal{D}| < 2^{\aleph_0}$, entonces existe un filtro G en \mathbb{P} que corta a todos los elementos de \mathcal{D} .

Ejercicio: Probar que AM es equivalente a la sentencia análoga en la que no se exige que los c.p.o.s tengan máximo. (En la definición de filtro para un c.p.o. sin máximo hemos de cambiar $\mathbb{1} \in G$ por $G \neq \emptyset$.)

Así, el axioma de Martin postula la existencia de filtros “suficientemente genéricos”, en el sentido de que corten a familias relativamente grandes de conjuntos densos. Aquellas pruebas de consistencia basadas en extensiones genéricas donde en realidad sólo se necesite la existencia de un filtro que corte a suficientes conjuntos densos (en un c.p.o. con la condición de cadena numerable) pueden obtenerse a partir del axioma de Martin, evitando así la teoría de extensiones. Éste es el caso de la hipótesis de Suslin:

Teorema 9.19 $\text{AM}(\aleph_1) \rightarrow \text{HS}$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos $\text{AM}(\aleph_1)$ y que existe un árbol de Suslin. Entonces existe uno bien podado A . Sea $\mathbb{P} = A$ con el orden inverso. Entonces \mathbb{P} es un c.p.o. con la condición de cadena numerable y para cada $\alpha < \omega_1$ el conjunto $D_\alpha = \{a \in A \mid \text{alt}_A a \geq \alpha\}$ es denso en \mathbb{P} . Por $\text{AM}(\aleph_1)$ tenemos un filtro G que corta a todos los conjuntos D_α , lo que se traduce en que G es un camino (no numerable) en A , contradicción. ■

Así pues, para probar la consistencia de la hipótesis de Suslin basta probar la consistencia de $AM + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

La presencia de 2^{\aleph_0} en el enunciado del axioma de Martin no es arbitraria, como prueba el teorema siguiente:

Teorema 9.20 *Se cumple $AM(\aleph_0) \wedge \neg AM(2^{\aleph_0})$. Así pues, $2^{\aleph_0} = \aleph_1 \rightarrow AM$.*

DEMOSTRACIÓN: $AM(\aleph_0)$ es el teorema 4.3, mientras que $\neg AM(2^{\aleph_0})$ es esencialmente la observación tras el teorema 4.5. En efecto, $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$ cumple la condición de cadena numerable. Para cada $n \in \omega$, sea D_n el conjunto de las condiciones que tienen a n en su dominio y, para cada $g \in {}^\omega 2$, sea D_g el conjunto de las condiciones que difieren de f en algún número natural de su dominio.

Si suponemos $AM(2^{\aleph_0})$ tenemos que existe un filtro G que corta a todos estos conjuntos densos, lo que se traduce en que $f_G = \bigcup_{p \in G} p : \omega \rightarrow 2$ es una función distinta de toda $g \in {}^\omega 2$, contradicción. ■

Así pues, $AM(\kappa)$ no puede ser consistente más que para cardinales menores que 2^{\aleph_0} .

Ejercicio: Probar que $MA(\aleph_1)$ sería falso sin la hipótesis sobre la condición de cadena numerable. (Ayuda: considerar $\text{Fn}(\omega, \omega_1, \aleph_0)$.)

Vamos a probar que AM es consistente con cualquier determinación de 2^{\aleph_0} que sea un cardinal regular. Primeramente demostraremos que esta restricción es necesaria, es decir, que AM implica la regularidad de 2^{\aleph_0} . En general, AM implica que 2^{\aleph_0} verifica muchas propiedades en principio sólo pueden probarse para \aleph_1 . La regularidad es una de ellas. Necesitamos dos hechos técnicos. El primero es muy sencillo y no depende de AM .

Teorema 9.21 *Existe un conjunto $A \subset \mathcal{P}\omega$ tal que $|A| = 2^{\aleph_0}$, $\bigwedge x \in A |x| = \aleph_0$ y*

$$\bigwedge xy \in A (x \neq y \rightarrow |x \cap y| < \aleph_0).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = {}^{<\omega}2$. Puesto que S es numerable, basta encontrar $A \subset \mathcal{P}S$ que cumpla el enunciado. Para cada $f \in {}^\omega 2$, sea $A_f = \{s \in A \mid s \subset f\}$. Tomamos $A = \{A_f \mid f \in {}^\omega 2\}$. ■

Teorema 9.22 *Sea $\kappa < 2^{\aleph_0}$ un cardinal infinito y supongamos $AM(\kappa)$. Consideremos una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ en las condiciones del teorema anterior. Entonces, para todo $X \subset \kappa$ existe un $A \subset \omega$ tal que*

$$\bigwedge \alpha < \kappa (\alpha \in X \leftrightarrow A_\alpha \cap A \text{ es infinito}).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathbb{P} el conjunto de las funciones $p \subset \omega \times 2$ tales que

- a) $\bigwedge \alpha \in X \text{ Dominio}(p) \cap A_\alpha$ es finito,
- b) El conjunto $\{n \in \omega \mid p(n) = 1\}$ es finito.

Consideramos a \mathbb{P} como c.p.o. con la relación inversa de la inclusión. Hemos de pensar en las condiciones de \mathbb{P} como aproximaciones a la función característica del conjunto A que estamos buscando. Una condición p sólo puede forzar que una cantidad finita de números naturales estén en A , pero puede forzar que infinitos naturales no estén, a condición de que estén casi todos fuera de cualquier A_α con $\alpha \in X$.

Claramente \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable, pues si dos condiciones p y q son incompatibles, entonces

$$\{n \in \text{Dominio}(p) \mid p(n) = 1\} \neq \{n \in \text{Dominio}(q) \mid q(n) = 1\},$$

y sólo hay una cantidad numerable de subconjuntos finitos de ω .

Si $\beta \in \kappa \setminus X$, sea $D_\beta = \{p \in \mathbb{P} \mid A_\beta \subset \text{Dominio}(p)\}$. Si una condición $p \in D_\beta$, como sólo puede tomar un número finito de veces el valor 1, ha de tomar el valor 0 sobre casi todos los elementos de A_β . Por lo tanto D_β es el conjunto de condiciones que fuerzan que $A_\beta \cap A$ es finito (notemos que A todavía no está definido).

Se cumple que D_β es denso en \mathbb{P} , pues dada $q \in \mathbb{P}$, podemos extenderla a una condición que tome el valor 0 sobre todos los elementos de A_β sobre los que q no esté ya definida. Ciertamente p es una condición pues, cumple obviamente la propiedad a) y para todo $\alpha \in X$ se cumple que $A_\alpha \cap A_\beta$ es finito, luego $\text{Dominio}(p) \cap A_\alpha$ sólo contiene los números que ya estuvieran en $\text{Dominio}(q) \cap A_\alpha$ (una cantidad finita) más los elementos de $A_\alpha \cap A_\beta$, de donde se sigue la propiedad b). Obviamente entonces $p \in D_\beta$ y $p \leq q$.

Si $\alpha \in X$ y $m \in \omega$, sea

$$E_{\alpha m} = \{p \in \mathbb{P} \mid |\{n \in A_\alpha \cap \text{Dominio}(p) \mid p(n) = 1\}| \geq m\}.$$

Es claro que $E_{\alpha m}$ es el conjunto de condiciones que fuerzan que $A_\alpha \cap A$ tenga al menos m elementos. No hay dificultad en probar que $E_{\alpha m}$ es denso en \mathbb{P} .

Por $\text{AM}(\kappa)$ existe un filtro G que corta a todos los conjuntos densos que hemos definido. Sea $A = \{n \in \omega \mid \forall p \in G (n, 1) \in p\}$. Si $\alpha \in X$ entonces $A \cap A_\alpha$ es infinito porque G corta a todos los conjuntos $E_{\alpha m}$, con $m \in \omega$. Si $\beta \in \kappa \setminus X$ entonces $A \cap A_\beta$ es finito porque G corta a D_β . ■

Teorema 9.23 *Si $\kappa < 2^{\aleph_0}$ es un cardinal infinito, $\text{AM}(\kappa)$ implica que $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$. Así mismo, AM implica que 2^{\aleph_0} es un cardinal regular.*

DEMOSTRACIÓN: La aplicación $f : \mathcal{P}\kappa \rightarrow \mathcal{P}\omega$ que a cada $X \subset \kappa$ le asigna el conjunto A construido en el teorema anterior es claramente inyectiva, luego $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$.

Por el teorema de König, $\kappa < \text{cf } 2^\kappa = \text{cf } 2^{\aleph_0}$, luego AM implica que 2^{\aleph_0} es regular. ■

Hay un último problema que hemos de resolver antes de probar la consistencia de AM . Se trata de que hay una clase propia de c.p.o.s con la condición de

cadena numerable no semejantes entre sí. No podemos realizar una iteración de extensiones que pase por todos ellos, pues necesitaríamos que el último c.p.o. fuera una clase propia. Afortunadamente AM equivale a su restricción a un cierto conjunto de c.p.o.s. La idea central de la prueba es el argumento del teorema de Löwenheim-Skolem.

Teorema 9.24 *Sea κ un cardinal infinito. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- a) $AM(\kappa)$,
- b) $AM(\kappa)$ para c.p.o.s \mathbb{P} con la hipótesis adicional de que $|\mathbb{P}| \leq \kappa$,
- c) $AM(\kappa)$ para c.p.o.s \mathbb{P} de la forma $(\kappa, \leq, \emptyset)$ (donde \leq es un preorden arbitrario en κ).

DEMOSTRACIÓN: Obviamente a) \rightarrow b) \rightarrow c). Es obvio que b) equivale a $AM(\kappa)$ para c.p.o.s de la forma $(\mathbb{P}, \leq, \emptyset)$ con $\mathbb{P} \subset \kappa$ (pues todo c.p.o. \mathbb{P} tal que $|\mathbb{P}| \leq \kappa$ es semejante a un c.p.o. en estas condiciones). Así, para demostrar que c) \rightarrow b) podemos partir de un c.p.o. $\mathbb{P} \subset \kappa$ con máximo \emptyset (y, por supuesto, con la condición de cadena numerable).

Extendamos el preorden de \mathbb{P} a κ estableciendo que todos los elementos de $\kappa \setminus \mathbb{P}$ son máximos. Así κ se convierte en un c.p.o. con la condición de cadena numerable en el cual \mathbb{P} es denso. Es claro que si \mathcal{D} es una familia de a lo sumo κ subconjuntos densos de \mathbb{P} , éstos siguen siendo densos en κ , luego por c) existe un filtro G en κ que corta a todos los elementos de \mathcal{D} . Es inmediato comprobar que $G \cap \mathbb{P}$ es un filtro en \mathbb{P} que cumple lo mismo.

Veamos por último que b) \rightarrow a). Sea \mathbb{P} un c.p.o. arbitrario con la condición de cadena numerable y sea \mathcal{D} una familia de a lo sumo κ subconjuntos densos de \mathbb{P} .

Veamos que existe $\mathbb{Q} \subset \mathbb{P}$ tal que

1. $|\mathbb{Q}| \leq \kappa$,
2. Para todo $D \in \mathcal{D}$, se cumple que $D \cap \mathbb{Q}$ es denso en \mathbb{Q} ,
3. Dos condiciones de \mathbb{Q} son compatibles en \mathbb{Q} si y sólo si lo son en \mathbb{P} .

Si $D \in \mathcal{D}$, sea $f_D : \mathbb{P} \rightarrow D$ tal que

$$\bigwedge p \in \mathbb{P} (f_D(p) \in D \wedge f_D(p) \leq p).$$

Sea $g : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ tal que

$$\bigwedge p, q \in \mathbb{P} (\neg p \perp q \rightarrow g(p, q) \leq p \wedge g(p, q) \leq q).$$

Definimos $\mathbb{Q}_0 = \{\mathbf{1}\} \wedge \bigwedge n \in \omega \mathbb{Q}_{n+1} = \mathbb{Q}_n \cup g[\mathbb{Q}_n \times \mathbb{Q}_n] \cup \bigcup_{D \in \mathcal{D}} f_D[\mathbb{Q}_n]$.

Es claro que $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \omega} \mathbb{Q}_n$ cumple lo pedido.

Por 3) tenemos que \mathbb{Q} cumple la condición de cadena numerable, por 1), 2) y la hipótesis b) tenemos que existe un filtro H sobre \mathbb{Q} que corta a todos conjuntos $D \cap \mathbb{Q}$, con $D \in \mathcal{D}$. Definimos

$$G = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall q \in H \ q \leq p\}.$$

Es fácil comprobar que G es un filtro en \mathbb{P} y obviamente contiene a H , luego corta a todos los elementos de D . ■

Finalmente estamos en condiciones de demostrar la consistencia del axioma de Martin. La idea básica de la prueba es una de las paradojas del infinito: imaginemos que metemos en un saco bolas numeradas del 0 al 9, luego sacamos la bola 0, luego metemos bolas numeradas del 10 al 19 y sacamos la bola 2, etc. De este modo, aunque cada vez tenemos más bolas en el saco, al cabo de infinitos pasos no nos quedarán bolas, porque la número 0 la hemos sacado en el primer paso, la número 1 en el segundo, etc.

En nuestro caso, partimos de un modelo M con infinitos c.p.o.s que pueden incumplir el axioma de Martin, extendiendo con uno de ellos conseguimos un filtro que corta a todos los sus conjuntos densos en M , pero en la extensión puede haber nuevos conjuntos densos que necesiten otro filtro y pueden aparecer infinitos c.p.o.s nuevos que no cumplan el axioma de Martin. Así, en cada paso resolvemos parcialmente un caso y nos aparecen infinitos contraejemplos más, pero, si lo organizamos bien, al cabo de κ pasos podemos haber eliminado todos los contraejemplos.

Teorema 9.25 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y en M sea κ un cardinal regular no numerable tal que $2^{<\kappa} = \kappa$. Existe una extensión genérica N de M que cumple AM, tiene los mismos cardinales y cofinalidades, $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)^N$ y la función del continuo sobre κ es la misma en M y en N .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $g \in M$ tal que $g : \kappa \rightarrow \kappa \times \kappa \times \kappa$ biyectiva. Sea $f : \kappa \rightarrow \kappa \times \kappa$ definida como sigue: si $g(\alpha) = (\beta, \gamma, \delta)$, entonces

$$f(\alpha) = \begin{cases} (\beta, \gamma) & \text{si } \beta \leq \alpha, \\ (0, 0) & \text{si } \alpha < \beta. \end{cases}$$

De este modo, $f \in M$, $f : \kappa \rightarrow \kappa \times \kappa$ suprayectiva y

$$\bigwedge \alpha \beta \gamma (f(\alpha) = (\beta, \gamma) \rightarrow \beta \leq \alpha).$$

En efecto, si $(\beta, \gamma) \in \kappa \times \kappa$, entonces el conjunto

$$\{\alpha < \kappa \mid \forall \delta < \kappa \ g(\alpha) = (\beta, \gamma, \delta)\}$$

tiene cardinal ^{M} κ , luego no está acotado en κ , luego existe un $\alpha \geq \beta$ tal que $g(\alpha) = (\beta, \gamma, \delta)$, y entonces $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$.

Vamos a usar la función f para determinar en qué orden usamos cada c.p.o. que pueda incumplir AM para formar una extensión que le añada un filtro

genérico. Más concretamente, $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$ significará que para formar la extensión α -ésima usaremos el γ -ésimo c.p.o. de entre los disponibles en la iteración β -ésima. Naturalmente, para que esto tuviera sentido hemos tenido que garantizar que $\beta \leq \alpha$.

Definiremos una iteración de preórdenes^M con soportes finitos de la forma

$$(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \kappa}, \{(\check{\nu}_\delta, \leq_\delta, \check{\varnothing})\}_{\delta < \kappa}),$$

donde $\bigwedge \delta < \kappa \nu_\delta < \kappa$. Además se cumplirá que

$$\bigwedge \delta < \kappa \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash (\check{\nu}_\delta, \leq_\delta, \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.}$$

Por 9.17, tendremos que cada \mathbb{P}_δ cumplirá la condición de cadena numerable en M . Veamos que estas condiciones implican que cada \mathbb{P}_δ tendrá un subconjunto denso $\bar{\mathbb{P}}_\delta$ tal que $\bigwedge \delta < \kappa |\bar{\mathbb{P}}_\delta|^M < \kappa$ y $|\bar{\mathbb{P}}_\kappa|^M \leq \kappa$.

Lo probamos por inducción sobre δ . Para $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$ es trivial. Supongamos que $\bar{\mathbb{P}}_\delta$ es denso en \mathbb{P}_δ y $|\bar{\mathbb{P}}_\delta|^M < \kappa$. Definimos

$$\bar{\mathbb{P}}_{\delta+1} = \{p \cup \{(\delta, \check{\alpha})\} \mid p \in \bar{\mathbb{P}}_\delta \wedge \alpha < \nu_\delta\}.$$

Podemos suponer que los nombres $\check{\alpha}$ están en $\hat{\pi}_\delta$, o también podemos sustituirlos por nombres equivalentes que sí lo estén. Claramente $\bar{\mathbb{P}}_{\delta+1} \subset \mathbb{P}_{\delta+1}$ y $|\bar{\mathbb{P}}_{\delta+1}|^M < \kappa$. Veamos que es denso.

Dado $p \in \mathbb{P}_{\delta+1}$, sea G un filtro \mathbb{P}_δ -genérico sobre M tal que $p|_\delta \in G$. Como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash p(\delta) \in \check{\nu}_\delta$, se cumple que $p(\delta)_G = \alpha$, para un cierto $\alpha < \nu_\delta$, luego existe un $q \in \bar{\mathbb{P}}_\delta$, $q \leq p|_\delta$ tal que $q \Vdash p(\delta) = \check{\alpha}$. Entonces $q \cup \{(\delta, \check{\alpha})\} \in \bar{\mathbb{P}}_{\delta+1}$ es una extensión de p .

Dados $\{\bar{\mathbb{P}}_\delta\}_{\delta < \lambda}$, para $\lambda \leq \kappa$ definimos $\bar{\mathbb{P}}_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} i_{\delta\lambda}[\bar{\mathbb{P}}_\delta]$. Como κ es regular^M es claro que $|\bar{\mathbb{P}}_\lambda|^M < \kappa$ si $\lambda < \kappa$ y $|\bar{\mathbb{P}}_\kappa|^M \leq \kappa$. Del hecho de que los límites son directos se sigue inmediatamente que $\bar{\mathbb{P}}_\lambda$ es denso en \mathbb{P}_λ .

La razón por la que acotamos el cardinal de conjuntos densos es porque el preorden no es antisimétrico, por lo que hay muchas condiciones que contienen la misma información, lo que hace que el cardinal de los c.p.o.s completos no sea significativo.

Si $\delta, \epsilon < \kappa$, según (5.1), el número de buenos $\bar{\mathbb{P}}_\delta$ -nombres para subconjuntos de $\epsilon \check{\times} \epsilon$ en M es a lo sumo $(\kappa^{\aleph_0})^{|\epsilon \times \epsilon|} \leq \kappa^{< \kappa} = (2^{< \kappa})^{< \kappa} = 2^{< \kappa} = \kappa$ (aquí usamos que $\bar{\mathbb{P}}_\delta$ cumple la condición de cadena numerable por ser denso en \mathbb{P}_δ).

Vamos a construir la iteración por recurrencia en M . Tomamos $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$. Supongamos construidos $(\{\mathbb{P}_\beta\}_{\beta \leq \alpha}, \{(\check{\nu}_\beta, \leq_\beta, \check{\varnothing})\}_{\beta < \alpha})$, para $\alpha < \kappa$, de modo que cumplan las propiedades indicadas y, por consiguiente, las consecuencias que acabamos de probar. En particular tenemos definidos los conjuntos $\{\bar{\mathbb{P}}_\beta\}_{\beta \leq \alpha}$.

Sea $\{(\nu_\gamma^\alpha, \leq_\gamma^\alpha)\}_{\gamma < \kappa} \in M$ una enumeración de todos los pares (ν, \leq) tales que $\nu < \kappa$ es un cardinal^M y \leq es un buen $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$ -nombre^M para un subconjunto de $\nu \check{\times} \nu$. Informalmente, entre ellos están todos los c.p.o.s que nos han aparecido

en el último paso construido hasta ahora, a los cuales tendremos que añadir filtros genéricos tarde o temprano. Nuestro razonamiento recurrente nos permite suponer definidos los pares correspondientes a pasos anteriores, es decir, tenemos definidos $(\nu_\gamma^\beta, \leq_\gamma^\beta)$ para $\beta \leq \alpha$ y $\gamma < \kappa$.

Sea $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$. Por construcción de f tenemos que $\beta \leq \alpha$, luego el par $(\nu_\gamma^\beta, \leq_\gamma^\beta)$ está definido y \leq_γ^β es un buen \mathbb{P}_β -nombre para un subconjunto de $\nu_\gamma^\beta \times \nu_\gamma^\beta$. Definimos $\nu_\alpha = \nu_\gamma^\beta$ y sea $\sigma = i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta) \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$. Claramente

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \check{R}((\check{\nu}_\alpha, R, \check{\sigma}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n. } \wedge$$

$$((\check{\nu}_\alpha, \sigma, \check{\sigma}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n. } \rightarrow R = \sigma)).$$

Por 4.38 existe un $\leq_\alpha \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash ((\check{\nu}_\alpha, \leq_\alpha, \check{\sigma}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n. } \wedge$$

$$((\check{\nu}_\alpha, i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta), \check{\sigma}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n. } \rightarrow \leq_\alpha = i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta))).$$

Definimos $\mathbb{P}_{\alpha+1}$ tal y como exige la definición de iteración de preórdenes. Esta definición también determina el caso límite (teniendo en cuenta que exigimos siempre límites directos).

Con esto tenemos definido el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\kappa \in M$. Además hemos probado que \mathbb{P}_κ cumple la condición de cadena numerable^M y contiene un subconjunto denso $\overline{\mathbb{P}}_\kappa$ tal que $|\overline{\mathbb{P}}_\kappa|^M \leq \kappa$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Por la condición de cadena numerable, los cardinales y las cofinalidades en M son los mismos que en $M[G]$. Vamos a calcular la función del continuo en $M[G]$. Puesto que $M[G]$ puede obtenerse también como extensión genérica sobre $\overline{\mathbb{P}} = \overline{\mathbb{P}}_\kappa$, podemos trabajar con éste último.

Si $\mu \geq \kappa$ es un cardinal^M, aplicando la fórmula (5.1), el número de buenos $\overline{\mathbb{P}}$ -nombres^M para subconjuntos de $\check{\mu}$ es a lo sumo $\kappa^\mu = 2^\mu$, de donde se sigue que $(2^\mu)^M = (2^\mu)^{M[G]}$ para cardinales mayores o iguales que κ .

El número de buenos $\overline{\mathbb{P}}$ -nombres^M para subconjuntos de $\check{\omega}$ es a lo sumo $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, luego, en $M[G]$, $2^{\aleph_0} \leq \kappa$.

El resto de la función del continuo en $M[G]$ quedará completamente determinado en cuanto probemos que $M[G]$ cumple AM(ν) para todo cardinal infinito $\nu < \kappa$, pues entonces $\nu < (2^{\aleph_0})^{M[G]}$, de donde $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = \kappa$. A su vez esto implica que $M[G]$ cumple AM. Finalmente, el teorema 9.23 nos da que $(2^\nu)^{M[G]} = \kappa$ para todo cardinal infinito $\nu \leq \kappa$.

Según el teorema anterior, para probar AM(ν)^{M[G]}, donde $\nu < \kappa$ es un cardinal^{M[G]}, basta considerar un c.p.o. de la forma $(\nu, R, \emptyset) \in M[G]$ con la condición de cadena numerable^{M[G]} y una familia $\mathcal{D} \in M[G]$ de conjuntos densos en (ν, R, \emptyset) tal que $|\mathcal{D}|^{M[G]} \leq \nu$.

Por 9.16, como $R \subset \nu \times \nu \in M$ y $(|\nu \times \nu| < \kappa = \text{cf } \kappa)^{M[G]}$, existe un $\beta < \kappa$ tal que $R \in M[G_\beta]$.

Fijemos una enumeración $\{D_\alpha\}_{\alpha < \nu} \in M[G]$ de la familia \mathcal{D} . Consideremos el conjunto $A = \{(\alpha, \delta) \in \nu \times \nu \mid \delta \in D_\alpha\} \subset \nu \times \nu$. De nuevo por 9.16 podemos afirmar que existe un $\beta < \kappa$ tal que $A \in M[G_\beta]$, con lo que $\mathcal{D} \in M[G_\beta]$. Tomándolo suficientemente grande podemos suponer que $R, \mathcal{D} \in M[G_\beta]$.

De este modo, $R = (\leq_\gamma^\beta)_{G_\beta}$ para cierto $\gamma < \kappa$ y $\nu = \nu_\gamma^\beta$. Sea $\alpha \geq \beta$ tal que $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$. Sea $\sigma = i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta)$. Como $i_{\beta\alpha}$ es una inmersión completa, sabemos por 6.7 que $R = (\leq_\gamma^\beta)_{G_\beta} = (\leq_\gamma^\beta)_{i_{\beta\alpha}^{-1}[G_\alpha]} = i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta)_{G_\alpha} = \sigma_{G_\alpha}$.

Así pues, $(\nu, R, \emptyset) \in M[G_\alpha]$ y es un c.p.o. con la condición de cadena numerable $^{M[G_\alpha]}$, pues si tuviera una anticadena no numerable $^{M[G_\alpha]}$ ésta sería también no numerable $^{M[G]}$, porque los cardinales son los mismos. Por construcción tenemos que $\nu_\alpha = \nu_\gamma^\beta = \nu$ y

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash ((\check{\nu}_\alpha, \leq_\alpha, \check{\emptyset}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n. } \wedge$$

$$((\check{\nu}_\alpha, i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta), \check{\emptyset}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n. } \rightarrow \leq_\alpha = i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta))),$$

luego

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash ((\check{\nu}, \sigma, \check{\emptyset}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n. } \rightarrow \leq_\alpha = \sigma).$$

Por consiguiente $\leq_\alpha G_\alpha = \sigma_{G_\alpha} = R$. Según el teorema 9.15, tenemos que $M[G_{\alpha+1}] = M[G_\alpha][H]$, donde H es un filtro (ν, R, \emptyset) -genérico sobre $M[G_\alpha]$, con lo que en particular corta a todos los conjuntos densos de la familia \mathcal{D} . Esto demuestra $\text{AM}(\nu)^{M[G]}$. ■

Con esto queda probado que el axioma de Martin es consistente con cualquier determinación consistente de la función del continuo que satisfaga el teorema 9.23. En particular es consistente $\text{AM} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ y con ello la hipótesis de Suslin. Puede probarse que la hipótesis de Suslin es consistente con la hipótesis del continuo, aunque esto es mucho más complicado y requiere muchas ideas nuevas. Incidentalmente, esto prueba que $2^{\aleph_0} = \aleph_1 \not\rightarrow \diamond$.

9.4 La condición de cadena numerable

Terminaremos el capítulo estudiando un problema de cuya solución tenemos ya todas las claves, por lo que constituye una buena ilustración de las posibilidades de la teoría. Recordemos que un espacio topológico cumple la condición de cadena numerable si toda familia de abiertos disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. El problema es si el producto de espacios con la condición de cadena numerable cumple la condición de cadena numerable. El teorema siguiente muestra que, curiosamente, el número de factores es irrelevante:

Teorema 9.26 *Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos tal que, para todo $J \subset I$ finito, el producto $\prod_{i \in J} X_i$ cumple la condición de cadena numerable.*

Entonces el producto $\prod_{i \in I} X_i$ cumple la condición de cadena numerable.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\{G_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ es una familia de abiertos en el producto disjuntos dos a dos. Podemos suponerlos abiertos básicos, es decir,

$$G_\alpha = \prod_{i \in I} G_{i\alpha},$$

donde cada $G_{i\alpha}$ es abierto en X_i y el conjunto $I_\alpha = \{i \in I \mid G_{i\alpha} \neq X_i\}$ es finito.

Por el lema de los sistemas Δ existe $r \subset I$ finito y $K \subset \omega_1$ no numerable tal que $\{I_\alpha\}_{\alpha \in K}$ es una familia cuasidisjunta de raíz r . Aquí suponemos que el conjunto $\{I_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es no numerable. En caso contrario tomaríamos K de modo que todos los I_α con $\alpha \in K$ fueran iguales a un mismo conjunto r .

Sea $\overline{G}_\alpha = \prod_{i \in r} G_{i\alpha}$, abierto en $\prod_{i \in r} X_i$. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces $\overline{G}_{\alpha_1} \cap \overline{G}_{\alpha_2} = \emptyset$, pues si $x \in \overline{G}_{\alpha_1} \cap \overline{G}_{\alpha_2}$, como $I_{\alpha_1} \cap I_{\alpha_2} = r$, podemos definir $y \in \prod_{i \in I} X_i$ tal que $y_i \in G_{i\alpha_1}$ si $i \in I_{\alpha_1}$ e $y_i \in G_{i\alpha_2}$ si $i \in I_{\alpha_2}$, (pues si $i \in I_{\alpha_1} \cap I_{\alpha_2}$ podemos tomar $y_i = x_i$). Así $y \in \overline{G}_{\alpha_1} \cap \overline{G}_{\alpha_2} = \emptyset$, contradicción.

Así pues, $\{\overline{G}_\alpha\}_{\alpha \in K}$ es una anticadena no numerable en $\prod_{i \in r} X_i$, contradicción. ■

Así pues, si se cumple que el producto de dos espacios topológicos con la condición de cadena numerable tiene también la condición de cadena numerable, entonces se cumple, de hecho, que el producto de cualquier familia de espacios topológicos con la condición de cadena numerable tiene también la condición de cadena numerable. Por consiguiente basta estudiar el problema para dos espacios.

Vamos a reformular el problema en términos de c.p.o.s. De hecho, cuesta lo mismo hacerlo para la condición de cadena κ , con κ arbitrario. (Un espacio topológico cumple la condición de cadena κ si toda familia de abiertos disjuntos dos a dos tiene cardinal menor que κ , así, la condición de cadena numerable es la condición de cadena \aleph_1 .)

Teorema 9.27 *Si κ es un cardinal infinito, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- Existen espacios topológicos con la condición de cadena κ cuyo producto no cumple la condición de cadena κ .*
- Existen dos c.p.o.s con la condición de cadena κ cuyo producto no cumple la condición de cadena κ .*
- Existen dos espacios compactos (de Hausdorff) con la condición de cadena κ cuyo producto no cumple la condición de cadena κ .*

DEMOSTRACIÓN: Si X e Y son espacios topológicos que cumplen a), tomamos como \mathbb{P} y \mathbb{Q} los conjuntos de abiertos no vacíos de X e Y respectivamente, ordenados con la inclusión. Así dos condiciones son incompatibles si y sólo si son disjuntas, por lo que \mathbb{P} y \mathbb{Q} son c.p.o.s con la condición de cadena κ . Como

$X \times Y$ no cumple la condición de cadena κ , existe una anticadena de cardinal κ , que podemos tomar formada por abiertos básicos, es decir, de la forma $\{p_\alpha \times q_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$. Entonces $\{(p_\alpha, q_\alpha)\}_{\alpha < \kappa}$ es una anticadena en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$.

Supongamos ahora existen c.p.o.s \mathbb{P} y \mathbb{Q} que cumplen b). Sean \mathbb{B}_1 y \mathbb{B}_2 sus respectivas compleciones, que son dos álgebras de Boole completas con la condición de cadena κ . El producto $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ es un c.p.o. que no cumple la condición de cadena κ , pues si $\{(p_\alpha, q_\alpha)\}_{\alpha < \kappa}$ es una anticadena en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, es claro que $\{(i(p_\alpha), i(q_\alpha))\}_{\alpha < \kappa}$ es una anticadena en $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ (donde i representa en cada componente a la inmersión densa del correspondiente c.p.o. en su compleción).

Así pues, podemos partir de dos álgebras de Boole completas. Más aún, considerando los correspondientes espacios de Stone, tenemos dos espacios compactos cero-dimensionales X_1 y X_2 cuyas álgebras de abiertos cerrados \mathbb{B}_1 y \mathbb{B}_2 cumplen la condición de cadena κ , mientras que $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ no la cumple.

Es obvio que X_1 y X_2 cumplen la condición de cadena κ como espacios topológicos, mientras que $X_1 \times X_2$ no la cumple, pues si $\{(U_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha < \kappa}$ es una anticadena en $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ entonces $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ es una familia de abiertos disjuntos en $X_1 \times X_2$. ■

Vamos a probar que el axioma de Martin implica que la condición de cadena numerable se conserva por productos. Para ello introducimos un concepto más fuerte:

Definición 9.28 Diremos que un c.p.o. \mathbb{P} cumple la *condición de cadena numerable fuerte* si todo conjunto $W \subset \mathbb{P}$ no numerable contiene un subconjunto Z no numerable con todos sus elementos compatibles dos a dos.

Obviamente, la condición de cadena numerable fuerte implica la condición de cadena numerable.

Teorema 9.29 Si \mathbb{P} y \mathbb{Q} son c.p.o.s de modo que \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable fuerte y \mathbb{Q} cumple la condición de cadena numerable, entonces $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ cumple la condición de cadena numerable.

DEMOSTRACIÓN: Sea $W \subset \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ un conjunto no numerable. Consideremos el conjunto $W_0 = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists q \in \mathbb{Q} (p, q) \in W\}$. Si W_0 es numerable existe un $p \in \mathbb{P}$ tal que $W_p = \{q \in \mathbb{Q} \mid (p, q) \in W\}$ es no numerable. Como \mathbb{Q} cumple la condición de cadena numerable existen dos condiciones compatibles en W_p , digamos q_1 y q_2 . Así (p, q_1) y (p, q_2) son condiciones compatibles en W .

Si, por el contrario, W_0 es no numerable, existe $Z \subset W_0$ cuyos elementos son compatibles dos a dos. Para cada $p \in Z$, sea $q_p \in \mathbb{Q}$ tal que $(p, q_p) \in W$. Si $q_{p_1} = q_{p_2}$ para ciertos $p_1, p_2 \in Z$ distintos, entonces (p_1, q_{p_1}) y (p_2, q_{p_2}) son condiciones compatibles en W , mientras que si la aplicación $p \mapsto q_p$ es inyectiva entonces el conjunto $\{q_p \mid p \in Z\}$ es no numerable, luego existen $p_1, p_2 \in Z$ distintos tales que q_{p_1} y q_{p_2} son compatibles. De nuevo (p_1, q_{p_1}) y (p_2, q_{p_2}) son condiciones compatibles en W .

En cualquier caso tenemos que W no puede ser una anticadena, luego $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ cumple la condición de cadena numerable. ■

Teorema 9.30 *Suponiendo $\text{AM}(\aleph_1)$ se cumple:*

- a) *Todo c.p.o. con la condición de cadena numerable cumple la condición de cadena numerable fuerte.*
- b) *El producto de c.p.o.s con la condición de cadena numerable cumple la condición de cadena numerable.*
- c) *El producto de espacios topológicos con la condición de cadena numerable cumple la condición de cadena numerable.*

DEMOSTRACIÓN: b) y c) son consecuencias directas de a) y los teoremas anteriores. Sea \mathbb{P} un c.p.o. con la condición de cadena numerable y $W = \{q_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ un subconjunto de \mathbb{P} .

Veamos que existe $p_0 \in W$ tal que todo $p \leq p_0$ es compatible con una cantidad no numerable de elementos de W . En caso contrario, para cada $\alpha < \omega_1$ existe $\alpha < \beta < \omega_1$ y $r_\alpha \leq q_\alpha$ de modo que $r_\alpha \perp q_\gamma$ si $\beta < \gamma < \omega_1$, y esto nos permite construir por recurrencia una anticadena $\{r_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$, contradicción.

Fijado, pues, p_0 , para cada $\alpha < \omega_1$ definimos

$$D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq p_0 \wedge \forall \gamma < \omega_1 (\alpha \leq \gamma \wedge p \leq q_\gamma)\}.$$

Se cumple que D_α es denso bajo p_0 , pues si $t \leq p_0$ entonces t es compatible con algún q_γ , para $\gamma \geq \alpha$, luego existe un $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq t$ y $p \leq q_\gamma$, es decir, $p \in D_\alpha$ y $p \leq t$.

El conjunto $\mathbb{P}_0 = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq p_0\}$ es un c.p.o. en el que los conjuntos D_α son densos, y obviamente cumple la condición de cadena numerable. Por $\text{AM}(\aleph_1)$ existe un filtro G_0 en \mathbb{P}_0 que corta a todos los conjuntos D_α . Sea

$$G = \{p \in G_0 \mid \forall p' \in G_0 \ p' \leq p\}.$$

Claramente G es un filtro en \mathbb{P} que contiene a p_0 y corta a todos los conjuntos D_α . Además $Z = G \cap W$ es un subconjunto de W formado por condiciones compatibles dos a dos, luego basta probar que es no numerable. En efecto, si $\alpha < \omega_1$ existe $p \in G \cap D_\alpha$, luego existe $\alpha \leq \gamma < \omega_1$ tal que $p \leq q_\gamma$, luego $q_\gamma \in G$. Así pues, el conjunto $\{\gamma < \omega_1 \mid q_\gamma \in G\}$ no está acotado, luego no es numerable. ■

Así pues, tenemos probada la consistencia de que el producto de c.p.o.s o de espacios topológicos con la condición de cadena numerable cumpla también la condición de cadena numerable. Sin embargo, también es consistente lo contrario. Existen diversos medios para probarlo. El más sencillo es el siguiente:

Teorema 9.31 *Si A es un árbol de Suslin, entonces $A \times A$ no cumple la condición de cadena numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Diremos que $a \in A$ es un *punto de ramificación* si se cumple que $\text{alt}_A a = \alpha$ y existen $b, c \in \text{Niv}_{\alpha+1} A$ tales que $a \leq b \wedge a \leq c$.

El conjunto B de los puntos de ramificación de A ha de tener cardinal \aleph_1 , pues si fuera numerable existiría un $\alpha < \omega_1$ tal que $B \subset \text{Niv}_\alpha A$. Entonces, si $a \in \text{Niv}_\alpha A$, el conjunto $\{b \in A \mid a \leq b\}$ está totalmente ordenado y es, por consiguiente, numerable. A su vez, esto nos lleva a que

$$A = \text{Niv}_\alpha A \cup \bigcup_{a \in \text{Niv}_\alpha A} \{b \in A \mid a \leq b\}$$

es numerable, contradicción.

Si $b \in B$, sean p_b, q_b tales que $\text{alt}_{Ap_b} = \text{alt}_A q_b = \text{alt}_A b + 1$, $b \leq p_b, b \leq q_b$. Entonces $\{(p_b, q_b)\}_{b \in B}$ es una anticadena en $A \times A$. En efecto, si se cumpliera¹ $(p_b, q_b) \leq (s, t) \wedge (p_c, q_c) \leq (s, t)$, para ciertos $b, c \in B$ y $(s, t) \in A \times A$, entonces sería $p_b, p_c \leq s$ y $q_b, q_c \leq t$. Esto obliga a que p_b y p_c sean compatibles, digamos $p_b \leq p_c$. Entonces también $q_b \leq q_c$, porque están a la misma altura. Por tanto $b \leq p_c \wedge b \leq q_c$, lo que nos da necesariamente que $b \leq c$, luego $p_b \leq c$ (pues ambos están bajo p_c y la altura del primero es menor o igual), luego $p_b \leq p_c$, y así p_c contradice que p_b y q_b sean incompatibles. ■

Así pues, un árbol de Suslin (copa abajo) es un ejemplo de c.p.o. con la condición de cadena numerable cuyo producto por sí mismo no cumple la condición de cadena numerable. La existencia de árboles de Suslin y, por lo tanto, también \diamond o $V = L$, implican la existencia de espacios topológicos con la condición de cadena numerable cuyo producto no cumple la condición de cadena numerable. Ahora veremos otra prueba de la consistencia de este hecho mediante una extensión genérica, que nos aporta la información adicional de que el producto de dos c.p.o.s (y es fácil ver que también de dos espacios topológicos) con la condición de cadena numerable puede tener una anticadena de cardinal 2^{\aleph_0} , a la vez que éste puede tomar cualquier valor razonable.

Teorema 9.32 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC+HCG. Sea κ un cardinal ^{M} tal que $\text{cf}^M \kappa > \aleph_0$. Existe una extensión genérica de M con los mismos cardinales, donde $2^{\aleph_0} = \kappa$ y donde hay dos c.p.o.s que cumplen la condición de cadena numerable cuyo producto tiene una anticadena con κ elementos.*

DEMOSTRACIÓN: En general, si A es un conjunto, se representa por $[A]^2$ al conjunto de todos los subconjuntos de A con dos elementos. $\mathcal{P}^f A$ es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de A .

Sea $\mathbb{R} = \text{Fn}([\kappa]^2, 2, \aleph_0)^M$ y sea G un filtro \mathbb{R} -genérico sobre M . Es claro que \mathbb{R} es semejante ^{M} a $\text{Fn}(\nu, 2, \aleph_0)^M$, por lo que 5.21 nos da que los cardinales y las cofinalidades en M son iguales que en $M[G]$ y $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = \kappa$. Sea

$$C_0 = \{\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2 \mid \forall p \in G \ p(\{\alpha, \beta\}) = 0\} \in M[G]$$

y tomemos $\mathbb{P} = \{s \in \mathcal{P}^f A \mid [s]^2 \subset C_0\} \in M[G]$. Notemos que \mathbb{P} está definido a partir de κ y G , es decir, desde un punto de vista metamatemático \mathbb{P} es en realidad un término $\mathbb{P}(\kappa, G)$ con dos variables libres.

¹Recordemos que al considerar a A como c.p.o. la relación de orden es la inversa de la relación de A como árbol.

Consideramos a \mathbb{P} como c.p.o. con el orden $s \leq t \leftrightarrow t \subset s$. Podemos pensar que C es el conjunto de las aristas de un grafo con vértices en κ (un grafo “genérico”) y que \mathbb{P} está formado por los subgrafos de C totalmente conectados.

Vamos a probar que \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable en $M[G]$. Para ello, supongamos que $f : \omega_1^{M[G]} \rightarrow \mathbb{P}$ enumera una anticadena (naturalmente, con $f \in M[G]$). Sea $f = \tau_G$, con $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Llamemos $\lambda = \omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$ y sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash \tau : \check{\lambda} \longrightarrow \mathbb{P}(\check{\kappa}, \Gamma) \wedge \bigwedge \alpha \beta \in \check{\lambda} \tau(\alpha) \perp \tau(\beta),$$

donde Γ es el nombre canónico de G .

Para cada $\alpha < \omega_1^M$, sea $f(\alpha) = s_\alpha$. Entonces $s_\alpha \subset \kappa \subset M$ finito, luego $s_\alpha \in M$. Sea $p_\alpha \in G$ tal que $p_\alpha \leq p \wedge p_\alpha \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{s}_\alpha$. Extendiendo p_α si es necesario, podemos suponer que su dominio es de la forma $[t_\alpha]^2$, donde $s_\alpha \subset t_\alpha$. Así mismo podemos suponer que $\{t_\alpha\}_{\alpha < \lambda} \in M[G]$.

Por el lema de los sistemas Δ en $M[G]$, existe $I \subset \lambda$, ($|I| = \aleph_1$) $^{M[G]}$ y un $r \subset \lambda$ finito de modo que $\bigwedge \alpha \beta \in I (\alpha \neq \beta \rightarrow t_\alpha \cap t_\beta = r)$. Como es habitual, si la familia $\{t_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$ fuera numerable $^{M[G]}$, bastaría tomar I de modo que todos los t_α con $\alpha \in I$ fueran iguales a un mismo r .

Como $\{s_\alpha \cap r\}_{\alpha < \lambda}$ sólo puede tomar un número finito de valores, restringiendo I podemos suponer que existe $s \subset \kappa$ finito tal que $\bigwedge \alpha \in I s_\alpha \cap r = s$. Fijemos $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$.

Las condiciones p_α y p_β son compatibles porque ambas están en G . Una está definida sobre $[t_\alpha]^2$ y la otra sobre $[t_\beta]^2$, luego podemos extenderlas a una condición $q \in \mathbb{R}$ definida sobre $[t_\alpha \cup t_\beta]^2$ que tome el valor 0 en los pares donde p_α y p_β no están definidas. En particular $q(\{u, v\}) = 0$ para todo $\{u, v\} \in [s_\alpha \cup s_\beta]^2$, pues en caso contrario una de las dos condiciones, digamos p_α , estaría definida en $\{u, v\}$ con el valor 1. En particular $u, v \in t_\alpha$. Si $u \in s_\beta \subset t_\beta$ entonces $u \in t_\alpha \cap t_\beta = r$, luego $u \in s_\beta \cap r = s = s_\alpha \cap r$. En definitiva tenemos que $u \in s_\alpha$ e igualmente $v \in s_\alpha$. Así, $\{u, v\} \in [s_\alpha]^2 \subset C_0$ y, como $p_\alpha \in G$, la definición de C_0 nos da que $p_\alpha(\{u, v\}) = 0$, contradicción.

Sea H un filtro \mathbb{R} -genérico sobre M tal que $q \in H$. Como q extiende a p_α y a p_β (en particular a p) tenemos que

$$q \Vdash \tau : \check{\lambda} \longrightarrow \mathbb{P}(\check{\kappa}, \Gamma) \wedge (\bigwedge \alpha \beta \in \check{\lambda} \tau(\alpha) \perp \tau(\beta)) \wedge \tau(\check{\alpha}) = \check{s}_\alpha \wedge \tau(\check{\beta}) = \check{s}_\beta.$$

Por consiguiente, $s_\alpha, s_\beta \in \mathbb{P}(\kappa, H)$, $s_\alpha \perp s_\beta$, mientras que por construcción $[s_\alpha \cup s_\beta]^2 \subset C_0(\kappa, H)$ (pues $q \in H$ toma el valor 0 sobre $[s_\alpha \cup s_\beta]^2$), luego $s_\alpha \cup s_\beta \in \mathbb{P}(\kappa, H)$ es una extensión común de s_α y s_β , contradicción.

Con esto tenemos que \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable $^{M[G]}$. Similarmemente, definimos

$$C_1 = \{\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2 \mid \forall p \in G p(\{\alpha, \beta\}) = 1\} \in M[G]$$

y $\mathbb{Q} = \{s \in \mathcal{P}^f A \mid [s]^2 \subset C_1\} \in M[G]$, considerado como c.p.o. con la relación definida igual que en \mathbb{P} . Obviamente también cumple la condición de cadena numerable ^{$M[G]$} , pero el producto $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ no la cumple, ya que $\{(\{\alpha\}, \{\alpha\})\}_{\alpha < \kappa}$ es una anticadena de cardinal κ en $M[G]$. ■

El teorema 12.7 muestra que el teorema anterior no puede mejorarse, en el sentido de que el producto de c.p.o.s con la condición de cadena numerable no puede tener anticadenas de cardinal mayor que 2^{\aleph_0} .

Terminamos con la construcción más complicada, pero es la que tiene la hipótesis más débil. En realidad basta la hipótesis del continuo para construir un par de c.p.o.s con la condición de cadena numerable cuyo producto no la tenga. El argumento es el mismo que el del teorema anterior, salvo que ahora hemos de obtener conjuntos C_0 y C_1 adecuados a partir de la hipótesis del continuo, lo cual resulta mucho más complejo. Nos ocupamos de ello en un teorema previo.

Teorema 9.33 *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, existen conjuntos disjuntos $C_0, C_1 \subset [\omega_1]^2$ de manera que si S es una familia no numerable de subconjuntos disjuntos en ω_1 e $i < 2$, existen $s, t \in S$ tales que $\{\{x, y\} \mid x \in s \wedge y \in t\} \subset C_i$.*

DEMOSTRACIÓN: Usaremos la notación $A \otimes B = \{\{a, b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Recordemos que $\mathcal{P}^f A$ representa al conjunto de los subconjuntos finitos de A .

Sea $\{s_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ el conjunto de las sucesiones de subconjuntos finitos de ω_1 disjuntos dos a dos (hay $\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \aleph_1$). Sea $s_\alpha = \{s_\alpha^n\}_{n \in \omega}$.

Definimos por recurrencia dos sucesiones $\{C_i(\alpha)\}_{\alpha < \omega_1}$, $i < 2$ de modo que $C_i(\alpha) \subset \alpha$ y $C_0(\alpha) \cap C_1(\alpha) = \emptyset$.

Supuestos definidos $\{C_i(\beta)\}_{\beta < \alpha}$, sea $\{(i_m, \beta_m, x_m)\}_{m \in \omega}$ una enumeración de todas las ternas (i, β, x) tales que:

- a) $i < 2$,
- b) $\beta < \alpha \wedge \bigwedge n \in \omega s_\beta^n \subset \alpha$,
- c) $x \in \mathcal{P}^f \alpha$,
- d) El conjunto $\{n \in \omega \mid s_\beta^n \otimes x \subset \bigcup_{\beta < \alpha} C_i(\beta) \otimes \{\beta\}\}$ es infinito.

Hay una cantidad numerable de tales ternas, pues 2 , α y $\mathcal{P}^f \alpha$ son numerables. Si hay una cantidad finita las repetimos en la enumeración, si no existiera ninguna, definimos $C_1(\alpha) = C_2(\alpha) = \emptyset$.

Para cada $m \in \omega$ sea $I_m = \{n \in \omega \mid s_{\beta_m}^n \otimes x_m \subset \bigcup_{\beta < \alpha} C_{i_m}(\beta) \otimes \{\beta\}\}$ (infinito).

Sea $\Gamma : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ la semejanza canónica (la determinada por el orden de Gödel en $\omega \times \omega$) y sean $u, v : \omega \rightarrow \omega$ sus inversas, es decir, $\Gamma(u(n), v(n)) = n$.

Definimos por recurrencia dos sucesiones crecientes R_n, V_n de subconjuntos finitos de α de modo que $R_n \cap V_n = \emptyset$. Partimos de $R_0 = s_{\beta_0}^m, V_0 = s_{\beta_0}^t$, para ciertos $m, t \in I_0, m \neq t$.

Sea $R_n = R_{n-1} \cup s_{\beta_{u(n)}}^{m(n)}$, donde $m(n)$ es el menor natural $m \in I_{u(n)}$ tal que $V_{n-1} \cap s_{\beta_{u(n)}}^m = \emptyset \wedge s_{\beta_{u(n)}}^m \not\subset R_{n-1}$.

Así mismo, sea $V_n = V_{n-1} \cup s_{\beta_{u(n)}}^{t(n)}$, donde $t(n)$ es el menor natural $t \in I_{u(n)}$ tal que $R_n \cap s_{\beta_{u(n)}}^t = \emptyset \wedge s_{\beta_{u(n)}}^t \not\subset V_{n-1}$.

Sean

$$C_0(\alpha) = \bigcup_{n \in \omega} R_n \subset \alpha, \quad C_1(\alpha) = \bigcup_{n \in \omega} V_n \subset \alpha.$$

Por construcción $C_0(\alpha) \cap C_1(\alpha) = \emptyset$ y si $u(n) = n_0$ entonces

$$s_{\beta_{n_0}}^{m(n)} \subset C_0(\alpha), \quad s_{\beta_{n_0}}^{t(n)} \subset C_1(\alpha).$$

De este modo el conjunto

$$\{n \in I_m \mid s_{\beta_m}^n \subset C_i(\alpha)\}$$

es infinito, para todo $i < 2$ y $m \in \omega$. Finalmente definimos

$$C_i = \bigcup_{\alpha < \omega_1} C_i(\alpha) \otimes \{\alpha\}.$$

Con esta construcción, los C_i cumplen la propiedad siguiente:

Si la cuádrupla (i, β, x, α) cumple:

- $i \in 2$,
- $\beta < \alpha \wedge \bigwedge n \in \omega s_{\beta}^n \subset \alpha$,
- $x \in \mathcal{P}^f \alpha$,
- *el conjunto $\{n \in \omega \mid s_{\beta}^n \otimes x \subset C_i\}$ es infinito,*

entonces $\{n \in \omega \mid s_{\beta}^n \otimes (x \cup \{\alpha\}) \subset C_i\}$ es infinito.

En efecto, en estas condiciones $(i, \beta, x) = (i_m, \beta_m, x_m)$ para algún $m \in \omega$ en la construcción de $C_i(\alpha)$, ya que, en realidad, tenemos que el conjunto

$$\{n \in \omega \mid s_{\beta}^n \otimes x \subset \bigcup_{\beta < \alpha} C_i(\beta) \otimes \{\beta\}\} \quad (= I_m)$$

es infinito. Por consiguiente, el conjunto $\{n \in I_m \mid s_{\beta_m}^n \subset C_{i_m}(\alpha)\}$ es infinito, luego el conjunto

$$\{n \in I_m \mid s_{\beta_m}^n \otimes (x \cup \{\alpha\}) \subset \bigcup_{\beta \leq \alpha} C_{i_m}(\beta) \otimes \{\beta\}\}$$

es infinito, con lo que

$$\{n \in \omega \mid s_{\beta_m}^n \otimes (x \cup \{\alpha\}) \subset C_i\}$$

es infinito, como queríamos.

Veamos que estos conjuntos C_i cumplen el teorema. Para ello tomamos una familia no numerable S de subconjuntos finitos de ω_1 disjuntos dos a dos y fijamos $i < 2$.

Sea $\beta < \omega_1$ tal que $\bigwedge n \in \omega \ s_\beta^n \in S$. Sea $\beta < \delta < \omega_1$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} s_\beta^n < \delta$ y sea $t \in S$ tal que $t \cap \delta = \emptyset$. Digamos que $t = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, con $\delta \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n$.

Tomando $x = \emptyset$ y $\alpha = \alpha_1$, la cuádrupla (i, β, x, α) cumple las propiedades anteriores, pues $\{n \in \omega \mid s_\beta^n \otimes x \subset C_i\} = \omega$. Por consiguiente el conjunto $\{n \in \omega \mid s_\beta^n \otimes \{\alpha_1\} \subset C_i\}$ es infinito. Ahora tomamos $x = \{\alpha_1\}$ y $\alpha = \alpha_2$, con lo que llegamos a que el conjunto $\{n \in \omega \mid s_\beta^n \otimes \{\alpha_1, \alpha_2\} \subset C_i\}$ es infinito. Tras n pasos concluimos que el conjunto $\{n \in \omega \mid s_\beta^n \otimes t \subset C_i\}$ es infinito, y basta tomar n_0 en este conjunto y $s = s_\beta^{n_0} \in S$ para que se cumpla $s \otimes t \subset C_i$. ■

Ahora ya es fácil probar:

Teorema 9.34 *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ entonces existen dos c.p.o.s (o dos espacios topológicos compactos) que cumplen la condición de cadena numerable y cuyo producto no la cumple.*

DEMOSTRACIÓN: Sean C_0 y C_1 según el teorema anterior. Definimos

$$\mathbb{P}_i = \{s \in \mathcal{P}^f \omega_1 \mid [s]^2 \subset C_i\},$$

con el orden dado por $p \leq q \leftrightarrow q \subset p$. Como $[\{\alpha\}]^2 = \emptyset$, es claro que $\{\alpha\} \in \mathbb{P}_i$ para $i = 1, 2$. Así mismo es claro que $\{(\{\alpha\}, \{\alpha\})\}_{\alpha < \omega_1}$ es una anticadena en $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$. Sólo hemos de probar que \mathbb{P}_i cumple la condición de cadena numerable.

Sea $\{t_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ un subconjunto no numerable de \mathbb{P}_i . Por el lema de los sistemas Δ podemos suponer que es cuasidisjunta de raíz r . Sea $s_\alpha = t_\alpha \setminus r$. Entonces $[s_\alpha]^2 \subset [t_\alpha]^2 \subset C_i$, luego $s_\alpha \in \mathbb{P}_i$ y $\{s_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ es una familia no numerable de subconjuntos finitos de ω_1 disjuntos dos a dos. Por el teorema anterior existen $\alpha < \beta < \omega_1$ tales que $s_\alpha \otimes s_\beta \subset C_i$, pero entonces

$$[t_\alpha \cup t_\beta]^2 = [t_\alpha]^2 \cup [t_\beta]^2 \cup (s_\alpha \otimes s_\beta) \subset C_i,$$

con lo que $t_\alpha \cup t_\beta \in \mathbb{P}_i$ es una extensión común de t_α y t_β . Por consiguiente la familia de partida no era una anticadena. ■

Capítulo X

La medida de Lebesgue

En este capítulo mostraremos algunas aplicaciones al análisis matemático de la teoría que hemos desarrollado. Concretamente, probaremos la indecidibilidad de algunas cuestiones relacionadas con la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Resumimos en la primera sección los resultados de teoría de la medida que vamos a necesitar.

10.1 Medidas en álgebras de Boole

Definición 10.1 Sea \mathbb{B} un álgebra de Boole. Una *medida finitamente aditiva* en \mathbb{B} es una aplicación $\mu : \mathbb{B} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que

- a) $\mu(\mathbf{0}) = 0$, $\mu(\mathbf{1}) > 0$,
- b) $\bigwedge pq \in \mathbb{B} (p \wedge q = \mathbf{0} \rightarrow \mu(p \vee q) = \mu(p) + \mu(q))$.

Se dice que μ es *unitaria* si $\mu(\mathbf{1}) = 1$, se dice que μ es *finita* si $\mu(\mathbf{1}) < +\infty$, se dice que μ es *σ -finita* si existen condiciones $\{p_n\}_{n \in \omega}$ en \mathbb{B} tales que $\mathbf{1} = \bigvee_{n \in \omega} p_n$ y $\bigwedge n \in \omega \mu(p_n) < +\infty$.

Si \mathbb{B} es \aleph_1 -completa (es decir, si los conjuntos numerables tienen supremo e ínfimo) diremos que μ es una *medida* en \mathbb{B} si para toda anticadena $\{p_n\}_{n \in \omega}$ en \mathbb{B} se cumple que

$$\mu\left(\bigvee_{n \in \omega} p_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(p_n).$$

Esta condición¹ contiene ya la propiedad b) de la definición de medida finitamente aditiva.

Un *álgebra medida* es un par ordenado (\mathbb{B}, μ) , donde \mathbb{B} es un álgebra de Boole \aleph_1 -completa y μ es una medida en \mathbb{B} .

Si \mathbb{B} es un álgebra medida, el *ideal de los elementos nulos* de \mathbb{B} se define como

$$I_\mu = \{p \in \mathbb{B} \mid \mu(p) = 0\}.$$

¹Convenimos en que una suma con un sumando igual a $+\infty$ toma el valor $+\infty$.

El teorema siguiente recoge las propiedades elementales de los conceptos que acabamos de introducir.

Teorema 10.2 *Sea \mathbb{B} un álgebra medida.*

- a) Si $p, q \in \mathbb{B}$, $p \leq q$, entonces $\mu(p) \leq \mu(q)$.
 b) Si $\{p_n\}_{n \in \omega}$ es una familia de elementos de \mathbb{B} , no necesariamente incompatibles entre sí, entonces

$$\mu\left(\bigvee_{n \in \omega} p_n\right) \leq \sum_{n \in \omega} \mu(p_n).$$

- c) Si $p, q \in \mathbb{B}$, entonces $\mu(p \vee q) \leq \mu(p) + \mu(q)$.
 d) Si $\{p_n\}_{n \in \omega}$ es una sucesión creciente en \mathbb{B} , entonces

$$\mu\left(\bigvee_{n \in \omega} p_n\right) = \sup_{n \in \omega} \mu(p_n).$$

- e) Si $\{p_n\}_{n \in \omega}$ es una sucesión decreciente en \mathbb{B} y $\mu(p_0) < +\infty$, entonces

$$\mu\left(\bigwedge_{n \in \omega} p_n\right) = \inf_{n \in \omega} \mu(p_n).$$

- f) I_μ es un ideal \aleph_1 -completo de \mathbb{B} y si μ es σ -finita entonces I_μ cumple la condición de cadena numerable.

DEMOSTRACIÓN: a) Es fácil ver que $q = p \vee (q \wedge p')$ y $p \wedge (q \wedge p') = \mathbb{0}$, luego $\mu(q) = \mu(p) + \mu(q \wedge p') \geq \mu(p)$.

$$c) \mu(p \vee q) = \mu(p \vee (q \wedge p')) = \mu(p) \wedge \mu(q \wedge p') \leq \mu(p) + \mu(q).$$

b) Sea $q_n = p_n \wedge \left(\bigvee_{m < n} p_m\right)'$. Claramente $q_n \leq p_n$, pero $\bigvee_{n \in \omega} q_n = \bigvee_{n \in \omega} p_n$, pues

$$p_n \leq \bigvee_{m \leq n} q_m \leq \bigvee_{n \in \omega} q_n.$$

La primera desigualdad se prueba por inducción:

$$p_n = \left(p_n \wedge \left(\bigvee_{m < n} p_m\right)'\right) \vee \left(p_n \wedge \left(\bigvee_{m < n} p_m\right)\right) \leq q_n \vee \left(\bigvee_{m < n} q_m\right) = \bigvee_{m \leq n} q_m.$$

Además $\{q_n\}_{n \in \omega}$ es una anticadena, luego

$$\mu\left(\bigvee_{n \in \omega} p_n\right) = \mu\left(\bigvee_{n \in \omega} q_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(q_n) \leq \sum_{n \in \omega} \mu(p_n).$$

d) De forma similar a como hemos hecho en el apartado anterior, podemos expresar $\bigvee_{n \in \omega} p_n = p_0 \vee \bigvee_{n \in \omega} (p_{n+1} \wedge p_n')$, de modo que

$$\mu\left(\bigvee_{n \in \omega} p_n\right) = \mu(p_0) + \sum_{n \in \omega} \mu(p_{n+1} \wedge p_n').$$

Si $\mu(p_0) = +\infty$ o algún $\mu(p_{n+1} \wedge p'_n) = +\infty$, es claro que los dos miembros de la igualdad que hemos de probar son infinitos. En caso contrario tenemos que $\mu(p_{n+1}) = \mu(p_n) + \mu(p_{n+1} \wedge p'_n)$, luego por inducción todos los p_n tienen medida finita y

$$\mu\left(\bigvee_{n \in \omega} p_n\right) = \mu(p_0) + \sum_{n \in \omega} (\mu(p_{n+1}) - \mu(p_n)) = \sup_{n < \omega} \mu(p_n).$$

e) La sucesión $\{p_0 \wedge p'_n\}_{n < \omega}$ está en las condiciones del apartado anterior, luego

$$\mu\left(p_0 \wedge \bigvee_{n \in \omega} p'_n\right) = \sup_{n < \omega} \mu(p_0 \wedge p'_n),$$

lo cual equivale a

$$\mu\left(p_0 \wedge \left(\bigwedge_{n \in \omega} p_n\right)'\right) = \sup_{n < \omega} (\mu(p_0) - \mu(p_n)),$$

o también a

$$\mu(p_0) - \mu\left(\bigwedge_{n \in \omega} p_n\right) = \mu(p_0) - \inf_{n \in \omega} \mu(p_n).$$

f) Que I_μ es un ideal \aleph_1 -completo se sigue inmediatamente de las propiedades anteriores. Para probar que cumple la condición de cadena numerable hemos de ver que no existe ninguna anticadena $\{p_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ en $\mathbb{B} \setminus I_\mu$.

Estamos suponiendo que μ es σ -finita, con lo que podemos descomponer $\mathbb{1} = \bigvee_{n \in \omega} r_n$, donde $\mu(r_n) < +\infty$. Razonando como en b) podemos suponer que las condiciones r_n son incompatibles dos a dos.

Entonces $p_\alpha = \bigvee_{n \in \omega} p_\alpha \wedge r_n$, luego $0 < \mu(p_\alpha) = \sum_{n \in \omega} \mu(p_\alpha \wedge r_n)$. Por consiguiente existe un $n \in \omega$ tal que $\mu(p_\alpha \wedge r_n) > 0$. Más aún, ha de haber una cantidad no numerable de α 's para las que sirva el mismo n . Restringiendo la anticadena de partida podemos suponer que el mismo n vale para todo α . Así, si llamamos $r = r_n$, tenemos que $\mu(r_n) < +\infty$ y $\bigwedge \alpha < \omega_1 \mu(p_\alpha \wedge r) > 0$.

Entonces $\omega_1 = \bigcup_{m \in \omega} \{\alpha < \omega_1 \mid \mu(p_\alpha \wedge r) > 1/m\}$. Alguno de estos conjuntos ha de ser no numerable, luego restringiendo de nuevo la anticadena inicial podemos suponer que $\bigwedge \alpha < \omega_1 \mu(p_\alpha \wedge r) > 1/m$, pero esto es absurdo, pues para todo $k \in \omega$ tenemos que

$$\frac{k}{m} < \sum_{n < k} \mu(p_n \wedge r) = \mu\left(\bigvee_{n < k} p_n \wedge r\right) \leq \mu(r),$$

y esto obliga a que $\mu(r) = +\infty$. ■

Así, el cociente de un álgebra de Boole respecto al ideal de elementos nulos de una medida σ -finita nos da un álgebra de Boole completa que podemos usar para formar extensiones genéricas:

Teorema 10.3 Sea \mathbb{B} un álgebra medida y consideremos el álgebra cociente $\mathbb{B}_\mu = \mathbb{B}/I_\mu$.

a) \mathbb{B}_μ es \aleph_1 -completa y es un álgebra medida con $\bar{\mu} : \mathbb{B}_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\bar{\mu}([p]) = \mu(p)$. Además $I_{\bar{\mu}}$ es trivial. Si μ es finita, σ -finita o unitaria, entonces $\bar{\mu}$ también lo es.

b) Si $\{p_n\}_{n \in \omega}$ es una familia de elementos de \mathbb{B} , entonces

$$\bigvee_{n \in \omega} [p_n] = \left[\bigvee_{n \in \omega} p_n \right], \quad \bigwedge_{n \in \omega} [p_n] = \left[\bigwedge_{n \in \omega} p_n \right].$$

c) Si μ es σ -finita entonces \mathbb{B}_μ es completa y cumple la condición de cadena numerable.

DEMOSTRACIÓN: El hecho de que \mathbb{B}_μ sea \aleph_1 -completa es el apartado b): claramente $[p_n] \leq \left[\bigvee_{n \in \omega} p_n \right]$, y si $[r]$ es una cota superior de todos los $[p_n]$ entonces $[p_n \wedge r'] = \emptyset$, luego $p_n \wedge r' \in I_\mu$ y como éste es \aleph_1 -completo, $\bigvee_{n \in \omega} p_n \wedge r' \in I_\mu$, luego $\left[\bigvee_{n \in \omega} p_n \right] \wedge [r'] = \emptyset$ y, por consiguiente $\left[\bigvee_{n \in \omega} p_n \right] \leq [r]$. Esto prueba la primera parte de b), y la segunda se sigue inmediatamente.

Tenemos, pues, que \mathbb{B}_μ es \aleph_1 -completa. La medida $\bar{\mu}$ está bien definida, pues si $[p] = [q]$ entonces $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \in I_\mu$, luego $\mu(p \wedge q') = \mu(p' \wedge q) = 0$. Consecuentemente

$$\mu(p) = \mu(p \wedge q) + \mu(p \wedge q') = \mu(p \wedge q),$$

e igualmente $\mu(q) = \mu(p \wedge q)$, luego $\mu(p) = \mu(q)$. Ahora es obvio que $\bar{\mu}$ es una medida en \mathbb{B}_μ , así como que es unitaria, finita o σ -finita si μ lo es. Su ideal es trivial, pues si $\bar{\mu}([p]) = 0$ es que $\mu(p) = 0$, luego $p \in I_\mu$ y $[p] = \emptyset$.

c) es consecuencia inmediata del apartado f) del teorema anterior combinado con los teoremas de la sección 7.4. ■

Definición 10.4 Sea \mathbb{B} un álgebra medida. Se dice que $p \in \mathbb{B}$ es un *átomo* si $\mu(p) > 0$ y $\bigwedge q \in \mathbb{B}(q \leq p \rightarrow \mu(q) = 0 \vee \mu(q) = \mu(p))$. La medida μ es *atómica* o *no atómica* según si tiene o no tiene átomos.

Es fácil comprobar que $p \in \mathbb{B}$ es un átomo si y sólo si $[p]$ es un átomo en \mathbb{B}_μ , por lo que μ es atómica si y sólo si lo es $\bar{\mu}$. Necesitaremos el teorema siguiente:

Teorema 10.5 Sea μ una medida no atómica en un álgebra \mathbb{B} , sea $p \in \mathbb{B}$ y sea k un número real tal que $0 < k < \mu(p) < +\infty$. Entonces existe $q \in \mathbb{B}$ tal que $q \leq p$ y $\mu(q) = k$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que ningún $q \leq p$ tiene medida k . Veamos en primer lugar que para todo $q \in \mathbb{B}$ con $\mu(q) > 0$ y para todo natural $n > 1$ existe una anticadena $\{s_i\}_{i < n}$ en \mathbb{B} tal que $q = \bigvee_{i < n} s_i$ y $\bigwedge_{i < n} \mu(s_i) > 0$.

Razonamos por inducción sobre n . Para $n = 2$, como q no es un átomo, existe $s_0 \leq q$ tal que $0 < \mu(s_0) < \mu(q)$. Basta tomar $s_1 = q \wedge s'_0$. Claramente $q = s_0 \vee s_1$, $s_0 \wedge s_1 = \mathbb{O}$ y $\mu(q) = \mu(s_0) + \mu(s_1)$, luego ambos sumandos son positivos.

Si vale para n , por el caso 2 podemos descomponer $q = q' \vee s_n$, de modo que $q' \wedge s_n = \mathbb{O}$ y $\mu(q') > 0$, $\mu(s_n) > 0$. Basta aplicar a q' la hipótesis de inducción.

Veamos ahora que si $q \in \mathbb{B}$ cumple $k < \mu(q) < +\infty$, entonces existe $r \leq q$ tal que $k < \mu(r) < \mu(q)$.

Sea n un natural tal que $\frac{1}{n}\mu(q) < \mu(q) - k$. Sea $\{s_i\}_{i < n}$ una anticadena tal que $q = \bigvee_{i < n} s_i$ y $\bigwedge_{i < n} \mu(s_i) > 0$. Como

$$\mu(q) = \sum_{i < n} \mu(s_i),$$

algún $i < n$ ha de cumplir que $\mu(s_i) \leq \frac{1}{n}\mu(q) < \mu(q) - k$. Sea $r = q \wedge s'_i \leq q$. Así $\mu(q) = \mu(s_i) + \mu(r)$, luego $\mu(r) = \mu(q) - \mu(s_i) > k$.

Vamos a construir una sucesión $\{s_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ tal que

$$\bigwedge \alpha \beta (\alpha < \beta < \omega_1 \rightarrow s_\beta \leq s_\alpha \wedge k < \mu(s_\beta) < \mu(s_\alpha)).$$

Partimos de $s_0 = p$. Definido s_α tal que $k < \mu(s_\alpha)$, acabamos de probar que existe $s_{\alpha+1}$ tal que $s_{\alpha+1} \leq s_\alpha$ y $k < \mu(s_{\alpha+1}) < \mu(s_\alpha)$. Definidos $\{s_\delta\}_{\delta < \lambda}$, para un ordinal límite $\lambda < \omega_1$, sea $s_\lambda = \bigwedge_{\delta < \lambda} s_\delta$. Sea $\{\delta_n\}_{n < \omega}$ una sucesión cofinal creciente en λ . Es claro que $s_\lambda = \bigwedge_{n < \omega} s_{\delta_n} = \inf_{n < \omega} \mu(s_{\delta_n}) \geq k$, pero por hipótesis ha de ser $\mu(s_\lambda) > k$.

La sucesión de números reales $\{\mu(s_\alpha)\}_{\alpha < \omega_1}$ es estrictamente decreciente, y está acotada inferiormente por k , luego existe $a = \inf_{\alpha < \omega_1} \mu(s_\alpha)$ y $k \leq a$.

Si $0 < n < \omega$, tomemos $\alpha_n < \omega_1$ tal que $\bigwedge \alpha \geq \alpha_n \ a + \frac{1}{n} > \mu(s_\alpha)$. Sea $\alpha = \sup_{n < \omega} \alpha_n < \omega_1$. Entonces $\mu(s_\alpha) - a < 1/n$ para todo natural $n > 0$, luego ha de ser $\mu(s_\alpha) = a$, pero entonces también $\mu(s_{\alpha+1}) = a$, contradicción, pues por construcción $\mu(s_{\alpha+1}) < \mu(s_\alpha)$. ■

Para terminar describiremos las medidas concretas con las que vamos a trabajar. Omitimos las construcciones porque requieren comprobaciones laboriosas típicas de la teoría de la medida y ninguna de las ideas y conceptos que éstas requieren nos van a aparecer después.

Definición 10.6 Una σ -álgebra en un conjunto X es un álgebra \aleph_1 -completa de subconjuntos de X en la que el supremo de una familia numerable de conjuntos es su unión (o, equivalentemente, su ínfimo es su intersección).

Es inmediato que la intersección de una familia de σ -álgebras en un conjunto X vuelve a ser una σ -álgebra, por lo que podemos definir la σ -álgebra generada

por un subconjunto Y como la intersección de todas las σ -álgebras de X que contienen a Y .

Si X es un espacio topológico, la σ -álgebra de Borel de X es la σ -álgebra generada por los abiertos de X . Una *medida de Borel* en X es una medida definida sobre la σ -álgebra de Borel de X .

Una medida μ en una σ -álgebra \mathcal{M} de un espacio topológico X es *regular* si para todo $A \in \mathcal{M}$ se cumple que

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U) \mid U \in \mathcal{M} \wedge A \subset U \wedge U \text{ es abierto en } X\} \\ &= \sup\{\mu(K) \mid K \in \mathcal{M} \wedge K \subset A \wedge K \text{ es compacto}\}\end{aligned}$$

Diremos que (X, \mathbb{B}, μ) es un *espacio medida* si X es un conjunto no vacío, \mathbb{B} es una σ -álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida en \mathbb{B} . Diremos que (X, \mathbb{B}, μ) es un *espacio medida regular* si además X es un espacio topológico (de Hausdorff) que puede expresarse como unión numerable de subespacios compactos y μ es una medida regular.

La medida de Lebesgue La medida de Lebesgue en \mathbb{R} queda caracterizada esencialmente por el teorema siguiente, que presentamos sin prueba:

Teorema 10.7 *Existe una única medida de Borel μ en \mathbb{R} tal que si $a < b$ son números reales entonces $\mu([a, b]) = b - a$. Además μ es regular.*

La medida de Lebesgue en \mathbb{R} no es exactamente la determinada por el teorema anterior, pues es posible extenderla ligeramente. Un subconjunto A de \mathbb{R} es *medible Lebesgue* si es de la forma $A = B \cup N$, donde B es un conjunto de Borel y N es un subconjunto de un conjunto de Borel nulo (respecto a la medida del teorema anterior). La *medida de Lebesgue* de A se define como $\mu(A) = \mu(B)$. Se demuestra que el conjunto \mathcal{M} de todos los conjuntos medibles Lebesgue es una σ -álgebra y que la medida de Lebesgue así definida es ciertamente una medida regular que extiende a la dada por el teorema anterior. Esta extensión tiene la propiedad adicional de que todo subconjunto de un conjunto nulo es (medible y) nulo, es decir, que el ideal I_μ es de hecho un ideal del álgebra $\mathcal{P}\mathbb{R}$.

No obstante, los resultados que nos van a interesar valen indistintamente para la medida de Lebesgue completa o para su restricción a la σ -álgebra de Borel. Por ello, salvo que precisemos explícitamente, cuando hablemos de la medida de Lebesgue entenderemos que nos referimos indistintamente a una u otra.

Por ejemplo, del teorema anterior se sigue inmediatamente que la medida de Lebesgue (completa o no) es σ -finita, los puntos tienen medida nula y es invariante por traslaciones.

Ejercicio: Probar que el álgebra de todos los subconjuntos de \mathbb{R} medibles Lebesgue módulo los conjuntos nulos es isomorfa al álgebra de Borel de \mathbb{R} módulo los conjuntos de Borel nulos.

Producto de medidas Supondremos conocidos los resultados elementales sobre producto de medidas que resumimos a continuación:

Definición 10.8 Si \mathbb{B} es una σ -álgebra en un conjunto X y \mathbb{C} es una σ -álgebra en un conjunto Y , llamaremos $\mathbb{B} \times \mathbb{C}$ a la σ -álgebra en $X \times Y$ generada por los conjuntos $B \times C$ tales que $B \in \mathbb{B}$ y $C \in \mathbb{C}$.

Teorema 10.9 Si $(X_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ para $i = 1, 2$ son dos espacios medida regulares, entonces existe una única medida regular $\mu_1 \times \mu_2$ definida en $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ tal que si $B_i \in \mathbb{B}_i$ entonces²

$$(\mu_1 \times \mu_2)(B_1 \times B_2) = \mu_1(B_1)\mu_2(B_2).$$

La medida $\mu_1 \times \mu_2$ descrita en el teorema anterior se conoce como *medida producto* de las medidas dadas. En dichas condiciones, si $x \in X_1$, $y \in X_2$ y $E \subset X_1 \times X_2$, definimos

$$E_x = \{z \in X_2 \mid (x, z) \in E\}, \quad E^y = \{z \in X_1 \mid (z, y) \in E\}.$$

Se cumple que si $E \in \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ entonces $E_x \in \mathbb{B}_2$ y $E^y \in \mathbb{B}_1$. En efecto, es fácil ver que

$$\mathbb{B} = \{E \in \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 \mid E_x \in \mathbb{B}_2 \wedge E^y \in \mathbb{B}_1\}$$

es una σ -subálgebra de $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ que contiene a los generadores $B_1 \times B_2$. El teorema siguiente es un caso particular del teorema de Fubini y su prueba requiere el uso del cálculo integral:

Teorema 10.10 (Teorema de Fubini) Sean $(X_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ dos espacios medida regulares. Entonces un conjunto $E \in \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ es nulo para la medida producto si y sólo si E_x es nulo para casi todo³ $x \in X_1$, si y sólo si E^y es nulo para casi todo $y \in X_2$.

La medida de los cubos de Cantor Vamos a necesitar un último ejemplo de medida. Como no es tan habitual como los anteriores detallaremos más su construcción. Consideremos un conjunto arbitrario $I \neq \emptyset$. Se define el *cubo de Cantor generalizado* asociado a I como $X = 2^I$. Consideraremos a X como espacio topológico compacto con el producto de la topología discreta en 2.

Para cada $J \subset I$ finito y cada $Y \subset 2^J$, definimos el *cilindro* de base Y como el conjunto

$$C_J(Y) = \{f \in X \mid f|_J \in Y\}.$$

Es claro que los cilindros forman una base de la topología de X . Llamaremos \mathcal{C} al conjunto de todos los cilindros. Es fácil ver que se trata de un álgebra de subconjuntos de X . En efecto, observemos que si $J \subset J'$ son dos subconjuntos finitos de I , $Y \subset 2^J$ e $Y^{J'} = \{f \in 2^{J'} \mid f|_J \in Y\}$, entonces $C_J(Y) = C_{J'}(Y^{J'})$.

²Convenimos que $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.

³Naturalmente “para casi todo x ” significa para todo x salvo para los puntos de un conjunto de medida nula.

Esto implica que para operar dos cilindros podemos suponer que tienen el mismo soporte J . Ahora basta tener en cuenta las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\emptyset &= C_J(\emptyset) \in \mathcal{C}, & X &= C_J(2^J) \in \mathcal{C}, & X \setminus C_J(Y) &= C_J(2^J \setminus Y) \in \mathcal{C}, \\ C_J(Y) \cap C_J(Y') &= C_J(Y \cap Y') \in \mathcal{C}, & C_J(Y) \cup C_J(Y') &= C_J(Y \cup Y') \in \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Teorema 10.11 *Existe una única medida finitamente aditiva $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ tal que para todo $J \subset I$ finito y todo $Y \subset 2^J$ se cumple*

$$\lambda(C_J(Y)) = \frac{|Y|}{2^{|J|}}.$$

DEMOSTRACIÓN: La igualdad del enunciado sirve como definición de λ . Para ello hemos de comprobar que no depende de la expresión del cilindro, es decir, si $C_J(Y) = C_{J'}(Y')$, entonces $C_{J \cup J'}(Y^{J \cup J'}) = C_{J \cup J'}(Y'^{J \cup J'})$, luego $Y^{J \cup J'} = Y'^{J \cup J'}$. Por consiguiente

$$\frac{|Y|}{2^{|J|}} = \frac{|Y|2^{|J' \setminus J|}}{2^{|J \cup J'|}} = \frac{|Y^{J \cup J'}|}{2^{|J \cup J'|}} = \frac{|Y'|2^{|J \setminus J'|}}{2^{|J \cup J'|}} = \frac{|Y'|}{2^{|J'|}}.$$

Veamos ahora que λ es una medida finitamente aditiva. Evidentemente se cumple $\lambda(\emptyset) = 0$ y $\lambda(X) = 1$. Si $C_J(Y) \cap C_J(Y') = \emptyset$, entonces $Y \cap Y' = \emptyset$, luego

$$\begin{aligned}\lambda(C_J(Y) \cup C_J(Y')) &= \lambda(C_J(Y \cup Y')) = \frac{|Y \cup Y'|}{2^{|J|}} \\ &= \frac{|Y|}{2^{|J|}} + \frac{|Y'|}{2^{|J|}} = \lambda(C_J(Y)) + \lambda(C_J(Y')).\end{aligned}$$

■

Llamaremos \mathbb{A}_I a la σ -álgebra en X generada por \mathcal{C} .

Teorema 10.12 *Si I es un conjunto no vacío, existe una única medida m en \mathbb{A}_I tal que para todo $J \subset I$ finito y todo $Y \subset 2^J$ se cumple*

$$m(C_J(Y)) = \frac{|Y|}{2^{|J|}}.$$

DEMOSTRACIÓN: En otras palabras, hemos de probar que λ admite una extensión única a \mathbb{A}_I . Esto es consecuencia del teorema de extensión de Hann. La única hipótesis que hemos de comprobar es que λ es una medida en \mathcal{C} , en el sentido de que si la unión de una familia numerable de cubos disjuntos dos a dos pertenece a \mathcal{C} , entonces su medida es la suma de las medidas de los cubos. Ahora bien, veremos que esto se cumple trivialmente, puesto que una unión numerable de cubos disjuntos dos a dos no está nunca en \mathcal{C} salvo que todos salvo una cantidad finita de ellos sean vacíos.

En efecto, sean $\{C_n\}_{n < \omega}$ cubos disjuntos dos a dos. Notemos que los cubos son abiertos y cerrados en X . En particular son compactos. Si la unión es un cubo C , entonces $\{C_n\}_{n < \omega}$ es un cubrimiento abierto del compacto C , luego admite un subcubrimiento finito, pero como son disjuntos dos a dos, esto sólo puede ser si los cubos que no forman parte del subcubrimiento son vacíos. ■

Teorema 10.13 Si I es un conjunto no vacío, $(2^I, \mathbb{A}_I, m)$ es un espacio medida regular. Si I es infinito la medida m es no atómica.

DEMOSTRACIÓN: La regularidad superior se sigue inmediatamente de la demostración del teorema de Hann. Para construir la medida m del teorema anterior a partir de la medida λ construida en 10.11, se construye una medida exterior $\lambda^* : \mathcal{P}X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\lambda^*(V) = \inf\left\{ \sum_{n < \omega} \lambda(C_i) \mid \{C_i\}_{i < \omega} \subset \mathcal{C} \wedge V \subset \bigcup_{n < \omega} C_i \right\},$$

y se demuestra que la restricción de λ^* a \mathbb{A}_I es una medida que extiende a λ . Así pues, $m = \lambda^*|_{\mathbb{A}_I}$. En nuestro caso, sucede que los cubos C_i son abiertos, por lo que si $V \in \mathbb{A}_I$, $\{C_i\}_{i < \omega} \subset \mathcal{C}$ y $V \subset \bigcup_{n < \omega} C_i$, entonces

$$m(V) \leq m\left(\bigcup_{n < \omega} C_i\right) \leq \sum_{n < \omega} \lambda(C_i),$$

luego

$$\begin{aligned} m(V) &\leq \inf\{m(U) \mid V \subset U \wedge U \text{ es abierto en } X\} \\ &\leq \inf\left\{ \sum_{n < \omega} \lambda(C_i) \mid \{C_i\}_{i < \omega} \subset \mathcal{C} \wedge V \subset \bigcup_{n < \omega} C_i \right\} = \lambda^*(V) = m(V). \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, aplicando la parte ya probada a $X \setminus V$, existe un abierto U en X tal que $X \setminus V \subset U$ y $m(U) - m(X \setminus V) < \epsilon$, pero esto equivale a que $X \setminus U \subset V$ y $m(V) - m(X \setminus U) < \epsilon$. Como $K = X \setminus U$ es compacto, tenemos que

$$m(V) - \epsilon \leq \sup\{m(K) \mid K \subset V \text{ es compacto}\} \leq m(V),$$

para todo $\epsilon > 0$, luego $m(V)$ coincide con el supremo y m es regular.

Supongamos que I es infinito y veamos que m es no atómica. Sea $U \in \mathbb{A}_I$ tal que $m(U) > 0$ y sea $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} < m(U)$. Sea $J \subset I$ tal que $|J| = n$. Es claro que podemos partir X en 2^n cubos disjuntos de medida $1/2^n$. Por consiguiente podemos partir U en 2^n conjuntos disjuntos de medida menor o igual que $1/2^n$. Si U fuera un átomo todos ellos deberían ser nulos, pero entonces U sería nulo, contradicción. ■

Definición 10.14 Sea I un conjunto no vacío. Llamaremos *álgebra de Cantor* asociada a I al álgebra cociente $\mathbb{B}_I = \mathbb{A}_I/I_m$, que es un álgebra de Boole completa con la condición de cadena numerable, sobre la que tenemos definida la medida \bar{m} (*medida de Cantor*).

Si I es infinito entonces \bar{m} es no atómica, luego \mathbb{B}_I también es no atómica como álgebra (un átomo tendría que tener medida nula, pero en \mathbb{B}_I sólo $\mathbb{0}$ tiene medida nula). Es claro que si $|I| = |J|$ entonces \mathbb{B}_I y \mathbb{B}_J son isomorfas.

Teorema 10.15 Si I es un conjunto tal que $|I|^{\aleph_0} = |I|$, entonces $|\mathbb{B}_I| = |I|$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $|\mathcal{C}| = |I|$. Definamos

$$A_0 = \mathcal{C}, \quad \bigwedge \alpha < \omega_1 \quad A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{2^I \setminus U \mid U \in A_\alpha\} \cup \left\{ \bigcup_{n < \omega} f(n) \mid f \in A_\alpha^\omega \right\},$$

$$\bigwedge \lambda \leq \omega_1 \quad A_\lambda = \bigcup_{n < \omega} A_\delta.$$

Se comprueba inmediatamente que A_{ω_1} es cerrado para complementos y uniones numerables, por lo que es una σ -álgebra en 2^I que contiene a \mathcal{C} . Así pues, $\mathbb{A}_I \subset A_{\omega_1}$ (de hecho se da la igualdad). Por otra parte, una simple inducción prueba que si $\alpha < \omega_1$ entonces $|A_\alpha| \leq |A_{\omega_1}| \leq \aleph_1 |I| = |I|$, luego $|\mathbb{A}_I| \leq |I|$ (notemos que, por la hipótesis, $|I| \geq \aleph_1$).

Obviamente entonces $|\mathbb{B}_I| \leq |I|$. Para cada $i \in I$, sea

$$C_i = C_{\{i\}}(\{(i, 0)\}) = \{f \in 2^I \mid f(i) = 0\} \in \mathcal{C}.$$

Es claro que si $i \neq j$ entonces $m((C_i \setminus C_j) \cup (C_j \setminus C_i)) = 1/2$, luego $[C_i] \neq [C_j]$ y por consiguiente $|\mathbb{B}_I| = |I|$. ■

10.2 La aditividad de la medida de Lebesgue

Estudiamos aquí varios problemas sobre la medida de Lebesgue relacionados entre sí. Para enunciarlos conviene introducir un concepto:

Definición 10.16 Sea (X, \mathbb{B}, μ) un espacio medida y κ un cardinal infinito. Se dice que μ es κ -aditiva si cuando $\{U_\alpha\}_{\alpha < \beta}$, con $\beta < \kappa$, es una familia de conjuntos de \mathbb{B} , entonces $\bigcup_{\alpha < \beta} U_\alpha \in \mathbb{B}$, y si son disjuntos dos a dos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \beta} U_\alpha\right) = \sum_{\alpha < \beta} \mu(U_\alpha),$$

donde una suma no numerable de números no negativos se define como el supremo del conjunto de todas las sumas parciales finitas.

Toda medida es, por definición, \aleph_1 -aditiva. La cuestión es si la medida de Lebesgue es κ -aditiva para algún cardinal mayor. Obviamente no puede ser $(2^{\aleph_0})^+$ -aditiva, pues descomponiendo \mathbb{R} en unión de puntos concluiríamos que $\mu(\mathbb{R}) = 0$. Así, pues, a lo sumo, la medida de Lebesgue puede ser 2^{\aleph_0} -aditiva.

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ entonces la solución es trivialmente afirmativa, luego el problema de la aditividad sólo tiene sentido si suponemos que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. En tal caso podemos plantearnos si la unión de \aleph_1 conjuntos medibles es medible. A su vez esto está relacionado con el cardinal de los conjuntos no medibles Lebesgue: si existe un conjunto no medible de cardinal \aleph_1 entonces la medida de Lebesgue no puede ser \aleph_2 -aditiva, pues entonces todos los conjuntos de cardinal \aleph_1 serían nulos.

Veamos en primer lugar que la definición de aditividad se puede simplificar notablemente:

Teorema 10.17 Sea (X, \mathbb{B}, μ) un espacio medida tal que μ sea σ -finita y sea κ un cardinal infinito. Entonces μ es κ -aditiva si y sólo si la unión de menos de κ subconjuntos nulos de X es nula.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que μ es κ -aditiva y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha < \beta}$, con $\beta < \kappa$ una familia de conjuntos nulos en X . Sea

$$B_\alpha = A_\alpha \setminus \bigcup_{\delta < \alpha} A_\delta.$$

Por la κ -aditividad, la unión es medible, luego B_α también lo es, luego es nulo. Además los conjuntos B_α son disjuntos dos a dos y su unión coincide con la de los A_α . Por la κ -aditividad es nula.

Supongamos ahora que la unión de menos de κ conjuntos nulos es nula y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha < \beta}$, con $\beta < \kappa$, una familia de conjuntos medibles tal que su unión no sea medible. Podemos suponer que β es el menor cardinal para el que esto sucede. Así, si definimos los conjuntos B_α igual que antes, tenemos que todos ellos son medibles, por la minimalidad de β , y disjuntos dos a dos, pero su unión no es medible.

Estamos suponiendo que μ es σ -finita, por lo que $X = \bigcup_{n < \omega} Y_n$, donde los conjuntos Y_n son medibles de medida finita. Sea $B_\alpha^n = B_\alpha \cap Y_n$. Así,

$$\sum_{\alpha < \beta} \mu(B_\alpha^n) \leq \mu(Y_n) < +\infty.$$

Ahora bien, si una suma de una cantidad no numerable de números reales no negativos es finita, todos sus sumandos salvo a lo sumo una cantidad numerable han de ser nulos, pues en caso contrario habría una cantidad no numerable de sumandos mayores o iguales que $1/n$ para cierto natural n , y entonces las sumas parciales finitas no estarían acotadas.

Así pues, en $\{B_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ hay una cantidad numerable de términos con medida positiva, cuya unión es medible porque \mathbb{B} es una σ -álgebra, y el resto son conjuntos nulos, cuya unión es medible por hipótesis, luego la unión total es medible, contradicción.

Con esto tenemos probado que la unión de menos de κ conjuntos medibles es medible. Supongamos ahora que $\{B_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ son medibles y disjuntos dos a dos. Definimos B_α^n como antes, de modo que entre ellos (para un n fijo) hay una cantidad numerable de conjuntos no nulos y el resto son nulos. Descomponemos la unión de todos en la unión de los nulos, que por hipótesis es nula, y la unión de los restantes, cuya medida es la suma de las medidas. Concluimos obviamente que la medida de toda la unión es la suma de las medidas. ■

Teorema 10.18 AM implica que la medida de Lebesgue es 2^{\aleph_0} -aditiva.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$, con $\kappa < 2^{\aleph_0}$ una familia de subconjuntos nulos de \mathbb{R} . Basta probar que su unión es nula. Fijemos $\epsilon > 0$ y sea \mathbb{P} el

conjunto de los abiertos de \mathbb{R} de medida menor que ϵ , dotado del orden inverso de la inclusión. Veamos que \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable.

Sea $W \subset \mathbb{P}$ un conjunto no numerable. Sea S el conjunto de uniones finitas de intervalos abiertos con extremos racionales. Claramente

$$W = \bigcup_{0 < n < \omega} \{p \in W \mid \mu(p) < \epsilon - 1/n\}.$$

Por consiguiente existe un n tal que el conjunto $Z = \{p \in W \mid \mu(p) < \epsilon - 1/n\}$ es no numerable. Para cada $p \in Z$, es claro que podemos tomar $p^* \in S$ tal que $p^* \subset p$ y $\mu(p \setminus p^*) < 1/n$. Como S es numerable, existen $p, q \in Z$ tales que $p^* = q^*$. Así $q^* \subset p \cap q$ y

$$\mu(p \cup q) = \mu(p) + \mu(q \setminus (p \cap q)) \leq \mu(p) + \mu(q \setminus q^*) < \epsilon - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \epsilon,$$

Por consiguiente $p \cup q \in \mathbb{P}$ es una extensión común de p y q , luego W no es una anticadena.

Para cada $\alpha < \kappa$ sea $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid A_\alpha \subset p\}$. Este conjunto es denso en \mathbb{P} , pues si $p \in \mathbb{P}$, como A_α es nulo, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $A_\alpha \subset q$ y $\mu(q) < \epsilon - \mu(p)$. Entonces $\mu(p \cup q) < \epsilon$, luego $p \cup q \in D_\alpha$ es una extensión de p .

Por $\text{AM}(\kappa)$, existe un filtro G que corta a todos los conjuntos D_α . Consideremos $U = \bigcup_{p \in G} p$. Obviamente U es un abierto y

$$\bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha \subset U.$$

Basta ver que $\mu(U) \leq \epsilon$. Ahora bien, si la unión tuviera medida mayor que ϵ , por regularidad contendría un compacto K de medida mayor que ϵ . Por compacidad K estaría cubierto por un número finito de abiertos de G , pero éstos tendrían una extensión común en G , es decir, tendríamos que $K \subset p$ con $p \in G$, pero esto es absurdo porque entonces $\mu(K) > \epsilon > \mu(p)$. ■

En particular, el axioma de Martin implica que cualquier subconjunto de \mathbb{R} de cardinal menor que 2^{\aleph_0} es medible Lebesgue y, de hecho, nulo. Ahora vamos a probar, por otra parte, que es consistente que exista un subconjunto no medible Lebesgue de cardinal \aleph_1 . La pista nos la da el teorema siguiente:

Teorema 10.19 *El conjunto $\mathbb{R}^L = \mathbb{R} \cap L$ está necesariamente en uno de estos tres casos:*

- a) $\mathbb{R}^L = \mathbb{R}$,
- b) \mathbb{R}^L es nulo,
- c) \mathbb{R}^L no es medible Lebesgue y $|\mathbb{R}^L| = \aleph_1$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que no se cumple a) ni c) y veamos que se da b). Notemos que $|\mathbb{R}^L| = |\aleph_1^L|$ sólo puede ser \aleph_0 o \aleph_1 , luego si \mathbb{R}^L no es medible Lebesgue necesariamente tiene cardinal \aleph_1 , luego la negación de c) es simplemente que \mathbb{R}^L es medible Lebesgue.

Tomemos $a \in \mathbb{R} \setminus L$. Podemos suponer $a > 0$, pues en caso contrario podemos tomar $-a$. Sea $S = [0, 1] \cap L$ y, para cada natural $n > 0$, sea $S_n = (a/n) + S$.

Los conjuntos S_n son disjuntos dos a dos, pues si $(a/n) + s_1 = (a/m) + s_2$, despejando obtenemos que $a \in L$ (notemos que \mathbb{R}^L es un subcuerpo de \mathbb{R}).

Si \mathbb{R}^L es medible, S también lo es y, como la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, S_n es medible y $\mu(S_n) = \mu(S)$. Puesto que

$$\bigcup_{0 < n < \omega} S_n \subset [0, 1 + a],$$

tenemos que $\mu\left(\bigcup_{0 < n < \omega} S_n\right) = \sum_{0 < n < \omega} \mu(S_n) = \sum_{0 < n < \omega} \mu(S) < +\infty$, lo cual sólo es posible si $\mu(S) = 0$. Claramente, $\mathbb{R}^L \subset \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} m + S$, y todos los trasladados de S son nulos, luego $\mu(\mathbb{R}^L) = 0$. ■

Si $V = L$ se da el caso a) del teorema anterior. El teorema 4.35 muestra que \mathbb{R}^L puede ser numerable y, por consiguiente, nulo. Seguidamente probaremos que el caso c) también puede darse, lo que implica en particular que la medida de Lebesgue no es \aleph_2 -aditiva.

Ejercicio: Probar la consistencia de $\mathbb{R}^L = \mathbb{R} + V \neq L$.

Teorema 10.20 *Sea M un modelo transitivo de $ZFC+V=L$. Sea κ un cardinal de cofinalidad no numerable^M. Sea $\mathbb{B} = (\mathbb{B}_{\kappa \times \omega})^M$ el álgebra de Cantor definida en 10.14 y sea G un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M . Entonces en $M[G]$ los cardinales son los mismos que en M , $2^{\aleph_0} = \kappa$ y $\mathbb{R} \cap L$ no es medible Lebesgue.*

DEMOSTRACIÓN: Como \mathbb{B} cumple la condición de cadena numerable^M, conserva cardinales y cofinalidades. Por la HCG tenemos que $(\kappa^{\aleph_0} = \kappa)^M$, luego el teorema 10.15 nos da que $|\mathbb{B}|^M = \kappa$. Como \mathbb{B} cumple la condición de cadena numerable^M, la fórmula (5.1) nos da que el número de buenos nombres^M para subconjuntos de $\tilde{\omega}$ es a lo sumo $|\mathbb{B}|^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0} = \kappa$ (aquí hemos usado la HCG^M). El teorema 5.20 nos da entonces que $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \leq \kappa$.

Para cada $(\alpha, n) \in \kappa \times \omega$, sea $U_{\alpha n} = \{t \in 2^{\kappa \times \omega} \mid t(\alpha, n) = 1\}^M \in \mathbb{A}_{\kappa \times \omega}$. Sea $u_{\alpha n} = [U_{\alpha n}] \in \mathbb{B}$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $\tau_\alpha = \{(\check{n}, u_{\alpha n}) \mid n \in \omega\} \in M^{\mathbb{B}}$. Claramente, $\|\check{n} \in \tau_\alpha\| = u_{\alpha n}$. Sea $x_\alpha = \tau_{\alpha G} \in M[G]$. Claramente $x_\alpha \subset \omega$.

Veamos que si $\alpha \neq \beta$, entonces $\|\tau_\alpha = \tau_\beta\| = \emptyset$. Así los x_α serán distintos dos a dos. Si $k < \omega$, se cumple que

$$\begin{aligned} \|\tau_\alpha \cap \check{k} = \tau_\beta \cap \check{k}\| &= \|\bigwedge n \in \check{k} (n \in \tau_\alpha \leftrightarrow n \in \tau_\beta)\| = \bigwedge_{n < k} (\|\check{n} \in \tau_\alpha\| \leftrightarrow \|\check{n} \in \tau_\beta\|) \\ &= \bigwedge_{n < k} (u_{n\alpha} \leftrightarrow u_{n\beta}) = \left[\bigcap_{n < k} (U_{n\alpha} \cap U_{n\beta}) \cup (U'_{n\alpha} \cap U'_{n\beta}) \right] = [N_{\alpha\beta k}], \end{aligned}$$

donde

$$N_{\alpha\beta k} = \{t \in 2^{\kappa \times \omega} \mid \bigwedge n \in k \ t(\alpha, n) = t(\beta, n)\}.$$

Por lo tanto,

$$\|\tau_\alpha = \tau_\beta\| \leq \bigwedge_{k \in \omega} \|\tau_\alpha \cap \check{k} = \tau_\beta \cap \check{k}\| = \bigwedge_{k \in \omega} [N_{\alpha\beta k}].$$

Ahora bien, $N_{\alpha\beta k} = C_J(Y)$, donde $J = \{(\alpha, n) \mid n \in k\} \cup \{(\beta, n) \mid n \in k\}$ e $Y = \{t \in 2^J \mid \bigwedge n \in k \ t(\alpha, n) = t(\beta, n)\}$. Por consiguiente

$$m(N_{\alpha\beta k}) = \frac{|Y|}{2^{|J|}} = \frac{2^k}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k}.$$

Así, para todo $k < \omega$, tenemos que $\overline{m}(\|\tau_\alpha = \tau_\beta\|) \leq m(N_{\alpha\beta k}) = 1/2^k$, luego $\overline{m}(\|\tau_\alpha = \tau_\beta\|) = 0$, de donde $\|\tau_\alpha = \tau_\beta\| = \mathbf{0}$.

Ahora sólo tenemos que definir $\tau = \{\text{p.o.}(\check{\alpha}, \tau_\alpha) \mid \alpha < \kappa\} \in M^{\mathbb{B}}$, de manera que $\tau_G : \kappa \rightarrow (\mathcal{P}\omega)^{M[G]}$ inyectiva, luego $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$.

Veamos ahora que los conjuntos x_α no pertenecen a M , con lo que serán no constructibles $^{M[G]}$. Para ello tomamos $a \in (\mathcal{P}\omega)^M$. Un cálculo análogo al que hemos hecho antes nos da que

$$\|\tau_\alpha = \check{a}\| \leq \bigwedge_{k \in \omega} [D_{\alpha k}],$$

donde $D_{\alpha k} = \{t \in 2^{\kappa \times \omega} \mid \bigwedge n \in k (t(\alpha, n) = 1 \leftrightarrow n \in a)\}$, y un simple cálculo nos da que $m(D_{\alpha k}) = 1/2^k$, luego podemos concluir que $\|\tau_\alpha = \check{a}\| = \mathbf{0}$.

La función característica de x_α nos da una sucesión de ceros y unos que a su vez determina la expresión decimal de un número real $r \in M[G]$ que no puede estar en M , pues en tal caso nos permitiría reconstruir x_α en M . Así pues, r es un número real no constructible $^{M[G]}$, de modo que $(\mathbb{R}^L \neq \mathbb{R})^{M[G]}$. Por el teorema anterior, para probar que \mathbb{R}^L no es medible Lebesgue en $M[G]$ basta ver que no es nulo. Supongamos que lo es.

Sean t_{1k} y t_{2k} dos términos absolutos para modelos transitivos de ZFC tales que $\{(t_{1k}, t_{2k})\}_{k < \omega}$ sea una enumeración de todos los pares de números racionales (r, s) con $r < s$ (existe porque podemos definirlo explícitamente, es decir, podemos dar un criterio sencillo que a cada número natural k le asigne un par de números racionales en las condiciones indicadas). Sea $I_k \equiv]t_{1k}, t_{2k}[$.

Para todo número racional $\epsilon > 0$, existe $x \in (\mathcal{P}\omega)^{M[G]}$ tal que, en $M[G]$,

$$\mathbb{R}^L \subset \bigcup_{k \in x} I_k \quad \text{y} \quad \mu\left(\bigcup_{k \in x} I_k\right) \leq \epsilon.$$

Sea $x = \tau_G$ con $\tau \in M^{\mathbb{B}}$. Sea

$$[T] = \left\| \mathbb{R}^L \subset \bigcup_{k \in \tau} I_k \wedge \mu\left(\bigcup_{k \in \tau} I_k\right) \leq \check{\epsilon} \right\| \in G.$$

Todo cuanto sigue se ha de entender relativizado a M :

Si $k \in \omega$, sea $A_k \in \mathbb{A}_{\kappa \times \omega}$ tal que $[A_k] = [T] \wedge \|\check{k} \in \tau\|$. Cambiando el representante de la clase podemos suponer que $A_k \subset T$. Sea $\lambda = \mu \times m$, es decir, el producto de la medida de Lebesgue por la medida de Cantor. Sea

$$E = \bigcup_{k \in \omega} I_k \times A_k.$$

Vamos a probar que $\lambda(E) \leq \epsilon$. Para ello basta probar que, para todo $k_0 \in \omega$,

$$\lambda\left(\bigcup_{k < k_0} I_k \times A_k\right) \leq \epsilon.$$

Si $a = [A] \leq [T]$, entonces existen $c = [C] \leq a$ e $Y \subset k_0$ tales que

$$c \Vdash \tau \cap \check{k}_0 = \check{Y} \quad \text{y} \quad \mu\left(\bigcup_{k \in Y} I_k\right) \leq \epsilon.$$

En efecto, basta tomar un ultrafiltro genérico H tal que $a \in H$, $Y = \tau_H \cap k_0$ y $c \in H$ que fuerce esto. Como $[T] \in H$ se cumple

$$\left(\mu\left(\bigcup_{k \in Y} I_k\right) \leq \epsilon\right)^{M[H]}$$

y, por consiguiente,

$$\left(\mu\left(\bigcup_{k \in Y} I_k\right) \leq \epsilon\right)^M,$$

ya que la medida de una unión finita de intervalos con extremos racionales depende sólo de dichos extremos y es la misma en M o en $M[H]$.

Con esto hemos probado que el conjunto

$$D = \{c \in \mathbb{B} \mid \forall Y \subset k_0 (c \Vdash \tau \cap \check{k}_0 = \check{Y} \wedge \mu\left(\bigcup_{k \in Y} I_k\right) \leq \epsilon)\}$$

es denso bajo $[T]$.

Más aún, si $c \in D$ ($c \leq [T]$) e Y cumple la definición de D , o bien $k \in Y$, en cuyo caso $[C] \leq [T] \wedge \|\check{k} \in \tau\| = [A_k]$, o bien $k \in k_0 \setminus Y$, en cuyo caso $[A_k] \wedge [C] = \emptyset$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{k < k_0} I_k \times (A_k \cap C)\right) &= \lambda\left(\bigcup_{k \in Y} I_k \times (A_k \cap C)\right) = \lambda\left(\bigcup_{k \in Y} I_k \times C\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k \in Y} I_k\right) m(C) \leq \epsilon m(C). \end{aligned}$$

Sea $\{[C_r]\}_{r < \omega}$ una anticadena maximal en D . Entonces $A_k \setminus \bigcup_{r < \omega} C_r$ es nulo, o de lo contrario su clase en \mathbb{B} sería no nula y $\leq [T]$, luego tendría una extensión en D que permitiría extender la anticadena. Así pues,

$$\lambda\left(\bigcup_{k < k_0} I_k \times A_k\right) = \lambda\left(\bigcup_{k < k_0} I_k \times \left(A_k \cap \bigcup_{r < \omega} C_r\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{r < \omega} \bigcup_{k < k_0} I_k \times (A_k \cap C_r)\right)$$

$$\leq \sum_{r < \omega} \lambda \left(\bigcup_{k < k_0} I_k \times (A_k \cap C_r) \right) \leq \sum_{r < \omega} \epsilon m(C_r) = \sum_{r < \omega} \epsilon \overline{m}([C_r]) = \epsilon \overline{m} \left(\bigcup_{r < \omega} [C_r] \right) \leq \epsilon.$$

Tenemos, pues, que $\lambda(E) \leq \epsilon$. Como $\lambda(\mathbb{R} \times T) = +\infty$ (ya que T tiene medida positiva, porque $[T] \in G$) ha de ser $\lambda(\mathbb{R} \times T \setminus E) > 0$. Por el teorema de Fubini existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que la sección $A = \{t \in T \mid (r, t) \notin E\}$ cumple $m(A) > 0$.

Notemos que $r \in \mathbb{R}^M = (\mathbb{R}^L)^{M[H]}$, para cualquier ultrafiltro genérico H , luego $\|\check{r} \in \mathbb{R}^L\| = \mathbf{1}$. Como $[A] \leq [T]$, tenemos que $[A] \Vdash \mathbb{R}^L \subset \bigcup_{k \in \tau} I_k$, luego $[A] \Vdash \check{r} \in \bigcup_{k \in \tau} I_k$.

Sea H un ultrafiltro genérico tal que $[A] \in H$, sea $k \in \tau_H$ tal que $r \in I_k$, sea $[C] \in H$ tal que $[C] \Vdash \check{k} \in \tau$. Podemos exigir que $C \subset A \cap T$, pero entonces $[C] \leq [T] \wedge \|\check{k} \in \tau\| = [A_k]$, luego existe $t \in C \cap A_k$ y entonces $(r, t) \in E$, en contradicción con que $t \in A$. ■

Así pues, es consistente que el cardinal de \mathbb{R} sea arbitrariamente grande pero que exista un subconjunto de \mathbb{R} no medible Lebesgue de cardinal \aleph_1 .

10.3 Extensiones de la medida de Lebesgue

Vitali demostró que no todo subconjunto de \mathbb{R} es medible Lebesgue, aunque su argumento prueba de hecho algo más general: no existe ninguna extensión de la medida de Lebesgue a una medida en $\mathcal{P}\mathbb{R}$ que sea invariante por traslaciones. No obstante, queda abierta la cuestión de si es posible extender la medida de Lebesgue a $\mathcal{P}\mathbb{R}$ aunque sea perdiendo esta propiedad. La definición siguiente nos ayuda a precisar cómo sería tal extensión:

Definición 10.21 Diremos que μ es una *medida* en un conjunto S si es una medida en el álgebra $\mathcal{P}S$. Diremos que μ es *no trivial* si $\bigwedge a \in S \mu(\{a\}) = 0$.

Una extensión μ de la medida de Lebesgue sería una medida σ -finita, no trivial y no atómica en \mathbb{R} . En efecto, sería no atómica porque, si $A \subset \mathbb{R}$ fuera un átomo, podríamos dividir \mathbb{R} en una unión numerable de intervalos disjuntos de medida menor que $\mu(A)$, con lo que la intersección de A con estos intervalos tendría que ser una partición de A en conjuntos nulos, lo cual es absurdo.

Más aún, la restricción de esta medida a $[0, 1]$ sería una medida unitaria, no trivial y no atómica en $[0, 1]$.

La prueba del teorema siguiente es trivial:

Teorema 10.22 Sea μ una medida finita en un conjunto S y sea $f : S \rightarrow T$. Entonces la aplicación $\sigma : \mathcal{P}T \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\sigma(Z) = \frac{\mu(f^{-1}[Z])}{\mu(S)}$$

es una medida unitaria en T . Además, si κ es un cardinal infinito, σ es κ -aditiva si y sólo si lo es μ .

El teorema siguiente nos permite reformular el problema de la existencia de una extensión de la medida de Lebesgue en términos puramente conjuntistas.

Teorema 10.23 *Si existe una medida unitaria, no atómica y no trivial en un conjunto S , entonces existe una medida en \mathbb{R} que extiende a la medida de Lebesgue. Si κ es un cardinal infinito, esta medida será κ -aditiva si lo es la dada.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu : \mathcal{P}S \rightarrow [0, 1]$ una medida en las condiciones del enunciado. Definimos $x : 2^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}S$ de modo que $x_\emptyset = S$ y si $u \in 2^{<\omega}$, entonces $\{x_{u,0}, x_{u,1}\}$ es una partición de x_u en dos conjuntos de igual medida (lo cual es posible por el teorema 10.5). Así, si $u \in {}^n 2$, tenemos que $\mu(x_u) = 1/2^n$.

Para cada $u \in 2^\omega$ sea $x_u = \bigcap_{n < \omega} x_{u|_n}$. Es claro que $\{x_u\}_{u \in 2^\omega}$ es una partición de S en conjuntos nulos.

Sea $\lambda : \mathcal{P}2^\omega \rightarrow [0, 1]$ la función dada por $\lambda(Z) = \mu\left(\bigcup_{u \in Z} x_u\right)$. Es inmediato comprobar que λ es una medida unitaria no trivial κ -aditiva en 2^ω .

Sea $F : 2^\omega \rightarrow [0, 1]$ la aplicación dada por

$$F(u) = \sum_{n < \omega} \frac{u(n)}{2^{n+1}},$$

es decir, la aplicación que a cada sucesión de ceros y unos le hace corresponder el número real con dicho desarrollo binario.

Según el teorema anterior, la aplicación $\sigma_0 : \mathcal{P}[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $\sigma_0(X) = \lambda(F^{-1}[X])$ es una medida unitaria y κ -aditiva.

Además σ_0 es no trivial, pues, como es bien sabido, un número real en $[0, 1]$ tiene a lo sumo dos antiimágenes por F , lo cual sucede cuando su desarrollo binario es finalmente igual a 0 o finalmente igual a 1, pues entonces admite un desarrollo de cada tipo.

Veamos que si $0 \leq k < 2^n$ entonces $\sigma_0\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = \sigma_0\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = \frac{1}{2^n}$.

Sea $k = \sum_{i < n} a_i 2^i$ el desarrollo binario de k . Entonces

$$\frac{k}{2^n} = \sum_{r < \omega} \frac{u(r)}{2^{r+1}}, \quad \text{donde } \bigwedge r \geq n \ u(r) = 0,$$

$$\frac{k+1}{2^n} = \sum_{r < \omega} \frac{v(r)}{2^{r+1}}, \quad \text{donde } v|_n = u|_n \wedge \bigwedge r \geq n \ v(r) = 1.$$

Sea $T = \{w \in 2^\omega \mid w|_n = u|_n = v|_n\}$. Es claro que

$$F^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) \subset T \subset F^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right),$$

por lo que los tres conjuntos tienen la misma medida λ , luego

$$\sigma_0\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = \sigma_0\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = \lambda(T) = \mu\left(\bigcup_{w \in T} x_w\right) = \mu(x_{u|_n}) = \frac{1}{2^n}.$$

Para cada $m \in \mathbb{Z}$, sea $\sigma_m : \mathcal{P}[m, m+1] \rightarrow [0, 1]$ la aplicación dada por $\sigma_m(X) = \sigma_0(X - m)$. Por el teorema anterior σ_m es una medida unitaria no trivial κ -aditiva en $[m, m+1]$. Sea $\sigma : \mathcal{P}\mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ la aplicación dada por

$$\sigma(X) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sigma_m(X \cap [m, m+1]).$$

Una simple comprobación rutinaria muestra que σ es una medida σ -finita no trivial κ -aditiva en \mathbb{R} . Además, si $m \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k < 2^n$, se cumple que

$$\begin{aligned} \sigma \left(\left[m + \frac{k}{2^n}, m + \frac{k+1}{2^n} \right] \right) &= \sigma_m \left(\left[m + \frac{k}{2^n}, m + \frac{k+1}{2^n} \right] \right) \\ &= \sigma_0 \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right) = \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

de donde se sigue a su vez que si $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$ entonces

$$\sigma \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^n} \right] \right) = \frac{l-k}{2^n}.$$

Vemos así que σ coincide con la medida de Lebesgue en los intervalos de extremos $k/2^n$. Todo intervalo abierto en \mathbb{R} se puede expresar como unión creciente de intervalos de este tipo, luego σ coincide con la medida de Lebesgue sobre todos los intervalos abiertos. Según 10.7, σ coincide con la medida de Lebesgue sobre la σ -álgebra de Borel, y es fácil ver entonces que σ extiende a la medida de Lebesgue. ■

De este modo, la existencia de una extensión (κ -aditiva) a $\mathcal{P}\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue equivale a que exista una medida unitaria no trivial y no atómica (κ -aditiva) en un conjunto S cualquiera. Es obvio que la existencia de tal medida en un conjunto S sólo depende de su cardinal, por lo que podemos limitarnos a estudiar medidas sobre cardinales. Ahora conviene observar lo siguiente:

Teorema 10.24 *Si ν es el menor cardinal sobre el que existe una medida unitaria no trivial κ -aditiva, entonces dicha medida es ν -aditiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sea μ la medida del enunciado. Si no fuera ν -aditiva, por el teorema 10.17 existen conjuntos nulos $\{X_\delta\}_{\delta < \alpha}$, con $\alpha < \nu$ cuya unión X tiene medida positiva. Podemos suponerlos disjuntos dos a dos.

Sea $f : X \rightarrow \alpha$ dada por $f(x) = \delta \leftrightarrow x \in X_\delta$. Es claro que la restricción de μ a $\mathcal{P}X$ es una medida finita κ -aditiva no trivial en X . Por 10.22 tenemos que existe una medida unitaria κ -aditiva $\sigma : \mathcal{P}\alpha \rightarrow [0, 1]$, que claramente es no trivial, pues si $\delta \in \alpha$ entonces $\sigma(\{\delta\}) = \mu(f^{-1}[\{\delta\}]) = \mu(X_\delta) = 0$. Esto contradice la minimalidad de ν . ■

Las definiciones siguientes constituyen el marco más adecuado para continuar nuestro análisis. Fueron introducidas por Banach en 1930.

Definición 10.25 Una *medida fuerte* en un cardinal κ es una medida unitaria κ -aditiva no trivial sobre κ . Un cardinal κ es *\mathbb{R} -medible* si existe una medida fuerte sobre κ .

Notemos que en la definición de medida fuerte no hemos exigido que ésta sea no atómica. El teorema siguiente muestra por qué.

Teorema 10.26 (Ulam) *Si κ es un cardinal \mathbb{R} -medible, entonces se da uno de los dos casos siguientes:*

- a) $\kappa > 2^{\aleph_0}$, es fuertemente inaccesible y todas las medidas fuertes en κ son atómicas.
- b) $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, es débilmente inaccesible y todas las medidas fuertes en κ son no atómicas.

DEMOSTRACIÓN: Notemos en primer lugar que todo cardinal \mathbb{R} -medible es regular. En efecto, fijada una medida fuerte en κ , si éste se descompusiera en menos de κ conjuntos de cardinal menor que κ , cada uno de ellos sería nulo (pues se expresa como unión de menos de κ conjuntos puntuales, todos ellos nulos), luego κ tendría medida cero, de nuevo por la κ -aditividad.

Si κ tiene una medida fuerte no atómica, la prueba del teorema 10.23 muestra que κ se descompone en 2^{\aleph_0} conjuntos nulos, luego la medida no puede ser $(2^{\aleph_0})^+$ -aditiva. Como sí que es κ -aditiva, ha de ser $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

Supongamos ahora que κ tiene una medida fuerte atómica μ . Sea $A \subset \kappa$ un átomo. Definimos $\sigma : \mathcal{P}\kappa \rightarrow \{0, 1\}$ mediante

$$\sigma(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(A \cap X) = \mu(A), \\ 0 & \text{si } \mu(A \cap X) = 0. \end{cases}$$

Es claro que σ es también una medida fuerte en κ , una medida *bivaluada*. Tenemos que κ es regular no numerable (no existen medidas en ω). Veamos ahora que es un límite fuerte, con lo que será fuertemente inaccesible. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un cardinal $\nu < \kappa$ tal que $2^\nu \geq \kappa$. Sea $S \subset {}^\nu 2$ tal que $|S| = \kappa$. Sea σ una medida fuerte bivaluada en S (si hay una en κ , hay una en S). Para cada $\alpha < \nu$, sea $\epsilon_\alpha \in 2$ tal que el conjunto

$$X_\alpha = \{f \in S \mid f(\alpha) = \epsilon_\alpha\}$$

tenga medida 1. Como σ es κ -aditiva y $\nu < \kappa$, la unión de los complementarios tiene medida 0, es decir,

$$\sigma\left(\bigcap_{\delta < \nu} X_\delta\right) = 1.$$

Sin embargo, esta intersección contiene sólo una función, a saber, la dada por $f(\alpha) = \epsilon_\alpha$, contradicción.

En particular $\kappa > 2^{\aleph_0}$. Con esto tenemos probado todo el teorema excepto el hecho de que los cardinales \mathbb{R} -medibles $\leq 2^{\aleph_0}$ son débilmente inaccesibles. De hecho sólo nos falta probar que son cardinales límite. Supongamos, pues que $\kappa = \nu^+$ y sea μ una medida fuerte en κ .

Para cada $\alpha < \kappa$ sea $f_\alpha : \nu \rightarrow \alpha$ suprayectiva y, para $\beta < \kappa$, $\gamma < \nu$, sea

$$A_{\beta\gamma} = \{\alpha < \kappa \mid f_\alpha(\gamma) = \beta\}.$$

Si $\beta < \kappa$, entonces para cada $\alpha \geq \beta$ existe un $\gamma < \nu$ tal que $f_\alpha(\gamma) = \beta$, luego $\alpha \in A_{\beta\gamma}$, con lo que

$$\kappa \setminus \bigcup_{\gamma < \nu} A_{\beta\gamma} \subset \beta.$$

Así, $\left| \kappa \setminus \bigcup_{\gamma < \nu} A_{\beta\gamma} \right| \leq \nu$, luego $\mu\left(\kappa \setminus \bigcup_{\gamma < \nu} A_{\beta\gamma}\right) = 0$, luego $\mu\left(\bigcup_{\gamma < \nu} A_{\beta\gamma}\right) > 0$.

Concluimos que para cada $\beta < \kappa$ existe un $\gamma_\beta < \nu$ tal que $\mu(A_{\beta\gamma_\beta}) > 0$. Ha de existir un conjunto $W \subset \kappa$ de cardinal κ y un $\gamma < \nu$ de modo que $\bigwedge \beta \in W \gamma_\beta = \gamma$. De este modo, $\{A_{\beta\gamma} \mid \beta \in W\}$ es una familia no numerable de subconjuntos de κ disjuntos dos a dos y con medida positiva, pero esto es imposible, pues el ideal de los conjuntos nulos cumple la condición de cadena numerable (teorema 10.2 f). ■

Ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 10.27 *Existe una extensión de la medida de Lebesgue a $\mathcal{P}\mathbb{R}$ si y sólo si existe un cardinal \mathbb{R} -medible $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.*

Un caso muy particular de este teorema es que si, por ejemplo, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, entonces no existen medidas no triviales en \mathbb{R} . Esto lo probaron Banach y Kuratowski en 1929.

Como en ZFC no es posible demostrar la existencia de cardinales inaccesibles, concluimos que es consistente que no existan cardinales \mathbb{R} -medibles ni extensiones de la medida de Lebesgue. Por otra parte, es imposible demostrar la consistencia de la existencia de cardinales \mathbb{R} -medibles aun suponiendo la consistencia de ZFC. A lo sumo cabría esperar un teorema de la forma “*si es consistente que exista un cardinal inaccesible, entonces también lo es la existencia de un cardinal \mathbb{R} -medible*”, pero ni siquiera esto es posible. La razón es que la existencia de cardinales \mathbb{R} -medibles implica la consistencia de que existan infinitos cardinales inaccesibles, infinitos cardinales de Mahlo e infinitos cardinales mucho mayores que éstos. Con todo, la consistencia de que existan cardinales \mathbb{R} -medibles es una “conjetura razonable”, pero esto sólo puede argüirse desde la profunda teoría que se ocupa de ellos: la teoría de cardinales grandes.

Segunda parte

Cardinales grandes

Capítulo XI

Cardinales medibles

En el capítulo anterior hemos visto que la existencia de una medida no trivial en un conjunto implica la existencia de cardinales \mathbb{R} -medibles, que en particular son cardinales inaccesibles. La situación es distinta según si la medida es atómica o no atómica. El menor cardinal con una medida atómica es fuertemente inaccesible, mientras que el menor cardinal con una medida no atómica es débilmente inaccesible. La posibilidad de extender la medida de Lebesgue está relacionada con la existencia de medidas no triviales no atómicas, pero las medidas atómicas dan lugar a una teoría mucho más espectacular y con un impacto mucho mayor en la teoría de conjuntos. Además, veremos que en última instancia los dos tipos de medidas son dos caras de una misma moneda.

En este capítulo estudiaremos los cardinales dotados de una medida fuerte atómica. En realidad en este caso el lenguaje de teoría de la medida resulta superfluo, por lo que empezaremos eliminándolo.

11.1 Definiciones básicas

Comencemos observando que una medida μ en un cardinal κ para la que exista un átomo A da lugar a una medida bivaluada $\lambda : \mathcal{P}\kappa \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\lambda(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(X \cap A) = \mu(A), \\ 0 & \text{si } \mu(X \cap A) = 0. \end{cases}$$

Esta medida conserva la misma aditividad que μ y es no trivial si μ lo es. Por ello podemos restringirnos a considerar medidas bivaluadas. El hecho de que todo subconjunto de κ tenga medida 0 o 1 se traduce en que el ideal I de los conjuntos nulos sea un ideal primo o, equivalentemente, en que el filtro dual U de los conjuntos de medida 1 sea un ultrafiltro. Es obvio que la medida está completamente determinada por cualquiera de los dos. La aditividad de la medida se refleja en la completitud del ideal primo o del ultrafiltro asociado. La definición siguiente es la particularización a un álgebra $\mathcal{P}X$ de la definición 7.40.

Definición 11.1 Sea κ un cardinal infinito. Un filtro F en un conjunto X es κ -completo si la intersección de menos de κ elementos de F está en F . Un ideal I en X es κ -completo si la unión de menos de κ elementos de I está en I . Los ideales y filtros \aleph_1 -completos se llaman también σ -completos.

Así, el teorema 10.17 implica que una medida en X es κ -aditiva si y sólo si su ideal de conjuntos nulos es κ -completo. En particular el ideal de conjuntos nulos de una medida es siempre σ -completo, luego las medidas bivaluadas en un cardinal κ determinan ultrafiltros (o ideales primos) σ -completos en κ , pero ahora podemos decir que también se da el recíproco: cada ultrafiltro (o cada ideal primo) σ -completo en κ determina una medida bivaluada en κ de forma natural. Las medidas ν -aditivas se corresponden con los ultrafiltros ν -completos. A menudo es útil esta caracterización de la completitud:

Teorema 11.2 Sea κ un cardinal infinito. Un ultrafiltro U en un conjunto X es κ -completo si y sólo si no existen particiones de X en menos de κ conjuntos no pertenecientes a U .

DEMOSTRACIÓN: Si $\{X_\alpha\}_{\alpha < \beta}$, con $\beta < \kappa$ es una partición de X tal que $X_\alpha \notin U$, para todo $\alpha < \beta$, entonces $X \setminus X_\alpha \in U$, luego, si U es κ -completo, $\bigcap_{\alpha < \beta} (X \setminus X_\alpha) = \emptyset \in U$, contradicción.

Recíprocamente, si U no es κ completo existen conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ en U , con $\beta < \kappa$, cuya intersección no está en U . Para cada $\alpha < \beta$ sea $Y_\alpha = X \setminus X_\alpha \notin U$, y sea $Y_\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} X_\alpha \notin U$. Es claro que

$$\bigcup_{\alpha \leq \beta} Y_\alpha = X.$$

Definimos $Z_\alpha = Y_\alpha \setminus \bigcup_{\delta < \alpha} Y_\delta$. Así los conjuntos Z_α son disjuntos dos a dos, su unión sigue siendo X y siguen sin estar en U (porque $Z_\alpha \subset Y_\alpha$). ■

Una medida (bivaluada) es no trivial si los puntos tienen medida 0, es decir, si no están en su ultrafiltro asociado. Así pues, las medidas no triviales se corresponden con los ultrafiltros no principales en el sentido de la definición siguiente:

Definición 11.3 Un ultrafiltro U en un conjunto X es *principal* si existe $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\} \in U$, lo cual equivale a que

$$U = \{A \subset X \mid x_0 \in A\}.$$

Así pues, U es no principal si no contiene a conjuntos de cardinal 1, si y sólo si todos los conjuntos de cardinal 1 están en su ideal primo dual I , si y sólo si todos los conjuntos finitos están en I , si y sólo si U no contiene conjuntos finitos.

Los conjuntos cofinitos en un conjunto infinito X forman un filtro F , de modo que un ultrafiltro es no principal si y sólo si extiende a F .

Definición 11.4 Una *medida de Ulam* en un conjunto X es un ultrafiltro σ -completo no principal en X . Un cardinal κ es *medible Ulam* si tiene una medida de Ulam.

Una *medida* en un conjunto cardinal κ es un ultrafiltro κ -completo no principal en κ . Un cardinal κ es *medible* si tiene una medida.

En términos de medidas (en el sentido usual de la teoría de la medida) un cardinal κ es medible Ulam si existe una medida bivaluada no trivial sobre κ , lo cual equivale a su vez a que exista una medida atómica no trivial sobre κ . Así mismo, κ es medible si existe una medida fuerte atómica sobre κ , es decir, si es \mathbb{R} -medible y $\kappa > 2^{\aleph_0}$. No obstante nunca necesitaremos este punto de vista. Al contrario, lo que haremos será adaptar el lenguaje de la teoría de la medida a los ultrafiltros:

Si hemos fijado una medida U (o una medida de Ulam) en un cardinal κ , llamaremos subconjuntos *nulos* de κ a los subconjuntos que no están en U . Diremos que un hecho se cumple *para casi todo* elemento de κ si el conjunto de elementos que lo cumplen está en U . Notemos que si U es una medida en κ , todos los subconjuntos de κ de cardinal menor que κ son nulos (pues son unión de menos de κ conjuntos puntuales).

El teorema siguiente es una parte de 10.26. No hay ninguna dificultad en aislar la prueba de los demás hechos demostrados allí sobre cardinales \mathbb{R} -medibles, ni en reformularla exclusivamente en términos de ultrafiltros.

Teorema 11.5 *Todo cardinal medible es fuertemente inaccesible.*

Los teoremas siguientes son versiones de 10.22 y de 10.24. La demostración del primero es trivial.

Teorema 11.6 *Sea $f : X \rightarrow X'$ y F un filtro κ -completo en X . Entonces el conjunto $f[F] = \{A \subset X' \mid f^{-1}[A] \in F\}$ es un filtro κ -completo en X' . Si F es un ultrafiltro, $f[F]$ también lo es. Si F es una medida de Ulam en X y f es inyectiva, entonces $f[F]$ es una medida de Ulam en X' .*

De aquí se sigue que si un cardinal κ es medible Ulam, también lo son todos los cardinales posteriores. Así pues, o bien no hay cardinales medibles Ulam, o bien la clase de los cardinales se divide en dos partes: primero están los cardinales no medibles Ulam y por encima de ellos vienen todos los cardinales medibles Ulam.

Teorema 11.7 *Existen cardinales medibles Ulam si y sólo si existen cardinales medibles. En tal caso el mínimo cardinal medible Ulam es medible.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente todo cardinal medible es medible Ulam, luego basta probar la última afirmación. Sea κ el mínimo cardinal medible Ulam y sea U una medida de Ulam en κ . Vamos a probar que de hecho es una medida, es decir, que es κ -completa. En caso contrario, por el teorema 11.2, existe una partición de κ de la forma $\{X_\alpha\}_{\alpha < \mu}$, con $\mu < \kappa$, formada por conjuntos nulos.

Sea $f : \kappa \longrightarrow \mu$ la función dada por $f(\alpha) = \beta \leftrightarrow \alpha \in X_\beta$. Por el teorema anterior $f[U]$ es un ultrafiltro σ -completo en U . Además no es principal, pues si existe un $\alpha < \mu$ tal que $\{\alpha\} \in f[U]$, entonces $X_\alpha = f^{-1}[\{\alpha\}] \in U$, contradicción. Por lo tanto μ es un cardinal medible Ulam, lo que contradice la minimalidad de κ . ■

11.2 El teorema de los ultraproductos

Una de las técnicas más fructíferas en el estudio de los cardinales medibles proviene de la teoría de modelos y consiste en la construcción de ultrapotencias de la clase universal. En esta sección mostraremos los resultados de la teoría de modelos que motivan esta técnica y en la sección siguiente la adaptaremos al estudio de los cardinales medibles.

Definición 11.8 Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de modelos de un lenguaje formal \mathcal{L} y sea U un ultrafiltro en I . Definimos en $\prod_{i \in I} M_i$ la relación dada por

$$f =_U g \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

Se comprueba sin dificultad que $=_U$ es una relación de equivalencia, por lo que podemos definir el conjunto cociente, al que llamaremos *ultraproducto* de la familia dada, y lo representaremos por $\prod_{i \in I}^U M_i$.

Definimos en el ultraproducto M la siguiente estructura de modelo de \mathcal{L} :

- Si c es una constante de \mathcal{L} , definimos $M(c) = [\bar{c}]$, donde $\bar{c} \in \prod_{i \in I} M_i$ es la función dada por $\bar{c}(i) = M_i(c)$.
- Si R es un relator n -ádico de \mathcal{L} , entonces

$$M(R)([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid M_i(R)(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U.$$

- Si F es un funtor n -ádico de \mathcal{L} , entonces $M(F)([f_1], \dots, [f_n]) = [f]$, donde

$$f(i) = M_i(F)(f_1(i), \dots, f_n(i)).$$

Se comprueba sin dificultad que estas relaciones y funciones están bien definidas, así como que el igualador se interpreta como la igualdad.

Teorema 11.9 (Teorema fundamental de los ultraproductos) Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de modelos de un lenguaje formal \mathcal{L} y sea U un ultrafiltro en I . Si $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L})$ y $f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} M_i$, entonces

$$\prod_{i \in I}^U M_i \models \phi[[f_1], \dots, [f_n]] \leftrightarrow \{i \in I \mid M_i \models \phi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U.$$

En particular, si ϕ es una sentencia,

$$\prod_{i \in I}^U M_i \models \phi \leftrightarrow \{i \in I \mid M_i \models \phi\} \in U.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $t(x_1, \dots, x_n)$ un término de \mathcal{L} y $f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} M_i$. Veamos que

$$\left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (t) [[f_1], \dots, [f_n]] = [g],$$

donde $g(i) = M_i(t)[f_1(i), \dots, f_n(i)]$.

Lo probamos por inducción sobre la longitud de t . Si $t(x_1, \dots, x_n) = x_i$, entonces el miembro izquierdo es $[f_i]$, y $g = f_i$, luego se cumple la igualdad.

Si $t(x_1, \dots, x_n) = c$, donde c es una constante de \mathcal{L} , entonces el miembro izquierdo es $[c]$ y $g = \bar{c}$, luego se cumple la igualdad.

Si $t(x_1, \dots, x_n) = Ft_1(x_1, \dots, x_n) \cdots t_r(x_1, \dots, x_n)$, donde F es un funtor r -ádico de \mathcal{L} , entonces

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (t) [[f_1], \dots, [f_n]] \\ &= \left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (F) \left(\left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (t_1) [[f_1], \dots, [f_n]], \dots, \left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (t_r) [[f_1], \dots, [f_n]] \right) \\ &= \left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (F) ([g_1], \dots, [g_r]) = [g], \end{aligned}$$

donde $g_j(i) = M_i(t_j)[f_1(i), \dots, f_n(i)]$ (por hipótesis de inducción) y

$$g(i) = M_i(F)(g_1(i), \dots, g_r(i)) = M_i(t)[f_1(i), \dots, f_n(i)].$$

Veamos ahora el teorema por inducción sobre la longitud de ϕ .

Si $\phi(x_1, \dots, x_n) = Rt_1(x_1, \dots, x_n) \cdots t_r(x_1, \dots, x_n)$, donde R es un relator r -ádico de \mathcal{L} , entonces

$$\begin{aligned} & \prod_{i \in I}^U M_i \models \phi[[f_1], \dots, [f_n]] \\ & \leftrightarrow \left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (R) \left(\left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (t_1) [[f_1], \dots, [f_n]], \dots, \left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (t_r) [[f_1], \dots, [f_n]] \right) \\ & \leftrightarrow \left(\prod_{i \in I}^U M_i \right) (R) ([g_1], \dots, [g_r]), \end{aligned}$$

donde, según hemos probado, $g_j(i) = M_i(t_j)[f_1(i), \dots, f_n(i)]$. Esto equivale a

$$\{i \in I \mid M_i(R)[g_1(i), \dots, g_r(i)]\} \in U \leftrightarrow \{i \in I \mid M_i \models \phi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U.$$

Si $\phi(x_1, \dots, x_n) = \neg\psi(x_1, \dots, x_n)$ y el teorema vale para ψ , entonces

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I}^U M_i \models \phi[[f_1], \dots, [f_n]] & \leftrightarrow \neg \prod_{i \in I}^U M_i \models \psi[[f_1], \dots, [f_n]] \\ & \leftrightarrow \{i \in I \mid M_i \models \psi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \notin U \\ & \leftrightarrow \{i \in I \mid M_i \models \phi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U. \end{aligned}$$

Si $\phi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \chi(x_1, \dots, x_n)$ y el teorema vale para ψ y χ , probaremos la coimplicación de las negaciones, es decir, que

$$\begin{aligned} & \neg \prod_{i \in I}^U M_i \models (\psi \rightarrow \chi)[[f_1], \dots, [f_n]] \\ \leftrightarrow & \{i \in I \mid M_i \models (\psi \rightarrow \chi)[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \notin U \end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & \neg \prod_{i \in I}^U M_i \models (\psi \rightarrow \chi)[[f_1], \dots, [f_n]] \\ \leftrightarrow & \prod_{i \in I}^U M_i \models \psi[[f_1], \dots, [f_n]] \wedge \neg \prod_{i \in I}^U M_i \models \chi[[f_1], \dots, [f_n]] \\ \leftrightarrow & \{i \in I \mid M_i \models \psi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U \\ & \wedge \{i \in I \mid M_i \models \neg \chi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U \\ \leftrightarrow & \{i \in I \mid M_i \models \psi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \cap \{i \in I \mid M_i \models \neg \chi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U \\ \leftrightarrow & \{i \in I \mid \neg M_i \models (\psi \rightarrow \chi)[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U \\ \leftrightarrow & \{i \in I \mid M_i \models (\psi \rightarrow \chi)[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \notin U. \end{aligned}$$

Si $\phi(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge x \psi(x, x_1, \dots, x_n)$ y el teorema vale para ψ , probaremos también la coimplicación de las negaciones:

$$\begin{aligned} & \neg \prod_{i \in I}^U M_i \models \bigwedge x \psi[[f_1], \dots, [f_n]] \\ \leftrightarrow & \{i \in I \mid M_i \models \bigwedge x \psi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \notin U. \end{aligned}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \neg \prod_{i \in I}^U M_i \models \bigwedge x \psi[[f_1], \dots, [f_n]] & \leftrightarrow \forall f \in \prod_{i \in I} M_i \neg \prod_{i \in I}^U M_i \models \psi[[f], [f_1], \dots, [f_n]] \\ \leftrightarrow & \forall f \in \prod_{i \in I} M_i \{i \in I \mid M_i \models \psi[f(i), f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \notin U \\ \leftrightarrow & \forall f \in \prod_{i \in I} M_i \{i \in I \mid M_i \models \neg \psi[f(i), f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Basta probar que esto equivale a

$$\{i \in I \mid M_i \models \bigvee x \neg \psi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \in U, \quad (11.2)$$

pues claramente esto equivale a $\{i \in I \mid M_i \models \bigwedge x \psi[f_1(i), \dots, f_n(i)]\} \notin U$.

Si f cumple (11.1), es claro que el conjunto de (11.1) está contenido en el conjunto de (11.2). Como el primero está en U el segundo también. Recíprocamente, si se cumple (11.2), para cada i en el conjunto de (11.2) sea $f(i) \in M_i$ tal que $M_i \models \neg \psi[f(i), f_1(i), \dots, f_n(i)]$ y para los demás $i \in I$ tomamos $f(i) \in M_i$ arbitrario. Es claro que f cumple (11.1). ■

Definición 11.10 Si M es un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} , I es un conjunto y U es un ultrafiltro en I , se define la *ultrapotencia* $\text{Ult}_U(M)$ como el ultraproducto $\prod_{i \in I}^U M$, que es también un modelo de \mathcal{L} .

Definimos además $j_U : M \rightarrow \text{Ult}_U(M)$ mediante $j_U(a) = [c_a]$, donde c_a es la función constante dada por $\bigwedge i \in I c_a(i) = a$.

Del teorema anterior se sigue inmediatamente:

Teorema 11.11 Sea M un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} y U un ultrafiltro en un conjunto I . Entonces $j_U : M \rightarrow \text{Ult}_U(M)$ es una inmersión elemental.

DEMOSTRACIÓN: Si $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L})$ y $a_1, \dots, a_n \in M$, entonces

$$\begin{aligned} M \models \phi[a_1, \dots, a_n] &\leftrightarrow \{i \in I \mid M \models \phi[c_{a_1}(i), \dots, c_{a_n}(i)]\} \in U \\ &\leftrightarrow \text{Ult}_U(M) \models \phi[j_U(a_1), \dots, j_U(a_n)]. \end{aligned}$$

■

Como aplicación del teorema de los ultraproductos demostramos el teorema de compacidad:

Teorema 11.12 (Teorema de compacidad) Sea Γ un conjunto de sentencias de un lenguaje formal \mathcal{L} . Si todo subconjunto finito de Γ tiene un modelo, entonces Γ tiene un modelo.

DEMOSTRACIÓN: Sea I el conjunto de todos los subconjuntos finitos de Γ . Para cada $\Delta \in I$ sea M_Δ un modelo de \mathcal{L} tal que $M_\Delta \models \Delta$ y sea

$$I_\Delta = \{E \in I \mid M_E \models \Delta\}.$$

Sea $S = \{I_\Delta \mid \Delta \in I\}$. Claramente S cumple la propiedad de la intersección finita, pues si $\Delta_1, \dots, \Delta_n \in I$ y $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$, entonces

$$I_\Delta \subset I_{\Delta_1} \cap \dots \cap I_{\Delta_n},$$

y además $\Delta \in I_\Delta \neq \emptyset$. Por consiguiente S genera un filtro en I , que a su vez está contenido en un ultrafiltro U . Si $\phi \in \Gamma$, entonces

$$\{\Delta \in I \mid M_\Delta \models \phi\} = I_{\{\phi\}} \in S \subset U,$$

luego por el teorema fundamental $\prod_{\Delta \in I}^U M_\Delta \models \phi$, es decir, $\prod_{\Delta \in I}^U M_\Delta \models \Gamma$. ■

Ejercicio: Probar que si un conjunto Γ de sentencias de un lenguaje formal \mathcal{L} admite un modelo infinito, entonces admite un modelo de cualquier cardinal prefijado $\geq |\mathcal{L}|$.

11.3 Ultrapotencias de V

Según hemos visto en la sección anterior, una ultrapotencia $\text{Ult}_U(M)$ de un modelo M es un modelo mayor, en el sentido de que existe una inmersión elemental $j_U : M \rightarrow \text{Ult}_U(M)$. Apurando al límite las posibilidades de formalización de ZFC, aquí vamos a construir ultrapotencias de la propia clase universal V . Naturalmente, ello supone sustituir las técnicas y conceptos de la teoría de modelos propiamente dicha por las técnicas de la teoría de modelos transitivos. Veamos los detalles.

Definición 11.13 Sea I un conjunto y U un ultrafiltro en I . Sea V^I la clase de todas las funciones $f : I \rightarrow V$. Definimos en V^I la relación de equivalencia dada por

$$f =_U g \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

Para cada $f \in V^I$ llamaremos $[f]^*$ al conjunto de todas las funciones $g \in V^I$ tales que $g =_U f$ de rango mínimo. Así, si α es el mínimo ordinal para el que existe una función de rango α relacionada con f , tenemos que $[f]^* \subset V_{\alpha+1}$, luego $[f]^*$ es un conjunto. No se cumple necesariamente que $f \in [f]^*$, pero lo que sí es cierto es que, si $f, g \in V^I$, entonces $[f]^* = [g]^* \leftrightarrow f =_U g$.

Definimos $\text{Ult}_U^*(V) = \{[f]^* \mid f \in V^I\}$. Sobre esta clase definimos la relación R dada por

$$[f]^* R [g]^* \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) \in g(i)\} \in U.$$

Se comprueba inmediatamente que R está bien definida, en el sentido de que si $f =_U f'$ y $g =_U g'$, entonces $\{i \in I \mid f(i) \in g(i)\} \in U$ si y sólo si $\{i \in I \mid f'(i) \in g'(i)\} \in U$.

Para cada conjunto $a \in V$, sea $c_a : I \rightarrow V$ la función constante $c_a(i) = a$. Definimos $j_U^* : V \rightarrow \text{Ult}_U^*(V)$ mediante $j_U^*(a) = [c_a]^*$.

Tomamos $d = j_U^*(\emptyset)$ y consideramos a $(\text{Ult}_U^*(V), R, d)$ como modelo del lenguaje de la teoría de conjuntos. Ahora probamos el teorema fundamental. La prueba es esencialmente la de 11.9 particularizada a ultrapotencias y al lenguaje de la teoría de conjuntos \mathcal{L}_m . No obstante, hay una diferencia sustancial que hemos de tener en cuenta, y es que \mathcal{L}_m tiene descriptor.

Teorema 11.14 Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, sea U un ultrafiltro en un conjunto I y sean $f_1, \dots, f_n \in V^I$. Entonces

$$\phi^{\text{Ult}_U^*(V) R d}([f_1]^*, \dots, [f_n]^*) \leftrightarrow \{i \in I \mid \phi^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U.$$

Así mismo, si $a_1, \dots, a_n \in V$, se cumple

$$\phi^V(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \phi^{\text{Ult}_U^*(V) R d}(j_U^*(a_1), \dots, j_U^*(a_n)).$$

En particular, si ϕ es una sentencia se cumple $\phi^V \leftrightarrow \phi^{\text{Ult}_U^*(V) R d}$, por lo que $(\text{Ult}_U^*(V), R, d)$ es un modelo de ZFC.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\theta_1, \dots, \theta_r$ una sucesión adecuada de expresiones (definición 1.22) tal que $\theta_r \equiv \phi$. Probaremos por inducción sobre k que si θ_k es una fórmula entonces cumple el enunciado y si es un término y $f_1, \dots, f_n \in V^I$ entonces

$$\theta_k^{\text{Ult}_U^*(V) R, d}([f_1], \dots, [f_n]) = [g],$$

donde $g : I \rightarrow V$ viene dada por $g(i) = \theta_k^V(f_1(i), \dots, f_n(i))$.

Por simplicidad abreviaremos $\theta^{\text{Ult}_U^*(V) R, d}$ a θ^M .

Si $\theta_k \equiv x_1$ tenemos que $g = f_1$, luego el resultado es trivial.

Si $\theta_k \equiv t_1 \in t_2$ y $f_1, \dots, f_n \in V^I$, tenemos que

$$t_1^M([f_1], \dots, [f_n]) = [g_1], \quad t_2^M([f_1], \dots, [f_n]) = [g_2],$$

donde g_1 y g_2 están determinados por la hipótesis de inducción. Así,

$$\begin{aligned} \theta_k^M([f_1], \dots, [f_n]) &\leftrightarrow [g_1] R [g_2] \leftrightarrow \{i \in I \mid g_1(i) \in g_2(i)\} \in U \\ &\leftrightarrow \{i \in I \mid t_1^V(f_1(i), \dots, f_n(i)) \in t_2^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U \\ &\leftrightarrow \{i \in I \mid \theta_k^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U. \end{aligned}$$

El caso $\theta_k \equiv t_1 = t_2$ es similar, usando la definición de $=_U$.

Si $\theta_k \equiv \neg\alpha$, por hipótesis de inducción tenemos que

$$\alpha^M([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \alpha^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U$$

y, como U es un ultrafiltro,

$$\neg\alpha^M([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow V^I \setminus \{i \in I \mid \alpha^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U,$$

pero esto equivale a

$$\neg\alpha^M([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \neg\alpha^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U,$$

que es lo que había que probar.

Si $\theta_k \equiv \alpha \rightarrow \beta$ probaremos la complicación de las negaciones:

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta)^M([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \alpha^M([f_1], \dots, [f_n]) \wedge \neg\beta^M([f_1], \dots, [f_n]).$$

Usando la hipótesis de inducción y el caso anterior esto equivale a

$$\begin{aligned} \{i \in I \mid \alpha^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U \wedge \{i \in I \mid \neg\beta^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U \\ \leftrightarrow \{i \in I \mid (\alpha^V \wedge \neg\beta^V)(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U \\ \leftrightarrow \{i \in I \mid \neg(\alpha \rightarrow \beta)^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U. \end{aligned}$$

Usando que U es un ultrafiltro esto equivale a que

$$\{i \in I \mid \theta_k^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \notin U,$$

que es lo que teníamos que probar.

Si $\theta_k \equiv \bigwedge x \alpha$ probaremos también la coimplicación de las negaciones:

$$-\theta_k^M([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \forall f \in V^I \neg \alpha^M([f], [f_1], \dots, [f_n]).$$

Usando la hipótesis de inducción y el caso $\neg \alpha$ ya probado, esto equivale a

$$\forall f \in V^I \{i \in I \mid \neg \alpha^V(f(i), f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U. \quad (11.3)$$

Falta probar que esto equivale a

$$\{i \in I \mid \forall x \in V \neg \alpha^V(x, f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U. \quad (11.4)$$

En efecto, si existe f según (11.3) es claro que el conjunto que está en U según (11.3) está contenido en el conjunto que ha de estar en U según (11.4), luego se cumple (11.4). Recíprocamente, si se cumple (11.4), para cada i en el conjunto indicado tomamos $f(i) \in V$ de modo que se cumpla $\alpha^V(f(i), f_1(i), \dots, f_n(i))$, y si i no está en el conjunto dado por (11.4) tomamos como $f(i)$ cualquier elemento de V . Es claro que f cumple (11.3).

Si $\theta_k \equiv x \mid \alpha$, sea $g(i) = \theta_k^V(f_1(i), \dots, f_n(i))$. Por hipótesis de inducción

$$\overset{1}{\forall} x \in M \alpha^M(x, [f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \overset{1}{\forall} x \in V \alpha^V(x, f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U.$$

Llamemos X al conjunto de la derecha. Si se da la unicidad, entonces $X \in U$ y hemos de probar que $[g]$ es el único elemento de M que cumple α^M . Ahora bien, por la unicidad basta ver que $\alpha^M([g], [f_1], \dots, [f_n])$ y por hipótesis de inducción esto sucede si y sólo si

$$\{i \in I \mid \alpha^V(g(i), f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U,$$

y X está contenido en este conjunto.

Si no se da la unicidad, entonces $I \setminus X \in U$ y para cada $i \in I \setminus X$ tenemos que $g(i) = \emptyset = c_{\emptyset}(i)$, luego $[g] = j_U^*(\emptyset) = d = \theta_k^M([f_1], \dots, [f_n])$.

El resto del teorema es consecuencia inmediata de la primera parte. ■

Tenemos que $\text{Ult}_U^*(V)$ es un modelo de ZFC, pero no es un modelo natural. Vamos a probar que si U es σ -completo entonces $\text{Ult}_U^*(V)$ se colapsa a un modelo transitivo. Ante todo, como se trata de una clase propia, hemos de comprobar que la relación R es conjuntista, es decir, que la clase de todos los $x \in \text{Ult}_U^*(V)$ tales que $x R y$ para un y fijo es un conjunto.

Teorema 11.15 *Sea U un ultrafiltro en un conjunto I . Entonces la relación R es conjuntista en $\text{Ult}_U(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f \in V^I$. Hemos de comprobar que la clase

$$A = \{[g]^* \in \text{Ult}_U^*(V) \mid [g]^* R [f]^*\}$$

es un conjunto. Si $[g]^* \in A$, entonces $\{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \in U$. Sea $g' \in V^I$ la función dada por

$$g'(i) = \begin{cases} g(i) & \text{si } g(i) \in f(i), \\ 0 & \text{si } g(i) \notin f(i). \end{cases}$$

Así $[g]^* = [g']^*$, y como $\bigwedge i \in I \text{ rang } g'(i) \leq \text{rang } f(i)$, también se cumple $\text{rang } g' \leq \text{rang } f$. Como $[g]^*$ sólo contiene las funciones relacionadas con g de rango mínimo, podemos concluir que $[g]^* \subset V_{\alpha+1}$, donde $\alpha = \text{rang } f$. Tenemos, pues, que $A \subset V_{\alpha+2}$, luego ciertamente es un conjunto. ■

Teorema 11.16 *Sea U un ultrafiltro en un conjunto I . Entonces la relación R está bien fundada en $\text{Ult}_U^*(V)$ si y sólo si U es σ -completo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que U es σ -completo. Si R no estuviera bien fundada existiría una sucesión $\{f_n\}_{n \in \omega}$ en V^I tal que $\bigwedge n \in \omega [f_{n+1}]^* R [f_n]^*$.

Sea $X_n = \{i \in I \mid f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \in U$. Entonces $X = \bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$, luego $X \neq \emptyset$. Ahora bien, si $i \in X$ tenemos que $\bigwedge n \in \omega f_{n+1}(i) \in f_n(i)$, lo cual es absurdo.

Supongamos ahora que U no es σ -completo. Entonces el teorema 11.2 nos da una partición $\{X_n\}_{n \in \omega}$ de I en conjuntos nulos. Para cada $n \in \omega$ definimos $f_n \in V^I$ mediante

$$f_n(i) = \begin{cases} k - n & \text{si } i \in X_k \text{ y } k \geq n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\{i \in I \mid f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} = \bigcup_{k > n} X_k = \bigcap_{n \leq k} (I \setminus X_k) \in U$, luego se cumple que $\bigwedge n \in \omega [f_{n+1}]^* R [f_n]^*$ y R no está bien fundada en $\text{Ult}_U^*(V)$. ■

De este modo, si U es un ultrafiltro σ -completo en un conjunto U , la relación R es conjuntista, extensional y bien fundada en la clase $\text{Ult}_U^*(V)$ (es extensional por el teorema 11.14 aplicado al axioma de extensionalidad). Esto implica que $\text{Ult}_U^*(V)$ es isomorfa a su colapso transitivo.

Definición 11.17 *Sea U un ultrafiltro σ -completo en un conjunto I . Llamaremos $\text{Ult}_U(V)$ al colapso transitivo de $\text{Ult}_U^*(V)$. Si $\pi : \text{Ult}_U^*(V) \rightarrow \text{Ult}_U(V)$ es la función colapsante y $f \in V^I$, llamaremos $[f] = \pi([f]^*)$. Nos referiremos a $\text{Ult}_U(V)$ como la *ultrapotencia* de la clase universal V determinada por U .*

Como π es biyectiva tenemos que

$$\bigwedge fg \in V^I ([f] = [g] \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U),$$

y como π transforma la relación R en la relación de pertenencia,

$$\bigwedge fg \in V^I ([f] \in [g] \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) \in g(i)\} \in U).$$

Definimos $j_U : V \rightarrow \text{Ult}_U(V)$ mediante $j_U(a) = \pi(j_U^*(a)) = [c_a]$. A través de π , el teorema 11.14 nos da el teorema siguiente:

Teorema 11.18 Si U es un ultrafiltro σ -completo en un conjunto I , entonces la ultrapotencia $\text{Ult}_U(V)$ es un modelo transitivo de ZFC. Además, si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula cuyas variables libres están entre las indicadas y $f_1, \dots, f_n \in V^I$,

$$\phi^{\text{Ult}_U(V)}([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \phi^V(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U.$$

Así mismo, si $a_1, \dots, a_n \in V$, se cumple

$$\phi^V(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \phi^{\text{Ult}_U(V)}(j_U(a_1), \dots, j_U(a_n)).$$

En particular, si ϕ es una sentencia se cumple $\phi^V \leftrightarrow \phi^{\text{Ult}_U(V)}$.

Cuando no haya posibilidad de confusión escribiremos simplemente Ult y j en lugar de $\text{Ult}_U(V)$ y j_U . Tenemos entre manos un concepto delicado que debemos precisar:

Definición 11.19 Sean M y N modelos transitivos de ZFC. Diremos que una aplicación $j : M \rightarrow N$ es una *inmersión elemental* si para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ se cumple

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M (\phi^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^N(x_1, \dots, x_n)).$$

Aquí es crucial entender que “ $j : M \rightarrow N$ es una inmersión elemental” no se corresponde con ninguna fórmula de ZFC, al igual que sucede con “ M es un modelo de ZFC”. Los teoremas que contienen estas palabras han de entenderse como esquemas teorematícos. Así, si “ $j : M \rightarrow N$ es una inmersión elemental” aparece en la hipótesis de un teorema habrá que entender que la tesis se cumple siempre que la definición anterior se cumpla para una cantidad finita suficientemente grande de fórmulas; por el contrario, si “ $j : M \rightarrow N$ es una inmersión elemental” aparece en la tesis de un teorema, habrá que entender que es posible demostrar la relación de la definición anterior para cualquier fórmula prefijada; un teorema de tipo “si $j : M \rightarrow N$ es una inmersión elemental... entonces $j' : M' \rightarrow N'$ es una inmersión elemental” tendrá que entenderse como que para toda colección finita E de fórmulas, existe una colección finita Δ de modo que si j cumple la definición de inmersión elemental para las fórmulas de Δ entonces j' la cumple para las fórmulas de E . Similarmente habrá que entender los enunciados donde se mezclen afirmaciones de tipo “ $j : M \rightarrow N$ es una inmersión elemental” con afirmaciones de tipo “ M' es un modelo de ZFC”.

Más aún, si el dominio M de una inmersión j es una clase propia, entonces j también lo será, luego las afirmaciones sobre inmersiones elementales entre clases propias sólo tendrán sentido en ZFC en la medida en que se refieran a aplicaciones definidas por fórmulas concretas de \mathcal{L}_m .

Por ejemplo, el teorema anterior afirma que Ult es un modelo de ZFC y que $j : V \rightarrow \text{Ult}$ es una inmersión elemental, lo cual ha de entenderse como que, para cualquier axioma prefijado ϕ de ZFC, podemos probar ϕ^{Ult} , y para cualquier fórmula prefijada ϕ podemos probar que j cumple la definición de inmersión elemental. Esto tiene sentido en ZFC porque tanto $x \in \text{Ult}_U(V)$

como $j(x) = y$ pueden expresarse mediante fórmulas $\phi(x, I, U)$ y $\psi(x, y, I, U)$ que no hacen referencia a clases propias.¹ Nos referiremos a $j : V \rightarrow \text{Ult}$ como la *inmersión natural* de V en Ult .

Obviamente, si M es un modelo transitivo de ZFC, la identidad en M es una inmersión elemental. Diremos que una inmersión elemental es *no trivial* si es distinta de la identidad.

Veamos algunas propiedades básicas. Supongamos que $j : M \rightarrow N$ es una inmersión elemental entre modelos transitivos de ZFC y que $\Omega \subset M$.

En primer lugar j es inyectiva, pues esto se sigue de la definición de inmersión aplicada a la fórmula $\phi(x, y) \equiv x = y$, es decir, $\bigwedge xy \in M (x = y \leftrightarrow j(x) = j(y))$.

Así mismo j conserva todas las operaciones conjuntistas que son absolutas para modelos transitivos de ZFC. Por ejemplo,

$$z = x \cap y \leftrightarrow (z = x \cap y)^M \leftrightarrow (j(z) = j(x) \cap j(y))^N \leftrightarrow j(z) = j(x) \cap j(y),$$

luego $j(x \cap y) = j(x) \cap j(y)$. Del mismo modo $j(\{x, y\}) = \{j(x), j(y)\}$, etc. Igualmente j transforma conjuntos finitos en conjuntos finitos, ordinales en ordinales, conjuntos constructibles en conjuntos constructibles (porque la constructibilidad es absoluta para clases propias), etc.

En particular se cumple que $j|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \Omega$ y conserva el orden. Por consiguiente $\bigwedge \alpha \in \Omega \alpha \leq j(\alpha)$.

Una propiedad más sutil es que si $j : M \rightarrow N$ y $j : M \rightarrow N'$ son inmersiones elementales (donde N y N' son modelos transitivos de ZFC) entonces $N = N'$. Es decir, una inmersión no es suprayectiva (salvo en el caso trivial en que sea la identidad), pero determina el modelo de llegada. Esto se debe a que $N = \bigcup_{\alpha \in \Omega} j(V_{\alpha} \cap M)$.

En efecto, si $\alpha \in \Omega$, entonces $V_{\alpha} \cap M = V_{\alpha}^M \in M$, luego $j(V_{\alpha} \cap M) \in N$, luego $j(V_{\alpha} \cap M) \subset N$. Recíprocamente, si $x \in N$ existe un $\alpha \in \Omega$ tal que $\text{rang } x < j(\alpha)$ (pues $j|_{\Omega}$ no puede estar acotada), luego $x \in V_{j(\alpha)} \cap N = j(V_{\alpha} \cap M)$. Aquí hemos usado que $a = V_{\alpha} \cap M$ cumple $(a = V_{\alpha})^M$, luego $(j(a) = V_{j(\alpha)})^N$, es decir, $j(a) = V_{j(\alpha)} \cap N$.

En particular, si $j : M \rightarrow N$ es una inmersión elemental trivial, es decir, es la identidad en M , necesariamente $N = M$. Seguidamente probamos que para que esto suceda es necesario y suficiente que j fije a todos los ordinales:

Teorema 11.20 *Sea $j : M \rightarrow N$ una inmersión elemental entre modelos transitivos de ZFC tales que $\Omega \subset M$. Entonces*

a) *Para todo $\alpha \in \Omega$ se cumple que*

$$(\bigwedge \beta < \alpha j(\beta) = \beta) \leftrightarrow (\bigwedge x \in V_{\alpha} \cap M j(x) = x).$$

b) *j es trivial si y sólo si $\bigwedge \beta \in \Omega j(\beta) = \beta$.*

¹El teorema del colapso transitivo para clases propias (definidas mediante fórmulas explícitas) es demostrable en ZFC. En el caso de las ultrapotencias, la clase colapsada $[f]$ puede definirse como el colapso transitivo de la clausura de la clase $[f]^*$ respecto a la relación R (que es un conjunto porque R es conjuntista).

DEMOSTRACIÓN: a) Una implicación es obvia. Supongamos que j fija a todos los ordinales menores que α . Entonces, si $x \in V_\alpha \cap M$, tenemos que $\text{rang } x = \beta < \alpha$, luego $\text{rang } j(x) = j(\beta) = \beta$, es decir, $\text{rang } j(x) = \text{rang } x$.

Veamos que j fija a todos los conjuntos de rango menor que α por inducción sobre el rango, es decir, tomamos $x \in V_\alpha \cap M$ y suponemos que $j(y) = y$ para todo $y \in M$ de rango menor que x .

Si $y \in x$, entonces $\text{rang } y < \text{rang } x$, luego por hipótesis de inducción tenemos que $y = j(y) \in j(x)$. Esto prueba que $x \subset j(x)$. Igualmente, si $y \in j(x)$, entonces $\text{rang } y < \text{rang } j(x) = \text{rang } x$, luego también $y = j(y) \in j(x)$, y esto implica que $y \in x$. Así pues, $j(x) = x$.

b) es consecuencia inmediata de a). ■

Los resultados que hemos probado sobre ultrapotencias son válidos para cualquier ultrafiltro σ -completo. En ningún momento hemos necesitado exigir que no sea principal. No obstante, si el ultrafiltro es principal toda la teoría se vuelve trivial:

Teorema 11.21 *Sea I un conjunto y U el ultrafiltro principal generado por $i_0 \in I$. Entonces $\text{Ult}_U(V) = V$, $\bigwedge f \in V^I [f] = f(i_0)$ y la inmersión natural es trivial.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f, g \in V^I$, tenemos que

$$[f] = [g] \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U \leftrightarrow f(i_0) = g(i_0).$$

Por consiguiente podemos definir $C : \text{Ult} \rightarrow V$ mediante $C([f]) = f(i_0)$. Así C es inyectiva, y de hecho es biyectiva porque $C(j(a)) = a$. Se comprueba sin dificultad que

$$\bigwedge f, g \in V^I ([f] \in [g] \leftrightarrow C([f]) \in C([g])),$$

luego C es un isomorfismo entre clases transitivas, pero la unicidad del colapso transitivo implica que $\text{Ult} = V$ y que C es la identidad. Ahora el teorema es obvio. ■

Lo importante es que una inmersión elemental en una ultrapotencia sólo es trivial si lo es el ultrafiltro con el que se construye, tal y como muestra el teorema siguiente:

Teorema 11.22 *Sea U una medida de Ulam en un conjunto I y sea κ el mayor cardinal tal que U es κ -completo. Entonces $\bigwedge \alpha < \kappa j(\alpha) = \alpha$, pero $\kappa < j(\kappa)$. Así pues, j no es trivial.*

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción. Sea $\alpha < \kappa$ y supongamos que $\bigwedge \beta < \alpha j(\beta) = \beta$. Si $[f] \in j(\alpha) = [c_\alpha]$, entonces $\{i \in I \mid f(i) < \alpha\} \in U$. Si $\bigwedge \beta < \alpha$ se cumpliera que $\{i \in I \mid f(i) = \beta\} \notin U$, entonces por completitud

$$\{i \in I \mid f(i) \geq \alpha\} = \bigcap_{\beta < \alpha} \{i \in I \mid f(i) \neq \beta\} \in U,$$

contradicción. Así pues, ha de existir un $\beta < \alpha$ tal que $\{i \in I \mid f(i) = \beta\} \in U$. Esto implica que $[f] = [c_\beta] = j(\beta) = \beta < \alpha$. Con esto hemos probado que $j(\alpha) \leq \alpha$. La desigualdad contraria la cumple toda inmersión elemental.

Como U no es κ^+ -completo, según el teorema 11.2 existe una partición $\{X_\delta\}_{\delta < \kappa}$ de I en conjuntos nulos. Sea $f \in V^I$ dada por $f(i) = \delta \leftrightarrow i \in X_\delta$. Así

$$\{i \in I \mid f(i) \in c_\kappa(i)\} = I \in U,$$

luego $[f] \in [c_\kappa] = j(\kappa)$, es decir, $[f] < j(\kappa)$.

Por otro lado, si $\alpha < \kappa$ entonces

$$\{i \in I \mid \alpha \in f(i)\} = I \setminus \bigcup_{\delta \leq \alpha} X_\delta = \bigcap_{\delta \leq \alpha} (I \setminus X_\delta) \in U,$$

luego $\alpha = j(\alpha) = [c_\alpha] \in [f]$. Así pues, $\kappa \leq [f] < j(\kappa)$. ■

11.4 Ultrapotencias con cardinales medibles

En esta sección usaremos las ultrapotencias para obtener propiedades de los cardinales medibles. En primer lugar probamos una serie de propiedades adicionales que presentan las ultrapotencias construidas con estos cardinales.

Teorema 11.23 *Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Llamemos $M = \text{Ult}_U(V)$ y sea $j : V \rightarrow M$ la inmersión natural. Entonces*

- a) $\bigwedge x \in V_\kappa j(x) = x$.
- b) $\kappa < j(\kappa)$.
- c) $M^\kappa \subset M$.
- d) $\bigwedge x \subset M (|x| \leq \kappa \rightarrow x \in M)$.
- e) $\bigwedge x \in M (|x| \leq \kappa \rightarrow \mathcal{P}^M x = \mathcal{P}x)$.
- f) $\bigwedge \alpha < \kappa (\alpha \text{ es un cardinal}^M \leftrightarrow \alpha \text{ es un cardinal})$.
- g) $\bigwedge \mu < \kappa (2^\mu)^M = 2^\mu$.
- h) $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.
- i) $U \notin M$. En particular $M \neq V$.
- j) Sea λ un ordinal límite.
 - Si $\text{cf } \lambda = \kappa$ entonces $j(\lambda) > \bigcup_{\delta < \lambda} j(\delta)$.
 - Si $\text{cf } \lambda \neq \kappa$ entonces $j(\lambda) = \bigcup_{\delta < \lambda} j(\delta)$.
- k) Si $\mu > \kappa$ es un cardinal límite fuerte con $\text{cf } \mu \neq \kappa$, entonces $j(\mu) = \mu$.

DEMOSTRACIÓN: a) y b) se cumplen por el teorema anterior. Notemos que U no puede ser κ^+ completo porque κ es unión de κ conjuntos nulos (de la forma $\{\alpha\}$).

c) Sea $f : \kappa \rightarrow M$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $f(\alpha) = [g_\alpha]$, con $g_\alpha \in V^\kappa$. Sea $\kappa = [h]$, con $h \in V^\kappa$. Como κ es un ordinal, $\{\alpha \in \kappa \mid h(\alpha) \text{ es un ordinal}\} \in U$, luego, modificando h fuera de este conjunto, podemos exigir que $h \in \Omega^\kappa$.

Para cada $\alpha < \kappa$, sea $G(\alpha) : h(\alpha) \rightarrow V$ la aplicación dada por

$$G(\alpha)(\beta) = \begin{cases} g_\beta(\alpha) & \text{si } \beta < \kappa, \\ 0 & \text{si } \beta \geq \kappa. \end{cases}$$

De este modo,

$$\{\alpha \in \kappa \mid G(\alpha) \text{ es una función y } \text{Dominio } G(\alpha) = h(\alpha)\} = \kappa \in U,$$

luego $[G] : [h] \rightarrow V$, es decir, $[G] : \kappa \rightarrow V$. Sea $\beta < \kappa$. Por el apartado a) tenemos que $\beta = j(\beta) = [c_\beta] \in [h]$, luego $\{\alpha \in \kappa \mid \beta < h(\alpha)\} \in U$ y, por consiguiente, $\{\alpha \in \kappa \mid G(\alpha)(c_\beta(\alpha)) = g_\beta(\alpha)\} \in U$ (pues este conjunto contiene al anterior), y de aquí se sigue que $[G](j(\beta)) = [g_\beta]$, es decir, $[G](\beta) = f(\beta)$. Esto prueba que $f = [G] \in M$.

d) es consecuencia inmediata de c).

e) y f) son consecuencias inmediatas de d)

g) Si $\mu < \kappa$, tenemos que $(2^\mu)^M$ es biyectable^M con $\mathcal{P}^M \mu = \mathcal{P}\mu$. Como κ es fuertemente inaccesible deducimos que $(2^\mu)^M < \kappa$, luego por f) resulta que $(2^\mu)^M$ es un cardinal, luego es el cardinal de $\mathcal{P}\mu$. Así pues, $(2^\mu)^M = 2^\mu$.

h) Como en el apartado anterior, tenemos que $(2^\kappa)^M$ es biyectable^M con $\mathcal{P}\kappa$, luego $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M$.

Por otra parte, como κ es fuertemente inaccesible, tenemos que $j(\kappa)$ es fuertemente inaccesible^M y $\kappa < j(\kappa)$, luego $(2^\kappa)^M < j(\kappa)$.

Notemos ahora que si $f \in {}^\kappa \kappa$, entonces $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in \kappa\} = \kappa \in U$, luego $[f] \in [c_\kappa] = j(\kappa)$. Sea, pues, $G : {}^\kappa \kappa \rightarrow j(\kappa)$ dada por $G(f) = [f]$. Resulta que G es suprayectiva, pues si $[f] \in j(\kappa)$ entonces $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in \kappa\} \in U$, luego, modificando f fuera de este conjunto, podemos exigir que $f \in {}^\kappa \kappa$, y entonces $G(f) = [f]$.

Concluimos que $|j(\kappa)| \leq 2^\kappa$, luego $j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.

i) Supongamos que $U \in M$. Por c) tenemos que $({}^\kappa \kappa)^M = {}^\kappa \kappa$. Definimos en este conjunto la relación

$$f =_U g \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U,$$

obviamente absoluta para M , por lo que el cociente $\text{Ult}_U^*(\kappa)$ también es absoluto para M . Similarmente, definimos la relación

$$[f]^* R [g]^* \leftrightarrow \{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \in g(\alpha)\},$$

también absoluta.

Sea $\pi : \text{Ult}_U^*(\kappa) \longrightarrow M$ la aplicación dada por $\pi([f]^*) = [f]$, donde la primera clase es en $\text{Ult}_U^*(\kappa)$ y la segunda en $\text{Ult}_U(V)$. Es claro que π está bien definida, es inyectiva y transforma R en la relación de pertenencia. De aquí se sigue que R está bien fundada en $\text{Ult}_U^*(\kappa)$ y que π es su colapso transitivo. Esto implica que R está bien fundada^M (teorema 1.37) y una simple inducción prueba que el colapso transitivo^M de R coincide con π , luego en particular $\pi \in M$. La función $f \mapsto [f]^*$ está ciertamente en M , y la composición de ésta con π es precisamente la función G del apartado anterior. Así pues, $G \in M$, lo cual prueba que $(|j(\kappa)| \leq 2^\kappa)^M$, pero $\kappa < j(\kappa)$ y $j(\kappa)$ es fuertemente inaccesible^M, contradicción.

j) Sea $\text{cf } \lambda = \kappa$ y tomemos una función $f : \kappa \longrightarrow \lambda$ cofinal creciente. Claramente $\{\beta < \kappa \mid f(\beta) < \lambda\} = \kappa \in U$, luego $[f] < j(\lambda)$. Por otra parte, para cada $\alpha < \lambda$, se cumple que $\{\beta < \kappa \mid f(\alpha) \in f(\beta)\} = \kappa \setminus (\alpha + 1) \in U$, luego $j(f(\alpha)) \in [f]$. Por consiguiente

$$\bigcup_{\alpha < \lambda} j(\alpha) \leq [f] < j(\lambda).$$

Supongamos que $\text{cf } \lambda > \kappa$. Si $[f] \in j(\lambda)$, podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \lambda$, y entonces existe un $\alpha < \lambda$ tal que $f : \kappa \longrightarrow \alpha$, luego $[f] < j(\alpha)$, luego

$$j(\lambda) \leq \bigcup_{\alpha < \lambda} j(\alpha).$$

La otra desigualdad es obvia.

Finalmente, supongamos que $\text{cf } \lambda = \mu < \kappa$. Sea $h : \mu \longrightarrow \lambda$ cofinal creciente. Si $[f] \in j(\lambda)$ podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \lambda$. Si para todo $\beta < \mu$ se cumpliera que $\{\alpha < \kappa \mid h(\beta) \leq f(\alpha)\} \in U$, entonces

$$\emptyset = \{\alpha < \kappa \mid \bigwedge \beta < \mu h(\beta) \leq f(\alpha)\} = \bigcap_{\beta < \mu} \{\alpha < \kappa \mid h(\beta) \leq h(\alpha)\} \in U,$$

lo cual es absurdo, luego existe un $\beta < \mu$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < h(\beta)\} \in U$, lo cual equivale a que $[f] \in j(h(\beta))$, luego también

$$j(\lambda) \leq \bigcup_{\alpha < \lambda} j(\alpha).$$

k) Para todo $\alpha < \mu$ y todo $\beta < j(\alpha)$ se cumple que $\beta = [f]$, con $f : \kappa \longrightarrow \alpha$, luego $|j(\alpha)| \leq |\kappa^\alpha| < \mu$. Por el apartado anterior,

$$j(\mu) = \bigcup_{\alpha < \mu} j(\alpha) \leq \mu \leq j(\mu).$$

■

Del apartado i) de este teorema deducimos una primera aplicación:

Teorema 11.24 (Scott) *Si $V = L$ no existen cardinales medibles.*

DEMOSTRACIÓN: Si existe un cardinal medible, podemos construir una ultrapotencia no trivial de la clase universal, que es un modelo transitivo de ZFC que contiene a todos los ordinales. Por consiguiente $L \subset \text{Ult} \subsetneq V$. ■

Como segunda aplicación probamos que todo cardinal medible tiene una medida con propiedades adicionales:

Definición 11.25 Recordemos (def. [15.18]) que si $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ es una familia de subconjuntos de un cardinal κ , su *intersección diagonal* es el conjunto

$$\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \{\gamma < \kappa \mid \gamma \in \bigcap_{\alpha < \gamma} X_\alpha\}.$$

Un filtro F en κ es *normal* si cuando $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ es una familia de elementos de F , entonces $\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha \in F$.

Vamos a probar que todo cardinal medible tiene una medida normal. En primer lugar daremos varias caracterizaciones de estas medidas:

Teorema 11.26 Sea D una medida en un cardinal κ . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- D es normal.
- Si $f : \kappa \rightarrow \kappa$ cumple que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in D$, entonces existe un $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in D$.
- Si $d : \kappa \rightarrow \kappa$ es la identidad, entonces $\kappa = [d]$.
- Para todo $X \subset \kappa$ se cumple que $X \in D \leftrightarrow \kappa \in j_D(X)$.

DEMOSTRACIÓN: a) \rightarrow b). Supongamos que $Y = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in D$ pero que para todo $\gamma < \kappa$ se cumple que $X_\gamma = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \neq \gamma\} \in D$. Entonces $X = \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha \in D$.

Si $\alpha \in X$, entonces $\alpha \in \bigcap_{\gamma < \alpha} X_\alpha$, luego $f(\alpha) \geq \gamma$, luego $\alpha \notin Y$. Así pues, $X \subset \kappa \setminus Y$, luego $\kappa \setminus Y \in D$, contradicción.

b) \rightarrow c) Si $\gamma < \kappa$ entonces $\{\alpha < \gamma \mid d(\alpha) > \gamma\} \in D$, luego $[d] > j(\gamma) = \gamma$. Por lo tanto $[d] \geq \kappa$.

Si $\kappa = [f] < [d]$, entonces $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in D$, luego por b) existe un $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in D$, o sea, $\kappa = [f] = j(\gamma) = \gamma < \kappa$, contradicción. Así pues, $\kappa = [d]$.

c) \rightarrow d). Claramente $X \in D \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid d(\alpha) \in X\} \in D \leftrightarrow \kappa = [d] \in j(X)$.

d) \rightarrow a). Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ una familia de subconjuntos de κ de medida 1. Entonces $\bigwedge_{\alpha < \kappa} \kappa \in j(X_\alpha)$. Sea $X = \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha$. Sea $j(\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}) = \{Y_\alpha\}_{\alpha < j(\kappa)}$.

Como $(\alpha, X_\alpha) \in \{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$, se cumple que $(j(\alpha), j(X_\alpha)) \in \{Y_\alpha\}_{\alpha < j(\kappa)}$, es decir, $\bigwedge_{\alpha < \kappa} Y_\alpha = j(X_\alpha)$.

Por otra parte, $j(X) = \bigtriangleup_{\alpha < j(\kappa)} Y_\alpha$, y como $\kappa \in \bigcap_{\alpha < \kappa} j(X_\alpha) = \bigcap_{\alpha < \kappa} Y_\alpha$, tenemos que $\kappa \in j(X)$, luego $X \in D$. ■

Teorema 11.27 *Todo cardinal medible tiene una medida normal.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una medida cualquiera U en κ , consideremos la ultrapotencia correspondiente y sea $\kappa = [f]$. Como $[f] < j(\kappa)$, se cumple que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \kappa\} \in U$, luego podemos suponer que $f : \kappa \rightarrow \kappa$. Sea $D = f[U]$. Por el teorema 11.6 tenemos que D es un ultrafiltro κ -completo en κ . Si $\gamma < \kappa$, entonces $\gamma \neq [f]$, luego $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \neq \gamma\} \in U$, luego $f^{-1}[\{\gamma\}] \notin U$, luego $\{\gamma\} \notin D$. Esto prueba que D no es principal y, por consiguiente, es una medida en κ . Veamos que es normal probando la propiedad b) del teorema anterior.

Sea $h : \kappa \rightarrow \kappa$ tal que $X = \{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) < \alpha\} \in D$, es decir, $f^{-1}[X] \in U$. Sea $g = f \circ h : \kappa \rightarrow \kappa$. Claramente $f^{-1}[X] \subset \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) < f(\alpha)\}$, luego este último conjunto está en U , lo que se traduce en que $[g] < [f]$, es decir, $[g] = \gamma = j(\gamma) < \kappa$. Por lo tanto $Y = \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) = \gamma\} \in U$, luego $f[Y] \subset \{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) = \gamma\} \in D$, como había que probar. ■

Una de las propiedades más importantes de las medidas normales es que contienen a los cerrados no acotados. Para demostrarlo probamos primero el teorema siguiente:

Teorema 11.28 *Sea $j : V \rightarrow M$ una inmersión elemental no trivial, sea κ el menor ordinal no fijado y sea C un conjunto cerrado no acotado en κ . Entonces $\kappa \in j(C)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha \in C$, entonces $\alpha = j(\alpha) \in j(C) \cap \kappa$ y, recíprocamente, si $\alpha \in j(C) \cap \kappa$, entonces $\alpha = j(\alpha) \in j(C)$, luego $\alpha \in C$. Así pues, $j(C) \cap \kappa = C$, luego $j(C) \cap \kappa$ no está acotado en κ .

Por definición de cerrado tenemos que

$$\bigwedge \lambda (\lambda \text{ es un ordinal límite} \wedge \lambda < \kappa \wedge C \cap \lambda \text{ no está acotado en } \lambda \rightarrow \lambda \in C),$$

luego aplicando j tenemos que

$$\bigwedge \lambda (\lambda \text{ es un ordinal límite} \wedge \lambda < j(\kappa)$$

$$\wedge j(C) \cap \lambda \text{ no está acotado en } \lambda \rightarrow \lambda \in j(C)).$$

Ahora bien, esta última fórmula se cumple para $\lambda = \kappa$, luego, en efecto, $\kappa \in j(C)$. ■

Teorema 11.29 *Si D es una medida normal en un cardinal κ , entonces todo subconjunto cerrado no acotado de κ está en D . Por lo tanto, todos los elementos de D son estacionarios en κ .*

DEMOSTRACIÓN: Si C es cerrado no acotado en κ , por el teorema anterior $\kappa \in j(C)$ y por 11.26 d), $C \in D$. ■

Recordemos la definición de los cardinales de Mahlo ([15.26]). Los cardinales (fuertemente) 0-Mahlo son simplemente los cardinales fuertemente inaccesibles. Así pues, el teorema 11.5 afirma que si κ es un cardinal medible, entonces es un cardinal 0-Mahlo. Sea $\alpha < \kappa$ y supongamos probado que κ es α -Mahlo. Una inducción rutinaria prueba que si κ es un cardinal α -Mahlo, entonces κ es α -Mahlo^M para todo modelo transitivo de ZFC (que contenga a α y a κ).²

Así, fijada una medida normal D en κ , tenemos que κ es α -Mahlo^{Ult}, luego, si d es la identidad en κ , se cumple que $[d]$ es $[c_\alpha]$ -Mahlo^{Ult}, (pues $\alpha = j(\alpha) = [c_\alpha]$). Por tanto el conjunto $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es } \alpha\text{-Mahlo}\} \in D$, luego es estacionario y, por definición, κ es $\alpha + 1$ -Mahlo.

Si $\lambda \leq \kappa$ cumple que κ es δ -Mahlo para todo $\delta < \lambda$, entonces κ es λ -Mahlo por definición. Con esto hemos probado:

Teorema 11.30 *Todo cardinal medible κ es fuertemente κ -Mahlo. Además, si D es una medida normal en κ y $\alpha < \kappa$, entonces*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es fuertemente } \alpha\text{-Mahlo}\} \in D.$$

Ejercicio: Probar que si κ es un cardinal medible y D es una medida normal en κ , entonces $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es fuertemente } \mu\text{-Mahlo}\} \in D$.

Así pues, la consistencia de que existan cardinales medibles es mucho más fuerte que la consistencia de que existan cardinales fuertemente inaccesibles. Veremos que, de hecho, es más fuerte que la existencia de cualquier cantidad de cardinales de Mahlo de cualquier grado.

La existencia de cardinales medibles impone ciertas restricciones a la función del continuo. Algunas son obvias, como que han de ser límites fuertes, pero otras no lo son en absoluto. Sucede que los cardinales medibles satisfacen restricciones similares a las conocidas para cardinales singulares. Por ejemplo, comparemos el teorema siguiente con el teorema de Silver [15.18]:

Teorema 11.31 *Sea κ un cardinal medible y D una medida normal en κ . Si $\{\mu < \kappa \mid 2^\mu = \mu^+\} \in D$, entonces $2^\kappa = \kappa^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Si d es la identidad en κ , tenemos que

$$\{\mu < \kappa \mid 2^{d(\mu)} = d(\mu)^+\} \in D,$$

²Notemos que “ser un cardinal” es Π_1 , “ser cerrado no acotado en κ ” es Δ_0 , “ser estacionario en κ ” es Π_1 , luego todas estas propiedades se conservan al pasar a un modelo M . Además “ κ es $\alpha + 1$ -Mahlo” equivale a

$$\bigwedge X \subset \kappa (\bigwedge \beta \in \kappa (\beta \in X \leftrightarrow \beta \in \kappa \wedge \beta \text{ es } \alpha\text{-Mahlo}) \rightarrow X \text{ es estacionario en } \kappa).$$

Dado $X \in M$ que cumpla la hipótesis^M, por hipótesis de inducción X contiene al conjunto (estacionario) de los cardinales α -Mahlo menores que κ , luego es estacionario, luego es estacionario^M.

luego $(2^{[d]} = [d]^+)^{\text{Ult}}$, es decir, $(2^\kappa = \kappa^+)^{\text{Ult}}$, pero por el teorema 11.23 tenemos que $2^\kappa \leq (2^\kappa)^{\text{Ult}} = (\kappa^+)^{\text{Ult}} \leq \kappa^+$. ■

Más en general:

Teorema 11.32 *Sea κ un cardinal medible y D una medida normal en κ . Sea $\beta < \kappa$ y supongamos que $\{\aleph_\alpha < \kappa \mid 2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+\beta}\} \in D$. Entonces $2^{\aleph_\kappa} \leq \aleph_{\kappa+\beta}$. (Notemos que, por ser inaccesible, $\kappa = \aleph_\kappa$.)*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \kappa \rightarrow \Omega$ una función que cumpla $f(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+\beta}$, sea d la identidad en κ . Entonces $\{\mu < \kappa \mid 2^{d(\mu)} \leq f(\mu)\} \in D$, luego tenemos que $(2^\kappa \leq [f])^{\text{Ult}}$, luego $2^\kappa \leq (2^\kappa)^{\text{Ult}} \leq [f]$.

Por otra parte, $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \aleph_{d(\alpha)+c_\beta(\alpha)}\} \in D$, pues contiene, por ejemplo, a todos los cardinales inaccesibles $\mu = \aleph_\mu$ menores que κ . Por consiguiente $[f] = \aleph_{\kappa+\beta}^{\text{Ult}} \leq \aleph_{\kappa+\beta}$. ■

Notemos que no tenemos ningún resultado sobre las determinaciones de la función del continuo que son consistentes con la existencia de un cardinal medible. Debido al teorema 11.24, ni siquiera sabemos si la HCG es consistente con la existencia de un cardinal medible.

Terminamos demostrando que la existencia de cardinales medibles es, de hecho, equivalente a la existencia de inmersiones elementales no triviales de V en un modelo.³

Teorema 11.33 *Si $j : V \rightarrow M$ es una inmersión elemental no trivial de V en un modelo transitivo de ZFC y κ es el mínimo ordinal tal que $j(\kappa) \neq \kappa$, entonces κ es un cardinal medible y $D = \{X \subset \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$ es una medida en κ . Además, existe una inmersión elemental $k : \text{Ult}_D(V) \rightarrow M$ tal que $j_D \circ k = j$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos primeramente que, por el teorema 11.20, existe un ordinal κ tal que $j(\kappa) \neq \kappa$. Como j conserva el orden de Ω ha de ser $\kappa < j(\kappa)$. Si κ no es un cardinal, sea $\mu = |\kappa|$ y sea $f : \mu \rightarrow \kappa$ biyectiva. Así $j(f) : \mu \rightarrow j(\kappa)$ biyectiva, pero si $f(\alpha) = \beta$, entonces $j(f)(j(\alpha)) = j(\beta)$, es decir, $j(f)(\alpha) = \beta$, luego $j(f) = f$ y, por lo tanto, $\kappa = j(\kappa)$, contradicción.

Obviamente $\kappa \in D$ y $\emptyset \notin D$. Si se cumple que $X \in D$ y $X \subset Y \subset \kappa$, entonces $\kappa \in j(X) \subset j(Y)$, luego $Y \in D$.

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha < \beta}$, con $\beta < \kappa$ una familia de elementos de D y veamos que su intersección también está en D . Con ello tendremos probado que D es un filtro κ -completo. Como $\{X_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ es una sucesión de dominio β , su imagen por j será una sucesión de dominio $j(\beta) = \beta$. Además, si $(\alpha, X_\alpha) \in \{X_\alpha\}_{\alpha < \beta}$, se cumple que $(\alpha, j(X_\alpha)) \in j(\{X_\alpha\}_{\alpha < \beta})$, luego $j(\{X_\alpha\}_{\alpha < \beta}) = \{j(X_\alpha)\}_{\alpha < \beta}$.

³Notemos que en ZFC la afirmación “existe una inmersión elemental no trivial $j : V \rightarrow M$ ” sólo tiene sentido si se interpreta como que existe una fórmula (metamatemática) que define una inmersión elemental no trivial (y otra que define al modelo imagen).

Si llamamos $X = \bigcap_{\alpha < \beta} X_\alpha$, tenemos que

$$\bigwedge \delta (\delta \in X \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \beta \delta \in X_\alpha),$$

luego

$$\bigwedge \delta (\delta \in j(X) \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \beta \delta \in j(X_\alpha)).$$

Esto significa que $j(X) = \bigcap_{\alpha < \beta} j(X_\alpha)$ y, como cada $X_\alpha \in D$, se cumple que $\kappa \in j(X)$, luego $X \in D$.

Dado $X \subset \kappa$, o bien $\kappa \in j(X)$ o bien $\kappa \in j(\kappa) \setminus j(X) = j(\kappa \setminus X)$, luego $X \in D$ o bien $\kappa \setminus X \in D$. Con esto tenemos que D es un ultrafiltro κ completo en κ . Falta probar que no es principal. Ahora bien, para cada $\alpha < \kappa$, tenemos que $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$, luego $\kappa \notin j(\{\alpha\})$, luego $\{\alpha\} \notin D$.

Veamos ahora que D es normal mediante el teorema 11.26. Si $f : \kappa \rightarrow \kappa$ cumple $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in D$, entonces κ está en la imagen por j de este conjunto, que es $\{\alpha < j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) < \alpha\}$. Así pues, $\gamma = j(f)(\kappa) < \kappa$. Entonces $\kappa \in \{\alpha < j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) = \gamma\}$, y este conjunto no es sino $j(\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\})$, luego $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in D$.

Así queda probado que D es una medida normal en κ . Para cada $[f] \in \text{Ult}$, definimos $k([f]) = j(f)(\kappa)$. Esta aplicación está bien definida, pues si $[f] = [g]$ entonces $X = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in D$, luego por definición de D se cumple que $\kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) = j(g)(\alpha)\}$, de modo que $j(f)(\kappa) = j(g)(\kappa)$.

Claramente, $k(j_D(a)) = k([c_a]) = j(c_a)(\kappa) = j(a)$. Sólo queda probar que $k : \text{Ult} \rightarrow M$ es una inmersión elemental. Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula y tomemos $[f_1], \dots, [f_n] \in \text{Ult}$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi^{\text{Ult}}([f_1], \dots, [f_n]) &\leftrightarrow X = \{\alpha < \kappa \mid \phi^V(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))\} \in D \\ &\leftrightarrow \kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) \mid \phi^M(j(f_1)(\alpha), \dots, j(f_n)(\alpha))\} \\ &\leftrightarrow \phi^M(j(f_1)(\kappa), \dots, j(f_n)(\kappa)) \leftrightarrow \phi^M(k([f_1]), \dots, k([f_n])). \end{aligned}$$

■

Capítulo XII

Cardinales débilmente compactos

Se conocen fundamentalmente dos clases de técnicas para estudiar los cardinales medibles. Una es la de las ultrapotencias, introducida en el capítulo anterior; la otra se cataloga en lo que se conoce como “combinatoria infinita”. En general, se llaman argumentos combinatorios a los argumentos que, independientemente de su sofisticación, involucran esencialmente conceptos conjuntistas sencillos, como árboles, familias cuasidisjuntas, conjuntos estacionarios, etc., por oposición a los argumentos que emplean conceptos y resultados más profundos, como los de la teoría de modelos. Vamos a probar que los cardinales medibles satisfacen ciertas propiedades combinatorias de las que se deducen muchas consecuencias interesantes. En realidad conviene dar nombre a los cardinales que verifican estas propiedades, lo que nos lleva a varias clases de cardinales grandes, la más importante de las cuales es la de los cardinales débilmente compactos.

12.1 El cálculo de particiones

Las ideas básicas de este capítulo provienen de la llamada teoría de Ramsey. En su formulación más abstracta afirma que en muchos casos podemos garantizar que una muestra satisface ciertas peculiaridades sin más que exigir que sea lo suficientemente grande. Por ejemplo, para garantizar la “coincidencia” de encontrar dos personas que celebren su cumpleaños el mismo día, basta tomar una muestra de al menos 367 personas. Un ejemplo más sofisticado es el siguiente: en toda muestra de al menos 6 personas, siempre hay tres que se conocen dos a dos o bien tres que no se conocen dos a dos. Esto es un caso particular del teorema siguiente:

Teorema de Ramsey *Para cada natural m existe un número natural n de modo que todo grafo con al menos n vértices posee m vértices conectados dos a dos, o bien m vértices desconectados dos a dos.*

El mínimo n posible se conoce como el *número de Ramsey* de m . El número de Ramsey de 3 es 6, pero en general los números de Ramsey no son fáciles de calcular. Vamos a introducir una notación conveniente para formular este tipo de resultados.

Definición 12.1 Una *partición* de un conjunto X es una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X disjuntos dos a dos tales que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$.

Por conveniencia, y en contra de lo habitual, no exigimos que los conjuntos X_i sean no vacíos.

A cada partición $\{X_i\}_{i \in I}$ podemos asociarle una aplicación $F : X \rightarrow I$ dada por $F(x) = i \leftrightarrow x \in X_i$. Recíprocamente, cada aplicación $F : X \rightarrow I$ determina una partición $\{F^{-1}\{i\}\}_{i \in I}$, de modo que podemos identificar las particiones de X con las aplicaciones de dominio X .

Si A es un conjunto y n es un cardinal, llamaremos $[A]^n = \{x \subset A \mid |x| = n\}$. En el caso en que A sea un conjunto de ordinales y $n < \omega$ identificaremos $[A]^n$ con el conjunto $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n \mid \alpha_1 < \dots < \alpha_n\} \subset A^n$.

Aunque formalmente no necesitaremos este concepto, podemos definir un *grafo* con vértices en un conjunto A a un subconjunto F de $[A]^2$. Los elementos de F son las *aristas* del grafo. Dos vértices distintos están *conectados* por F si forman una arista. Equivalentemente, podemos definir un grafo como una partición $F : [A]^2 \rightarrow 2$, de modo que las aristas de F son los pares $\{a, b\}$ tales que $F(\{a, b\}) = 1$. Así, una partición $F : [A]^2 \rightarrow n$ puede verse como un *grafo coloreado*, es decir, un grafo con aristas de color 0, 1, 2, etc.

Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una partición de $[A]^n$, diremos que un subconjunto $H \subset A$ es *homogéneo* para la partición si existe un $i \in I$ tal que $[H]^n \subset X_i$. Si pensamos en la partición como una aplicación F , entonces H es homogéneo si F es constante en $[H]^n$.

En términos de grafos (cuando $n = 2$) un conjunto de vértices H es homogéneo para un grafo (coloreado) si todos sus puntos están conectados dos a dos o bien todos están desconectados dos a dos (resp. todos están conectados por aristas del mismo color).

Por último, si μ, κ, m y n son cardinales, llamaremos

$$\mu \longrightarrow (\kappa)_m^n$$

a la fórmula siguiente:

Para toda partición de $[\mu]^n$ en m partes existe un subconjunto homogéneo H de μ con cardinal κ .

La notación sugiere que μ elementos son suficientes para garantizar un conjunto homogéneo con los requisitos $(\kappa)_m^n$. Por ejemplo, en estos términos $6 \longrightarrow (3)_2^2$ (bastan 6 vértices para que un grafo tenga un subconjunto homogéneo de 3 vértices.)

Para evitar casos triviales podemos suponer $n \leq \mu$ (o si no $[\mu]^n = \emptyset$), $\kappa \leq \mu$ (pues en caso contrario no puede existir H) y $n \leq \kappa$ (o si no $[H]^n = \emptyset$). Así mismo podemos limitarnos al caso en que $m < \mu$:

Ejercicio: Probar que si $m \geq \mu$ entonces $\mu \rightarrow (\kappa)_m^n$ equivale a $n = \kappa < \aleph_0$. AYUDA: considerar la partición $\{\{x\}\}_{x \in [\mu]^n}$.

Si $m = 1$ la relación $\mu \rightarrow (\kappa)_m^n$ se cumple trivialmente, luego supondremos siempre que $m \geq 2$. De hecho, para $m = 2$ escribiremos simplemente $\mu \rightarrow (\kappa)^n$. En resumen, supondremos siempre que $n \leq \kappa \leq \mu$ y $2 \leq m < \mu$.

En estos términos, el teorema de Ramsey afirma que si $2 \leq \kappa < \omega$ existe un $\mu < \omega$ tal que $\mu \rightarrow (\kappa)^2$. No vamos a probar este teorema porque pertenece a la teoría de Ramsey finita, cuando nosotros estamos interesados en la teoría infinita, es decir, vamos a estudiar únicamente el caso en que μ y κ son cardinales infinitos. Por el contrario, el teorema siguiente muestra que el caso en que n es infinito es trivial:

Teorema 12.2 *Consideremos cardinales $2 \leq m < \mu$ y $\aleph_0 \leq n \leq \kappa \leq \mu$. Entonces $\mu \not\rightarrow (\kappa)_m^n$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos identificar $[\mu]^n$ con el conjunto de las funciones crecientes $f : n \rightarrow \mu$. Definimos en $[\mu]^n$ la relación de equivalencia dada por

$$f R g \leftrightarrow \{i \in n \mid f(i) \neq g(i)\} \text{ es finito.}$$

Sea $S \subset [\mu]^n$ un conjunto formado por un elemento de cada clase de equivalencia. Para cada $f \in [\mu]^n$ llamemos $r(f)$ al único elemento de S relacionado con f . Definimos $F : [\mu]^n \rightarrow m$ mediante

$$F(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{i \in n \mid f(i) \neq r(f)(i)\} \text{ tiene cardinal par,} \\ 1 & \text{si } \{i \in n \mid f(i) \neq r(f)(i)\} \text{ tiene cardinal impar.} \end{cases}$$

Si se cumpliera $\mu \rightarrow (\kappa)_m^n$ existiría $H \subset \mu$ homogéneo para F . Es claro que podemos construir $f \in [H]^n$ tal que $\bigwedge i \in n \bigvee h \in H f(i) < h < f(i+1)$. Digamos que el conjunto $\{i \in n \mid f(i) \neq r(f)(i)\}$ tiene cardinal par. Tomemos $i \in n$ fuera de este conjunto y $h \in H$ tal que $f(i) < h < f(i+1)$. Definimos $g \in [H]^n$ que coincida con f salvo en que $g(i) = h$. Entonces $r(g) = r(f)$, pero el conjunto $\{i \in n \mid g(i) \neq r(g)(i)\}$ tiene cardinal impar, luego $F(f) \neq F(g)$, lo cual contradice la homogeneidad de H . ■

El caso $n = 1$ no es tan obvio, pero también podemos descartarlo:

Ejercicio: Probar que si $\kappa \leq \mu$ y $2 \leq m < \mu$, entonces $\mu \rightarrow (\kappa)_m^1$ si y sólo si $\kappa < \mu$ o bien $\kappa = \mu \wedge m < \text{cf } \mu$.

Con esto, las restricciones que impondremos tácitamente en definitiva a las fórmulas $\mu \rightarrow (\kappa)_m^n$ son: $2 \leq m < \mu$ y $2 \leq n < \aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$.

Veamos un último teorema elemental:

Teorema 12.3 Si $\mu \leq \mu'$, $\kappa' \leq \kappa$, $m' \leq m$ y $n' \leq n$ y $\mu \rightarrow (\kappa)_m^n$, entonces también $\mu' \rightarrow (\kappa')_{m'}^{n'}$.

En otras palabras, las relaciones de partición se conservan si se aumenta el cardinal de la izquierda o se reduce cualquiera de los de la derecha.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{X_i\}_{i < m'}$ una partición de $[\mu']^{n'}$. Definimos

$$Y_i = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [\mu]^n \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_{n'}) \in X_i\}, \quad \text{para } i < m'$$

y sea $Y_i = \emptyset$ si $m' \leq i < m$. Es claro que $\{Y_i\}_{i < m'}$ es una partición de $[\mu]^n$. Por hipótesis existe un conjunto homogéneo $H \subset \mu$ de cardinal κ . Sea $H' \subset H$ un subconjunto de cardinal κ' (que sigue siendo homogéneo). Quitando a H' un número finito de elementos podemos exigir que no tenga máximo. Sea $i < m'$ tal que $[H']^n \subset Y_i$. Necesariamente $i < m'$.

Dado $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n'}) \in [H']^{n'}$, tomemos ordinales $\alpha_{n'} < \alpha_{n'+1} < \dots < \alpha_n$ en H' (existen porque H' no tiene máximo). Así $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [H']^n \subset Y_i$, luego $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n'}) \in X_i$. Así pues, $[H']^{n'} \subset X_i$, luego H' es homogéneo para la partición dada. ■

El primer resultado no trivial sobre particiones se conoce también como teorema de Ramsey (aunque no hay que confundirlo con el que hemos citado más arriba):

Teorema 12.4 (Teorema de Ramsey) Si $m, n < \omega$, entonces

$$\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_m^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre n . Para $n = 1$ es trivial. Supongamos $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_m^n$ y veamos $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_m^{n+1}$. Para ello consideramos una partición $F : [\omega]^{n+1} \rightarrow m$. Definimos $H_0 = \omega$, $a_0 = 0$ y $F_0 : [H_0 \setminus \{a_0\}]^n \rightarrow m$ dada por $F_0(x) = F(\{a_0\} \cup x)$. Por hipótesis de inducción existe un conjunto infinito $H_1 \subset H_0 \setminus \{a_0\}$ tal que F_0 es constante en $[H_1]^n$.

Supongamos definidos $a_0 < a_1 < \dots < a_j \in \omega$ y $H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_{j+1}$ infinitos de manera que $a_i \in H_i$ y las particiones $F_i : [H_i \setminus \{a_i\}]^n \rightarrow m$ dadas por $F_i(x) = F(\{a_i\} \cup x)$ sean constantes en sus respectivos conjuntos $[H_{i+1}]^n$. Entonces tomamos $a_{j+1} \in H_{j+1}$ mayor que a_j y aplicamos la hipótesis de inducción a la partición F_{j+1} , con lo que obtenemos un conjunto infinito $H_{j+2} \subset H_{j+1}$ homogéneo para F_{j+1} .

De este modo obtenemos un conjunto infinito $A = \{a_j \mid j \in \omega\}$. Dado $i \in \omega$, tenemos que $a_j \in H_i$ para todo $j > i$, luego F_i es constante en $[\{a_j \mid j > i\}]^n$. Sea $G(a_i) \in m$ el valor que toma F_i en dicho conjunto. Como G toma un número finito de valores, ha de existir $H \subset A$ infinito donde G sea constante igual a un cierto $k < m$. Así, si $x_1 < \dots < x_{n+1} \in H$ resulta que

$$F(\{x_1, \dots, x_{n+1}\}) = F_{x_1}(\{x_2, \dots, x_{n+1}\}) = G(x_1) = k.$$

Así pues, H es homogéneo para F . ■

Ante esto, podríamos conjeturar que el cálculo de particiones infinito es trivial, en el sentido de que se vaya a cumplir algo así como $\kappa \rightarrow (\kappa)^2$, para todo cardinal infinito κ . El teorema siguiente muestra que no es así:

Teorema 12.5 *Sea κ un cardinal infinito. Entonces $2^\kappa \not\rightarrow (\kappa^+)^2$.*

DEMOSTRACIÓN: Para probar este teorema conviene demostrar antes un resultado general: si $\mu \rightarrow (\kappa)^2$ entonces todo conjunto totalmente ordenado L de cardinal μ tiene una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ estrictamente creciente o decreciente.

En efecto, basta considerar una enumeración $\{y_\alpha\}_{\alpha < \mu}$ de L y la partición $F : [\mu]^2 \rightarrow 2$ dada por $F(\alpha, \beta) = 1 \leftrightarrow y_\alpha < y_\beta$ (donde se entiende que $\alpha < \beta$). Si $H \subset \mu$ es un subconjunto homogéneo de cardinal κ , tomando un subconjunto podemos suponer que tiene ordinal κ , digamos $H = \{\alpha_\beta\}_{\beta < \kappa}$, de modo que $\beta < \gamma \rightarrow \alpha_\beta < \alpha_\gamma$. Entonces la sucesión $x_\beta = y_{\alpha_\beta}$ es monótona creciente si F vale 1 sobre $[H]^2$ o monótona decreciente si vale 0.

Según esto, para probar el teorema basta ver que ${}^\kappa 2$ con el orden lexicográfico no admite κ^+ -sucesiones monótonas. El orden lexicográfico es el dado por

$$f < g \leftrightarrow f(\alpha) < g(\alpha), \text{ donde } \alpha = \min\{\beta < \kappa \mid f(\beta) \neq g(\beta)\}.$$

Supongamos que $\{f_\alpha\}_{\alpha < \kappa^+}$ es una sucesión monótona creciente (el caso decreciente es análogo). Sea $\gamma \leq \kappa$ el menor ordinal tal que el conjunto $\{f_\alpha|_\gamma \mid \alpha < \kappa^+\}$ tiene cardinal κ^+ . Eliminando de la sucesión original aquellas funciones que al restringirlas a γ coinciden con la restricción de funciones precedentes (y renumerando) podemos suponer que si $\alpha < \beta < \kappa^+$ entonces $f_\alpha|_\gamma \neq f_\beta|_\gamma$.

Para cada $\alpha < \kappa^+$, sea $\delta_\alpha < \gamma$ tal que

$$f_\alpha|_{\delta_\alpha} = f_{\alpha+1}|_{\delta_\alpha}, \quad f_\alpha(\delta_\alpha) = 0, \quad f_{\alpha+1}(\delta_\alpha) = 1.$$

Considerando la aplicación $\kappa^+ \rightarrow \kappa$ dada por $\alpha \mapsto \delta_\alpha$ concluimos que ha de existir un $\delta < \gamma$ tal que el conjunto $\{\alpha < \kappa^+ \mid \delta = \delta_\alpha\}$ tenga cardinal κ^+ . Ahora bien, si $\delta_\alpha = \delta_\beta = \delta$ y $f_\alpha|_\delta = f_\beta|_\delta$, entonces $f_\alpha < f_{\beta+1}$ y $f_\beta < f_{\alpha+1}$, luego $f_\alpha = f_\beta$. Por consiguiente, el conjunto $\{f_\alpha|_\delta \mid \alpha < \kappa^+\}$ tiene cardinal κ^+ , pero $\delta < \gamma$, lo que contradice la elección de γ . ■

En particular vemos que $\kappa^+ \not\rightarrow (\kappa^+)^2$ para todo cardinal infinito κ . No obstante, un refinamiento de la prueba del teorema de Ramsey 12.4 muestra que el teorema de Ramsey finito es válido también para cardinales infinitos, es decir, que dados cardinales κ , m y n tales que $2 \leq m$ y $2 \leq n < \aleph_0 \leq \kappa$, se cumple $\mu \rightarrow (\kappa)_m^n$ para todo μ suficientemente grande.

Para enunciar adecuadamente este resultado necesitamos la exponencial iterada:

$$\exp_0(\kappa) = \kappa \wedge \bigwedge n \in \omega \quad \exp_{n+1}(\kappa) = 2^{\exp_n(\kappa)}.$$

Teorema 12.6 (Erdős-Rado) *Si κ es un cardinal infinito y $n < \omega$, entonces*

$$\exp_n(\kappa)^+ \rightarrow (\kappa^+)_\kappa^{n+1}.$$

En particular $\beth_n^+ \rightarrow (\aleph_1)_{\aleph_0}^{n+1}$, y también $(2^\kappa)^+ \rightarrow (\kappa^+)_\kappa^2$.

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre n . Para $n = 0$ es uno de los casos triviales que ya hemos discutido. Supongamos $\exp_n(\kappa)^+ \longrightarrow (\kappa^+)_\kappa^{n+1}$. Sea $\mu = \exp_{n+1}(\kappa)^+$ y consideremos una partición $f : [\mu]^{n+2} \longrightarrow \kappa$. Para cada $a \in \mu$ sea $F_a : [\mu \setminus \{a\}]^{n+1} \longrightarrow \kappa$ dada por $F_a(x) = F(x \cup \{a\})$.

Veamos que existe un conjunto $A \subset \mu$ tal que $|A| = \exp_{n+1}(\kappa)$ y para todo $C \subset A$ con $|C| \leq \exp_n(\kappa)$ y todo $u \in \mu \setminus C$ existe un $v \in A \setminus C$ tal que F_v y F_u coinciden en $[C]^{n+1}$.

Definimos $A_0 = \exp_{n+1}(\kappa)$, $A_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} A_\delta$ y, dado $A_\alpha \subset \mu$ con cardinal $\exp_{n+1}(\kappa)$, construimos $A_{\alpha+1}$ tal que $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$, $|A_{\alpha+1}| = \exp_{n+1}(\kappa)$ y para todo subconjunto $C \subset A_\alpha$ con $|C| \leq \exp_n(\kappa)$ y todo $u \in \mu \setminus C$, existe un $v \in A_{\alpha+1} \setminus C$ tal que F_v y F_u coinciden en $[C]^{n+1}$.

Existe tal conjunto porque hay $\exp_{n+1}(\kappa)^{\exp_n(\kappa)} = \exp_{n+1}(\kappa)$ conjuntos C posibles y para cada uno de ellos hay a lo sumo $\kappa^{\exp_n(\kappa)} = 2^{\exp_n(\kappa)} = \exp_{n+1}(\kappa)$ funciones $F_u|_{[C]^{n+1}}$ posibles. Por lo tanto basta añadir $\exp_{n+1}(\kappa)$ elementos a A_α para recorrerlas todas.

El conjunto $A = \bigcup_{\alpha < \exp_{n+1}(\kappa)} A_\alpha$ cumple lo pedido. Notemos que, por el teorema de König, cf $\exp_{n+1}(\kappa) > \exp_n(\kappa)$, luego todo $C \subset A$ con $|C| \leq \exp_n(\kappa)$ cumple $C \subset A_\alpha$ para cierto $\alpha < \exp_{n+1}(\kappa)$.

Dado $a \in \mu \setminus A$, definimos inductivamente $X = \{x_\alpha \mid \alpha < \exp_n(\kappa)^+\} \subset A$ de manera que para todo $\alpha < \exp_n(\kappa)^+$, la función F_{x_α} coincide con F_a en $[\{x_\beta \mid \beta < \alpha\}]^{n+1}$. Sea $G : [X]^{n+1} \longrightarrow \kappa$ dada por $G(x) = F_a(x)$. Por hipótesis de inducción existe $H \subset X$ tal que $|H| = \kappa^+$ y G es constante en $[H]^{n+1}$.

Si $\alpha_1 < \dots < \alpha_{n+2} < \exp_n(\kappa)^+$, entonces

$$\begin{aligned} F(\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n+2}}\}) &= F_{x_{\alpha_{n+2}}}(\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n+1}}\}) \\ &= F_a(\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n+1}}\}) = G(\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n+1}}\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto F es constante en $[H]^{n+2}$. Las otras afirmaciones del enunciado son los casos particulares $\kappa = \aleph_0$ y $n = 1$. ■

En particular, si $m < \kappa$ se cumple $\exp_n(\kappa)^+ \longrightarrow (\kappa)_m^{n+1}$, luego ciertamente podemos conseguir conjuntos homogéneos de cualquier cardinal prefijado si el conjunto que partimos tiene suficientes elementos.

El teorema 12.5 muestra que la relación $(2^\kappa)^+ \longrightarrow (\kappa^+)_\kappa^2$ que proporciona el teorema de Erdős-Rado tiene a la izquierda el menor cardinal posible. Puede probarse que esto es cierto en general, es decir, que para un cardinal sucesor κ^+ , el menor cardinal μ que cumple $\mu \longrightarrow (\kappa^+)_m^n$ es precisamente $\mu = \exp_n(\kappa)^+$. Vemos así que el análogo infinito a los números de Ramsey es fácil de calcular para cardinales sucesores. No sucede lo mismo con los cardinales, como se verá en la sección siguiente. Acabamos ésta con una aplicación del teorema de Erdős-Rado (comparar con el teorema 9.32):

Teorema 12.7 *Si κ es un cardinal infinito y \mathbb{P} y \mathbb{Q} son dos c.p.o.s con la condición de cadena numerable, entonces $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ cumple la condición de cadena $(2^{\aleph_0})^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu = (2^{\aleph_0})^+$. Si $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha < \mu}$ fuera una anticadena en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, sea $F : [\mu]^2 \rightarrow 2$ dada por

$$F(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_\alpha \perp x_\beta, \\ 1 & \text{en caso contrario (en part. } y_\alpha \perp y_\beta). \end{cases}$$

Por el teorema de Erdős-Rado $\mu \rightarrow (\aleph_1)^2$, luego F tiene un conjunto homogéneo $H \subset \mu$ tal que $|H| = \aleph_1$. Entonces, si F es constante igual a 0 en $[H]^2$ tenemos que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in H}$ es una anticadena no numerable en \mathbb{P} , mientras que si F es constante igual a 1 entonces $\{y_\alpha\}_{\alpha \in H}$ es una anticadena no numerable en \mathbb{Q} . ■

12.2 Cardinales débilmente compactos

Hemos visto que la “conjetura” $\kappa \rightarrow (\kappa)^2$ es falsa en general. Más concretamente, sabemos que es falsa para todo cardinal sucesor, mientras que el teorema de Ramsey afirma que es cierta para \aleph_0 . Es natural preguntarse si la cumple algún otro cardinal límite, pero sucede que esto nos lleva a cardinales grandes:

Definición 12.8 Un cardinal no numerable κ es *débilmente compacto* si cumple la relación $\kappa \rightarrow (\kappa)^2$.

El nombre de “débilmente compacto” proviene de la teoría de modelos, y lo explicaremos dentro de poco. Los cardinales débilmente compactos son grandes. El teorema siguiente es sólo una primera muestra:

Teorema 12.9 *Todo cardinal débilmente compacto es fuertemente inaccesible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un cardinal débilmente compacto. Del teorema 12.5 se sigue que κ es un cardinal límite. Más aún, ha de ser un límite fuerte, pues si existe $\mu < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\mu$, entonces $2^\mu \not\rightarrow (\mu^+)^2$, luego también $\kappa \not\rightarrow (\kappa)^2$.

Falta probar que κ es regular. En caso contrario sea $\mu = \text{cf } \kappa < \kappa$. Sea $\kappa = \bigcup_{\alpha < \mu} A_\alpha$ una partición de κ en conjuntos disjuntos de cardinal menor que κ .

Definimos $F : [\kappa]^2 \rightarrow 2$ dada por $F(\{\alpha, \beta\}) = 0 \leftrightarrow \forall \gamma < \mu \{\alpha, \beta\} \subset A_\gamma$.

Por hipótesis existe un conjunto $H \subset \kappa$ homogéneo para F de cardinal κ . Ahora bien, si F toma el valor 0 sobre $[H]^2$ entonces algún A_γ tiene cardinal κ , mientras que si F toma el valor 1 ha de ser $\kappa = \mu$. ■

A continuación probamos una caracterización muy útil de la compacidad débil en términos de árboles. En primer lugar definimos un κ -árbol de Aronszajn como un κ -árbol sin caminos. De este modo, los árboles de Aronszajn según la definición 8.8 son ahora \aleph_1 -árboles de Aronszajn.

Ejercicio: Probar que si κ es un cardinal singular entonces existe un κ -árbol de Aronszajn.

La prueba del teorema 8.10 admite la siguiente generalización:

Ejercicio: Probar que si $\kappa = \mu^+$, donde μ es regular y $2^{<\mu} = \mu$, entonces existe un κ -árbol de Aronszajn (en particular, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ existe un \aleph_2 -árbol de Aronszajn). AYUDA: en la prueba de 8.10, cambiar ω por μ y en la construcción de los s_α exigir que su rango no sea estacionario en μ .

De este modo, bajo la HCG existen κ -árboles de Aronszajn para todo cardinal $\kappa > \aleph_0$ salvo a lo sumo si κ es fuertemente inaccesible o el sucesor de un cardinal singular. Puede probarse, aunque es muy complicado, que si suponemos $V = L$ también los hay en este último caso. (Por el contrario, si $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ es consistente tanto que haya como que no haya \aleph_2 -árboles de Aronszajn). Finalmente, la existencia de κ árboles de Aronszajn cuando κ es fuertemente inaccesible no depende de la función del continuo o del axioma de constructibilidad, sino de la compacidad débil:

Teorema 12.10 *Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- a) κ es débilmente compacto.
- b) No existen κ -árboles de Aronszajn.
- c) κ cumple $\kappa \rightarrow (\kappa)_m^n$ para todo $n \in \omega$ y todo cardinal $m < \kappa$.

DEMOSTRACIÓN: a) \rightarrow b). Supongamos que κ es débilmente compacto y sea (A, \leq_A) un κ -árbol. Como A es la unión de κ niveles de cardinal menor que κ , tenemos que $|A| = \kappa$, luego podemos suponer que $A = \kappa$.

Definimos sobre A el orden total R dado por $\alpha R \beta$ si y sólo si $\alpha \leq_A \beta$ o bien $\alpha \perp \beta$ y, si δ es el mínimo nivel en que los predecesores de α y β (digamos α' y β') son distintos, se cumple $\alpha' < \beta'$ (como ordinales).

Sea $F : [\kappa]^2 \rightarrow 2$ dada por $F(\alpha, \beta) = 1$ si y sólo si $\alpha R \beta$ (donde se entiende que $\alpha < \beta$). Por la compacidad débil existe un conjunto $H \subset \kappa$ de cardinal κ homogéneo para F .

Sea C el conjunto de todos los $\alpha < \kappa$ tales que el conjunto $\{\beta \in H \mid \alpha <_A \beta\}$ tiene cardinal κ . Para cada $\delta < \kappa$ tenemos que

$$H = \bigcup_{\alpha \in \text{Niv}_\delta A} \{\beta \in H \mid \beta \leq_A \alpha\} \cup \bigcup_{\alpha \in \text{Niv}_\delta A} \{\beta \in H \mid \alpha <_A \beta\}.$$

Como κ es regular, la primera unión tiene cardinal menor que κ , luego la segunda tiene que tener cardinal κ y, más concretamente, uno de sus conjuntos ha de tener cardinal κ . Esto significa que C corta a todos los niveles de A . Si probamos que C está totalmente ordenado por $<_A$ concluiremos que C es un camino en A , luego A no será un κ -árbol de Aronszajn.

Supongamos que $\alpha, \beta \in C$ no son comparables por $<_A$. Digamos, por ejemplo, que $\alpha R \beta$. Como ambos tienen κ sucesores en H , existen $\gamma < \delta < \epsilon$ en H tales que $\alpha <_A \gamma$, $\beta <_A \delta$, $\alpha <_A \epsilon$. Por definición de R tenemos que $\gamma R \delta$ y

$\epsilon R \delta$ (pues el primer nivel en que difieren los anteriores de γ y δ es el mismo en que difieren los anteriores de α y β). Por lo tanto $F(\gamma, \delta) = 1$ y $F(\delta, \epsilon) = 0$, en contra de la homogeneidad de H .

b) \rightarrow c). Veamos $\kappa \rightarrow (\kappa)_m^n$ por inducción sobre n . Para $n = 1$ la propiedad se sigue de la regularidad de κ . Supongamos $\kappa \rightarrow (\kappa)_m^n$ y consideremos una partición $F : [\kappa]^{n+1} \rightarrow m$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $S_\alpha = \{s \mid s : [\alpha]^n \rightarrow m\}$ y sea $S = \bigcup_{\alpha < \kappa} S_\alpha$. Claramente S es un árbol con el orden dado por la inclusión.

Además el nivel α -ésimo es S_α , de cardinal $m^{|\alpha|} < \kappa$, luego S es un κ -árbol.

Para cada $s \in S$ definimos $h(s) \in \kappa$ y $A(s) \subset \kappa$ de modo que:

- a) $A(\emptyset) = \kappa$,
- b) $h(s) = \min A(s)$ (salvo si $A(s) = \emptyset$, en cuyo caso $h(s) = 0$),
- c) si $s \in S_\lambda$, entonces $A(s) = \bigcap_{\delta < \lambda} A(s|_{[\delta]^n})$,
- d) Si $s \in S_\alpha$, $t \in S_{\alpha+1}$, $s \leq t$, entonces

$$A(t) = A(s) \cap \{\gamma > h(s) \mid \bigwedge B \in [\alpha + 1]^n t(B) = F(h(B) \cup \{\gamma\})\},$$

donde $h(B)$ significa $\{h(s|_{[\beta_1]^n}), \dots, h(s|_{[\beta_n]^n})\}$, con $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Como $A(s)$ es decreciente, es claro que $T = \{s \in S \mid A(s) \neq \emptyset\}$ es un subárbol de S . Veamos que T tiene altura κ , y así será un κ -árbol. Sea $\alpha < \kappa$. Podemos tomar $\gamma < \kappa$ mayor que todos los elementos de $h[S_\beta]$ para $\beta \leq \alpha$. Sea $s_0 = \emptyset \in T$. Obviamente $\gamma \in A(s_0)$. Si $s_\beta \in T$ tiene altura $\beta < \alpha$ y $\gamma \in A(s_\beta)$, podemos extender s_β a $s_{\beta+1} \in S_{\beta+1}$ de acuerdo con la condición d) para que $\gamma \in A(s_{\beta+1})$ y por lo tanto $s_{\beta+1} \in T$. Definidos $\{s_\delta\}_{\delta < \lambda}$ en T tales que cada s_δ tenga altura δ y $\gamma \in A(s_\delta)$ (y que cada uno extienda a los anteriores), es claro que su unión s_λ cumple $\gamma \in A(s_\lambda)$, luego $s_\lambda \in T$ y tiene altura λ . De este modo llegamos a un $s_\alpha \in T$ de altura α .

Por hipótesis T tiene un camino C , la unión de cuyos elementos es una aplicación $f : [\kappa]^n \rightarrow m$ tal que $\bigwedge \alpha < \kappa f|_{[\alpha]^n} \in T$, luego

$$\bigwedge \alpha < \kappa h(f|_{[\alpha]^n}) \in A(f|_{[\alpha]^n}).$$

Sea $\alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1} < \kappa$. Sea $B = \{\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_n + 1\} \in [\alpha_{n+1} + 1]^n$. Como $h(f|_{[\alpha_{n+1}+1]^n}) \in A(f|_{[\alpha_{n+1}+1]^n})$, por la condición d) se cumple que

$$f(\{\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_n + 1\}) = F(\{h(f|_{[\alpha_1+1]^n}), \dots, h(f|_{[\alpha_n+1]^n}), h(f|_{[\alpha_{n+1}+1]^n})\}).$$

En otros términos, si llamamos $X = \{h(f|_{[\alpha+1]^n}) \mid \alpha < \kappa\}$, acabamos de probar que si tomamos $\alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1}$ en X , entonces $F(\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\})$ no depende de α_{n+1} , luego podemos definir una partición $G : [X]^n \rightarrow m$ mediante $G(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = F(\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\})$, donde α_{n+1} es cualquier elemento de X mayor que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Por hipótesis de inducción G tiene un conjunto homogéneo H de cardinal κ (notemos que $|X| = \kappa$), el cual es obviamente homogéneo para F .

- c) \rightarrow a) es trivial. ■

Por lo tanto, los cardinales débilmente compactos son los cardinales no numerables que cumplen íntegramente el teorema de Ramsey, y no sólo el caso particular que hemos tomado como definición.

Como primera aplicación de la caracterización por árboles probamos que los cardinales medibles son débilmente compactos.

Teorema 12.11 *Sea κ un cardinal medible y sea D una medida normal en κ . Entonces κ es débilmente compacto y $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es débilmente compacto}\} \in D$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que no hay κ -árboles de Aronszajn. Sea (A, \leq_A) un κ -árbol. Podemos suponer que $A = \kappa$. Sea

$$C = \{\alpha < \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid \alpha \leq_A \beta\} \in D\}.$$

Claramente C es una cadena en A , pues la intersección de elementos de D es no vacía. Además, si $\gamma < \kappa$

$$\kappa = \{\beta < \kappa \mid \text{alt}_A \beta < \gamma\} \cup \bigcup_{\alpha \in \text{Niv}_\gamma(A)} \{\beta < \kappa \mid \alpha \leq_A \beta\},$$

luego algún $\alpha \in \text{Niv}_\gamma(A)$ ha de estar en C , pues de lo contrario κ sería nulo. Esto prueba que C es un camino en A , luego A no es un κ -árbol de Aronszajn y κ es débilmente compacto.

Sea $j : V \rightarrow \text{Ult}$ la inmersión natural. Se cumple que κ es débilmente compacto^{Ult}, pues todo κ -árbol^{Ult} es un κ -árbol, luego tiene un camino, el cual estará en Ult porque $\text{Ult}^\kappa \subset \text{Ult}$ (teorema 11.23). Si d es la identidad en κ , tenemos que $[d]$ es débilmente compacto^{Ult} (por 11.26). Por el teorema fundamental 11.18 concluimos que

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es débilmente compacto}\} \in D.$$

■

En particular vemos que si existen cardinales débilmente compactos, el menor de ellos no puede ser medible, luego la compacidad débil no implica la medibilidad.

Los resultados siguientes explican el nombre de “cardinales débilmente compactos”. Para ello hemos de definir fórmulas de longitud infinita en un lenguaje formal.

Definición 12.12 Sea \mathcal{L} un lenguaje formal (en el sentido de la definición 1.1) y sean κ, μ dos cardinales infinitos. Definimos como sigue las fórmulas de \mathcal{L} de tipo (κ, μ) :

$$\begin{aligned} F(0) &= \{Rt_0 \cdots t_{n-1} \mid 0 < n < \omega \wedge R \in \text{Rel}_n \mathcal{L} \wedge \{t_i\}_{i < n} \in (\text{Term } \mathcal{L})^n\}, \\ F(\alpha + 1) &= F(\alpha) \cup \{(\neg, \phi) \mid \phi \in F(\alpha)\} \cup \{(\phi, \rightarrow, \psi) \mid \phi, \psi \in F(\alpha)\} \\ &\quad \cup \{(\bigwedge, \{\phi_\delta\}_{\delta < \beta}) \mid \beta < \kappa \wedge \{\phi_\delta\}_{\delta < \beta} \in F(\alpha)^\beta\} \\ &\quad \cup \{(\bigwedge, \{x_\delta\}_{\delta < \beta}, \phi) \mid \beta < \mu \wedge \{x_\delta\}_{\delta < \beta} \in (\text{Var } \mathcal{L})^\beta \wedge \phi \in F(\alpha)\}, \\ F(\lambda) &= \bigcup_{\delta < \lambda} F(\delta), \end{aligned}$$

$$\text{Form}_{\kappa\mu}(\mathcal{L}) = \bigcup_{\alpha < \kappa^+ \cup \mu^+} F(\alpha).$$

En la práctica usaremos la siguiente notación:

Escribiremos	$\neg\phi$	en lugar de	$(\neg, \phi),$
”	$\phi \rightarrow \psi$	”	$(\phi, \rightarrow, \psi),$
”	$\bigwedge_{\delta < \beta} \phi_\delta$	”	$(\bigwedge, \{\phi_\delta\}_{\delta < \beta}),$
”	$\bigvee_{\delta < \beta} \phi_\delta$	”	$\neg \bigwedge_{\delta < \beta} \neg\phi_\delta,$
”	$\bigwedge_{\delta < \beta} x_\delta \phi$	”	$(\bigwedge, \{x_\delta\}_{\delta < \beta}, \phi),$
”	$\bigvee_{\delta < \beta} x_\delta \phi$	”	$\neg \bigvee_{\delta < \beta} x_\delta \neg\phi,$

y así mismo usaremos las abreviaturas habituales que definen las fórmulas $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ y $\phi \leftrightarrow \psi$.

En definitiva, las fórmulas de tipo (κ, μ) de \mathcal{L} son formalmente como las fórmulas usuales salvo por que admitimos conjunciones (y, por consiguiente, disyunciones) infinitas sobre menos de κ fórmulas y cuantificaciones infinitas sobre menos de μ variables. Notemos que técnicamente estamos usando el mismo signo como conjuntor infinito y como cuantificador infinito, pero la estructura de cada fórmula determina cuándo hay que considerarlo como conjuntor y cuándo como cuantificador.

De la definición se sigue que toda fórmula de tipo (κ, μ) es elemental (o sea, un relator y términos) o bien es una negación, o una implicación, o una conjunción o una generalización.

Los conceptos de “variable libre”, “variable ligada”, sentencia, etc. se definen de forma obvia para fórmulas de tipo (κ, μ) . Por razones técnicas no hemos definido las fórmulas como sucesiones de signos, sino como pares o ternas, por lo que no tiene sentido hablar de la longitud de una fórmula (podría definirse, en cualquier caso, pero no lo vamos a necesitar). No obstante, la inducción o recursión sobre la longitud de una fórmula se sustituye por inducción o recursión sobre el rango, y el resultado es formalmente el mismo.

Por ejemplo, si M es un modelo de \mathcal{L} , $v : \text{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M$ y ϕ es una fórmula de tipo (κ, μ) , podemos definir $M \models \phi[v]$ de forma natural. Las únicas condiciones que difieren respecto a la definición usual (ver 1.2) son:

$$\begin{aligned} M \models \bigwedge_{\delta < \beta} \phi_\delta[v] &\leftrightarrow \bigwedge \delta < \beta M \models \phi_\delta[v], \\ M \models \bigwedge_{\delta < \beta} x_\delta \phi[v] &\leftrightarrow \text{para toda } w : \text{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M \text{ que coincida con } v \text{ sobre} \\ &\text{las variables de } \mathcal{L} \text{ distintas de las } x_\delta \text{ se cumple} \\ &M \models \phi[w]. \end{aligned}$$

A su vez, de aquí se deducen propiedades análogas para las disyunciones y las particularizaciones infinitas. Concretamente:

$$M \models \bigvee_{\delta < \beta} \phi_\delta[v] \leftrightarrow \bigvee_{\delta < \beta} M \models \phi_\delta[v],$$

$$M \models \bigvee_{\delta < \beta} x_\delta \phi[v] \leftrightarrow \text{existe } w : \text{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M \text{ que coincide con } v \text{ sobre las variables de } \mathcal{L} \text{ distintas de las } x_\delta \text{ y } M \models \phi[w].$$

Podemos identificar las fórmulas usuales (finitas) de \mathcal{L} con las fórmulas de tipo (\aleph_0, \aleph_0) . No hay una biyección natural entre ellas, pero a cualquier fórmula finita le podemos asociar de forma natural una fórmula de tipo (\aleph_0, \aleph_0) con el mismo significado y viceversa. La correspondencia no es biyectiva porque, por ejemplo, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ y $\bigwedge_{\delta < 2} \alpha_\delta$ son dos fórmulas de tipo (\aleph_0, \aleph_0) que se corresponden con la misma fórmula finita.

Admitiremos expresiones de la forma $\bigwedge_{i \in I} \phi_i$, con $|I| < \kappa$, aunque en la definición hemos exigido que las conjunciones estén subindicadas con ordinales. Para ello identificaremos esta fórmula con la construida a partir de una biyección $i : |I| \longrightarrow I$, es decir, con $\bigwedge_{\delta < |I|} \phi_{i_\delta}$. Esta fórmula depende de la biyección escogida, pero su interpretación en un modelo es la misma en cualquier caso. (En la definición no podíamos admitir conjuntos de índices arbitrarios porque entonces la clase de las fórmulas no sería un conjunto). Similarmente admitiremos generalizaciones con conjuntos de índices arbitrarios (de cardinal menor que μ).

En la práctica es más cómodo hablar de lenguajes de tipo (κ, μ) que de fórmulas de tipo (κ, μ) . Cuando digamos que \mathcal{L} es un lenguaje formal de tipo (κ, μ) querremos decir que es un lenguaje formal en el sentido usual, pero que al hablar de fórmulas de \mathcal{L} habrá que entender que son fórmulas de tipo (κ, μ) .

Recordemos que el teorema de compacidad 11.12 (para la lógica usual, finita) afirma que si Σ es un conjunto de sentencias tal que todo subconjunto finito tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo.

Diremos que un lenguaje \mathcal{L} de tipo (κ, μ) cumple el *teorema de compacidad (débil)* si para todo conjunto de sentencias Σ (con $|\Sigma| \leq \kappa$) tal que todo $S \subset \Sigma$ con $|S| < \kappa$ tiene un modelo, se cumple que Σ tiene un modelo.

A pesar de los términos que estamos empleando, debemos tener presente que el “teorema de compacidad (débil)” es una propiedad que puede satisfacer o no un lenguaje formal, es decir, no es realmente un teorema.

Teorema 12.13 *Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- a) κ es débilmente compacto.
- b) Todo lenguaje formal de tipo (κ, κ) cumple el teorema de compacidad débil.
- c) Todo lenguaje formal de tipo (κ, \aleph_0) cumple el teorema de compacidad débil.

DEMOSTRACIÓN: a) \rightarrow b). Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje \mathcal{L} de tipo (κ, κ) tal que $|\Sigma| \leq \kappa$ y todo $S \subset \Sigma$ con $|S| < \kappa$ tiene un modelo. Podemos suponer que $|\mathcal{L}| \leq \kappa$, pues sólo importan los signos que de hecho aparecen en las sentencias de Σ . Si encontramos un modelo de Σ para el lenguaje formado por dichos signos, los demás signos de \mathcal{L} pueden interpretarse arbitrariamente.

Sea \mathcal{L}^1 el lenguaje formal que resulta de añadir a \mathcal{L} una sucesión de constantes $\{c_\alpha^\phi\}_{\alpha < \beta}$ para cada fórmula ϕ de \mathcal{L} con variables libres $\{x_\alpha\}_{\alpha < \beta}$. Con estas nuevas constantes se pueden construir nuevas fórmulas de \mathcal{L}^1 , lo que nos permite definir del mismo modo un lenguaje \mathcal{L}^2 , y así sucesivamente. Llamamos \mathcal{L}^∞ al lenguaje formado por todos los signos de todos los lenguajes \mathcal{L}^n , con $n < \omega$. De este modo, cada fórmula ϕ de \mathcal{L}^∞ tiene asociada una sucesión de constantes $\{c_\alpha^\phi\}_{\alpha < \beta}$ en correspondencia con sus variables libres y que no aparecen en ϕ .

Llamaremos $\tilde{\phi}$ a la sentencia que resulta de sustituir cada variable libre de ϕ por su constante asociada. Por otra parte, llamaremos ϕ' a la sentencia

$$\bigvee_{\delta < \beta} x_\delta \phi \rightarrow \tilde{\phi}.$$

Es inmediato que $|\mathcal{L}^\infty| \leq \kappa$ y como κ es fuertemente inaccesible se cumple también que $|\text{Form}(\mathcal{L}^\infty)| \leq \kappa$. Llamemos $\Sigma' = \Sigma \cup \{\phi' \mid \phi \in \text{Form}(\mathcal{L}^\infty)\}$. Si $S \subset \Sigma'$ cumple $|S| < \kappa$, entonces S tiene un modelo, pues un modelo de $S \cap \Sigma$ para \mathcal{L} se extiende a un modelo de S sin más que interpretar adecuadamente las constantes añadidas.

Sea $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ una enumeración de las sentencias de \mathcal{L}^∞ . Sea A el conjunto formado por todas las aplicaciones $s : \gamma \rightarrow 2$ tales que $\gamma < \kappa$ y existe un modelo M de $\Sigma' \cap \{\sigma_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ de modo que

$$\bigwedge \alpha < \gamma (s(\alpha) = 1 \leftrightarrow M \models \sigma_\alpha). \quad (12.1)$$

Claramente A es un árbol con la inclusión. La altura de un elemento de A es su dominio, y por la propiedad de Σ' resulta que A tiene altura κ . Al ser κ fuertemente inaccesible, los niveles tienen cardinal menor que κ , luego A es un κ -árbol.

Como estamos suponiendo que κ es débilmente compacto, A tiene un camino, cuyos elementos determinan una aplicación $s : \kappa \rightarrow 2$ con la propiedad de que $\bigwedge \gamma < \kappa s|_\gamma \in A$.

Sea $\Delta = \{\sigma_\alpha \mid \alpha < \kappa \wedge s(\alpha) = 1\}$. Por construcción $\Sigma' \subset \Delta$, luego basta encontrar un modelo para Δ .

Sea U el conjunto de todos los designadores de \mathcal{L}^∞ . Definimos en U la relación dada por $t_1 R t_2$ si y sólo si $(t_1 = t_2) \in \Delta$.

Veamos que R es una relación de equivalencia. Probaremos la simetría, pues la reflexividad y la transitividad se demuestran análogamente.

Dados $t_1, t_2 \in U$, sea $\gamma < \kappa$ suficientemente grande como para que las sentencias $t_1 = t_2$ y $t_2 = t_1$ estén en $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$. Supongamos que $t_1 R t_2$, es decir, que $(t_1 = t_2) \in \Delta$. Como $s|_\gamma \in A$, existe un modelo M que cumple (12.1). Por definición de Δ tenemos que $M \models t_1 = t_2$, luego $M \models t_2 = t_1$, luego $(t_2 = t_1) \in \Delta$, es decir, $t_2 R t_1$.

Sea N el modelo de \mathcal{L}^∞ cuyo universo es el cociente U/R y donde los signos de \mathcal{L}^∞ se interpretan como sigue:

$$N(c) = [c], \text{ para toda constante } c \text{ de } \mathcal{L}^\infty,$$

$$N(f)([t_1], \dots, [t_n]) = [ft_1 \cdots t_n], \text{ para todo funtor } n\text{-ádico } f \text{ de } \mathcal{L}^\infty,$$

$$N(R)([t_1], \dots, [t_n]) \leftrightarrow Rt_1 \cdots t_n \in \Delta, \text{ para todo relator } n\text{-ádico } R \text{ de } \mathcal{L}^\infty.$$

Veamos que N está bien definido. Por ejemplo, probemos que las interpretaciones de los funtores son funciones bien definidas (el caso de los relatores es análogo).

Sea f un funtor n -ádico de \mathcal{L}^∞ y sean $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n \in U$ tales que $[t_i] = [t'_i]$ para $i = 1, \dots, n$. Sea $\gamma < \kappa$ suficientemente grande como para que las sentencias $t_i = t'_i$ y $ft_1 \cdots t_n = ft'_1 \cdots t'_n$ estén en $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$.

Como $s|_\gamma \in A$, existe un modelo M de \mathcal{L}^∞ que cumple (12.1). Por definición de Δ tenemos que $M \models t_i = t'_i$, para $i = 1, \dots, n$, luego también se cumple que $M \models ft_1 \cdots t_n = ft'_1 \cdots t'_n$, con lo que esta sentencia está en Δ y por consiguiente $[ft_1 \cdots t_n] = [ft'_1 \cdots t'_n]$.

Para que N esté bien definido también hemos de comprobar que la interpretación del igualador es la igualdad, pero esto es inmediato.

Una simple inducción sobre la longitud de t (los términos son sucesiones finitas de signos, y tienen definida su longitud) prueba que si t es un designador de \mathcal{L}^∞ entonces $N(t) = [t]$. Ahora basta probar que para toda sentencia σ de \mathcal{L}^∞ se cumple

$$N \models \sigma \leftrightarrow \sigma \in \Delta.$$

Lo probamos por inducción sobre el mínimo α tal que $\sigma \in F(\alpha)$ en la definición 12.12. Para las sentencias de la forma $Rt_1 \cdots t_n$ es inmediato, por la definición de $N(R)$.

Supongámoslo para σ y veámoslo para $\neg\sigma$. Sea $\gamma < \kappa$ suficientemente grande como para que σ y $\neg\sigma$ estén en $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$. Sea M un modelo de \mathcal{L}^∞ que cumpla (12.1). Entonces

$$N \models \neg\sigma \leftrightarrow \neg N \models \sigma \leftrightarrow \sigma \notin \Delta \leftrightarrow \neg M \models \sigma \leftrightarrow M \models \neg\sigma \leftrightarrow \neg\sigma \in \Delta.$$

Supongamos ahora que $\sigma = \bigwedge_{\delta < \beta} \phi_\delta$. Sea $\gamma < \kappa$ suficientemente grande como para que σ y todas las sentencias ϕ_δ estén en $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$. Sea M un modelo de \mathcal{L}^∞ que cumpla (12.1). Así, por la hipótesis de inducción para las ϕ_δ ,

$$N \models \sigma \leftrightarrow \bigwedge \delta < \beta N \models \phi_\delta \leftrightarrow \bigwedge \delta < \beta \phi_\delta \in \Delta$$

$$\leftrightarrow \bigwedge \beta < \delta M \models \phi_\delta \leftrightarrow M \models \sigma \leftrightarrow \sigma \in \Delta.$$

Supongamos ahora que $\sigma = \bigwedge_{\delta < \beta} x_\delta \phi$. Si $\neg N \models \sigma$, teniendo en cuenta quién es el universo de N , esto significa que existen designadores de \mathcal{L}^∞ tales que $\neg N \models \phi^*$, donde ϕ^* es la sentencia que resulta de sustituir las variables x_δ en ϕ

por tales designadores. La sentencia ϕ^* se construye en los mismos pasos que ϕ , luego en menos pasos que σ , luego podemos aplicarle la hipótesis de inducción y concluir que $\phi^* \notin \Delta$.

Sea $\gamma < \kappa$ suficientemente grande como para que las sentencias ϕ^* y σ estén en $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$. Sea M un modelo de \mathcal{L}^∞ que cumpla (12.1). Entonces $\neg M \models \phi^*$, luego $\neg M \models \sigma$, luego $\sigma \notin \Delta$.

Supongamos ahora $\sigma \notin \Delta$ y sea $\gamma < \kappa$ suficientemente grande como para que las sentencias σ , $\tilde{\phi}$ y $\phi' = \bigvee_{\delta < \beta} x_\delta \phi \rightarrow \tilde{\phi}$ estén en $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$. Sea M un modelo de \mathcal{L}^∞ que cumpla (12.1). Entonces $\neg M \models \sigma$, luego $M \models \bigvee_{\delta < \beta} x_\delta \phi$.

Por otra parte, como $\phi' \in \Sigma' \cap \{\sigma_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$, tenemos que $M \models \phi'$, de donde llegamos a que $M \models \tilde{\phi}$, y en consecuencia $\tilde{\phi} \in \Delta$.

Ahora bien, $\tilde{\phi}$ se construye en los mismos pasos que ϕ , luego en uno menos que σ , luego podemos aplicarle la hipótesis de inducción y concluir que $N \models \tilde{\phi}$, de donde claramente $\neg N \models \sigma$.

b) \rightarrow c) es evidente.

c) \rightarrow a). Veamos que no hay κ -árboles de Aronszajn. Sea A un κ -árbol y sea \mathcal{L} un lenguaje formal con un relator diádico R , un relator monádico T y κ constantes $\{c_a\}_{a \in A}$. Sea Σ el siguiente conjunto de sentencias (κ, \aleph_0) de \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} c_x R c_y & \quad \text{para cada } x, y \in A \text{ tales que } x \leq y, \\ \neg c_x R c_y & \quad \text{para cada } x, y \in A \text{ tales que } x \not\leq y, \\ \neg(Tc_x \wedge Tc_y) & \quad \text{para cada } x, y \in A \text{ tales que } x \perp y, \\ \bigvee_{x \in \text{Niv}_\alpha(A)} Tc_x & \quad \text{para todo } \alpha < \kappa. \end{aligned}$$

Es claro que $|\Sigma| = \kappa$ y si $S \subset \Sigma$ cumple $|S| < \kappa$, entonces S tiene como modelo a $M = A$ con $M(c_x) = x$, $M(R) = \leq_A$ y tomando como $M(T)$ la pertenencia a una cadena de altura suficientemente grande como para que cumpla todas las fórmulas del cuarto tipo que haya en S .

Por hipótesis Σ tiene un modelo M , del cual obtenemos un camino en A , a saber, $C = \{x \in A \mid M \models Tc_x\}$. ■

Ahora queda claro por qué los cardinales débilmente compactos se llaman así. En el capítulo XVI estudiaremos los cardinales (fuertemente) compactos, que son los que cumplen el teorema anterior cambiando compacidad débil por compacidad.

De la prueba del teorema anterior se desprende que un cardinal fuertemente inaccesible κ es débilmente compacto si y sólo si el árbol $2^{<\kappa}$ no contiene κ -subárboles de Aronszajn, pues en la prueba de a) \rightarrow b) sólo se ha usado que un cierto subárbol de $2^{<\kappa}$ tenía un camino.

Como aplicación del teorema que acabamos de probar demostraremos una propiedad esencial de los cardinales débilmente compactos, de la cual deduciremos, por ejemplo, que son fuertemente κ -Mahlo. Sabemos que un cardinal débilmente compacto κ no tiene por qué ser medible, luego a partir de él no podemos probar la existencia de una inmersión elemental no trivial $V \rightarrow M$. Sin

embargo, podemos probar una aproximación a esto, a saber, la existencia de una inmersión elemental $V_\kappa \rightarrow M$ en un modelo transitivo M estrictamente mayor que V_κ . Como esto es más débil que la existencia de una inmersión elemental sobre toda la clase universal, nos conviene hilar un poco más fino.

Llamaremos \mathcal{L}_R al lenguaje formal de la teoría de conjuntos \mathcal{L}_0 al que hemos añadido un relator monádico R . Un modelo (natural) de \mathcal{L}_R está determinado por un par (M, A) , donde M es un conjunto transitivo y $A \subset M$. Concretamente, nos referimos al modelo en que el relator de pertenencia se interpreta como la pertenencia y el relator R se interpreta como la pertenencia a A .

Teorema 12.14 *Sea κ un cardinal débilmente compacto. Para todo $A \subset V_\kappa$ existe un modelo transitivo M de ZFC y un conjunto $A' \subset M$ de modo que $\kappa \in M$ y $(V_\kappa, A) \prec (M, A')$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{L}' el lenguaje \mathcal{L}_R más un conjunto de constantes $\{c_x\}_{x \in V_\kappa}$ y sea \mathcal{L}'' el lenguaje \mathcal{L}' más una constante c . Como κ es fuertemente inaccesible el lenguaje \mathcal{L}'' tiene cardinal κ . Consideramos a (V_κ, A) como modelo de \mathcal{L}' interpretando cada constante c_x por x .

Sea Σ el conjunto de todas las sentencias (finitas) de \mathcal{L}' verdaderas en (V_κ, A) más las siguientes sentencias de \mathcal{L}'' :

- a) $\bigwedge u u \notin c_\emptyset$,
- b) $\bigwedge u (u \in c_x \leftrightarrow \bigvee_{y \in x} (u = c_y))$, para cada $x \in V_\kappa$ no vacío,
- c) $\neg \bigvee_{n \in \omega} x_n \bigwedge_{m \in \omega} (x_{n+1} \in x_n)$,
- d) c es un ordinal,
- e) $c_\alpha \in c$, para cada $\alpha < \kappa$.

Claramente $|\Sigma| = \kappa$ y todas las sentencias de Σ que no contienen la constante c son verdaderas en (V_κ, A) . Además todo $S \subset \Sigma$ con $|S| < \kappa$ tiene como modelo a (V_κ, A) sin más que interpretar la constante c como un ordinal suficientemente grande. Por el teorema anterior Σ tiene un modelo M .

Como M cumple la sentencia c), la relación $M(\in)$ está bien fundada en M , además M cumple el axioma de extensionalidad porque está en Σ , luego $M(\in)$ es extensional. Pasando al colapso transitivo, podemos suponer que M es un modelo transitivo.

Como M cumple las sentencias a) y b) ha de ser $M(c_x) = x$ para todo $x \in V_\kappa$, luego $V_\kappa \subset M$. Definimos $A' = \{x \in M \mid M(R)(x)\}$.

Se cumple que $(V_\kappa, A) \prec (M, A')$, pues si $(V_\kappa, A) \models \phi[x_1, \dots, x_n]$ entonces $(V_\kappa, A) \models \phi(c_{x_1}, \dots, c_{x_n})$, luego la sentencia $\phi(c_{x_1}, \dots, c_{x_n})$ está en Σ , luego $(M, A') \models \phi(c_{x_1}, \dots, c_{x_n})$ y también $(M, A') \models \phi[x_1, \dots, x_n]$.

En particular, esto implica que M es un modelo transitivo de ZFC (pues, al ser κ fuertemente inaccesible, V_κ lo es).

Por otra parte, M cumple las sentencias d) y e), lo que implica que contiene un ordinal mayor o igual que κ . Por transitividad $\kappa \in M$. ■

Con este teorema podemos adaptar (con un poco más de trabajo) el argumento de reflexión que nos permitió probar que los cardinales medibles son cardinales de Mahlo.

Teorema 12.15 *Si κ es un cardinal débilmente compacto entonces es fuertemente κ -Mahlo.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que κ es fuertemente inaccesible, luego es fuertemente 0-Mahlo. Supongamos que κ es fuertemente α -Mahlo, para $\alpha < \kappa$, y veamos que es fuertemente $\alpha + 1$ -Mahlo. Para ello hemos de probar que todo conjunto c.n.a. C en κ contiene un cardinal fuertemente α -Mahlo. Sea (M, C') según el teorema anterior, es decir, M es un modelo transitivo de ZFC, $(V_\kappa, C) \prec (M, C')$ y $\kappa \in M$. Claramente

$$(V_\kappa, C) \models \bigwedge \alpha \bigvee \beta (\alpha < \beta \wedge R\beta)$$

$$\wedge \bigwedge \alpha (\bigwedge \beta (\beta < \alpha \rightarrow \bigvee \delta (\beta < \delta \wedge \delta < \alpha \wedge R\delta)) \rightarrow R\alpha),$$

luego lo mismo es válido para (M, C') , lo que significa que C' es c.n.a. en el ordinal Ω^M . Por otro lado, el hecho de que (V_κ, C) sea un submodelo elemental de (M, C') implica que $\bigwedge \alpha < \kappa (\alpha \in C \leftrightarrow \alpha \in C')$, es decir, $C = C' \cap \kappa$, no acotado en κ , luego $\kappa \in C'$.

En las observaciones precedentes al teorema 11.30 (ver la nota al pie) vimos que si κ es fuertemente α -Mahlo, entonces es fuertemente α -Mahlo ^{M} , para cualquier modelo transitivo M de ZFC (que contenga a κ), en particular para el modelo M que estamos considerando aquí. Así pues,

$$(M, C') \models \bigvee \mu (\mu \text{ es fuertemente } [\alpha]\text{-Mahlo} \wedge R\mu),$$

donde $[\alpha]$ indica que en esa posición debe ir una variable interpretada por α . Teniendo en cuenta que (V_κ, C) es un submodelo elemental (y que $\alpha \in V_\kappa$), de aquí se sigue que lo mismo vale para (V_κ, C) , con lo que

$$\bigvee \mu \in C (\mu \text{ es fuertemente } \alpha\text{-Mahlo})^{V_\kappa},$$

pero esto es absoluto para V_κ .

Así queda probado que el conjunto de cardinales α -Mahlo bajo κ es estacionario, luego κ es $\alpha + 1$ -Mahlo. El caso límite es trivial. ■

Ejercicio: Probar que si κ es débilmente compacto, entonces el conjunto

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es fuertemente } \mu\text{-mahlo}\}$$

es estacionario en κ .

Ahora probaremos una diferencia notable entre los cardinales medibles y los cardinales débilmente compactos. Hemos visto que los primeros contradicen al axioma de constructibilidad, mientras que ahora veremos que los segundos no. Necesitamos un resultado técnico:

Teorema 12.16 *Si κ es un cardinal débilmente compacto y $A \subset \kappa$ cumple $\bigwedge \alpha < \kappa A \cap \alpha \in L$, entonces $A \in L$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea (M, A') según el teorema 12.14. Claramente

$$(V_\kappa, A) \models \bigwedge \alpha \bigvee x (x \in L \wedge \bigwedge u (u \in x \leftrightarrow u \in \alpha \wedge Ru)),$$

luego lo mismo vale para (M, A') , y entonces podemos particularizar a $\alpha = \kappa$, lo que nos da que $A = A' \cap \kappa \in L$. ■

Teorema 12.17 *Todo cardinal débilmente compacto es débilmente compacto^L.*

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un cardinal débilmente compacto. Entonces κ es fuertemente inaccesible^L, luego basta probar que no existen κ -árboles de Aronszajn^L. Sea (A, \leq_A) un κ -árbol^L. Podemos suponer que $A = \kappa$, así como que $\bigwedge \alpha \beta \in \kappa (\alpha <_A \beta \rightarrow \alpha < \beta)$. En efecto (razonando en L), basta definir una sucesión de biyecciones $f_\alpha : \bigcup_{\beta < \alpha} \text{Niv}_\beta(A) \rightarrow \gamma_\alpha$, con $\gamma_\alpha < \kappa$, cada una de las cuales extienda a las anteriores. La regularidad de κ asegura que esto es posible y al final tenemos una biyección entre A y κ que nos permite pasar a un árbol en las condiciones requeridas.

Es claro que A es un κ -árbol, por lo que tiene un camino C . Si $\alpha < \kappa$, sea $\gamma = \min C \setminus \alpha$. Entonces $\alpha \leq \gamma$ y $C \cap \alpha = \{\beta \in \kappa \mid \beta <_A \gamma\} \in L$, luego $C \in L$ por el teorema anterior. Claramente C es un camino^L en A , luego A no es un κ -árbol de Aronszajn^L. ■

Puede probarse que ser débilmente compacto no implica ser débilmente compacto en cualquier modelo de ZFC (ni siquiera en cualquier modelo que sea una clase propia).

Terminamos la sección con un resultado que necesitaremos más adelante:

Teorema 12.18 *Si $j : M \rightarrow M$ es una inmersión elemental no trivial de un modelo transitivo de ZFC en sí mismo y κ es el menor ordinal no fijado, entonces κ es débilmente compacto^M.*

DEMOSTRACIÓN: Si κ no es un cardinal^M, sea $\nu = |\kappa|^M < \kappa$. Sea $f : \nu \rightarrow \kappa$ biyectiva, $f \in M$. Entonces $j(f) : \nu \rightarrow j(\kappa)$ biyectiva, pero si $\alpha < \nu$ y $f(\alpha) = \beta$, entonces también $j(f)(\alpha) = \beta$, luego llegamos a que $j(f) = f$ y $\kappa = j(\kappa)$, contradicción.

Llegamos a la misma contradicción si suponemos que $\nu < \kappa$ y que f es cofinal, por lo que, de hecho, κ es regular^M.

Así pues, κ es un cardinal^M. Sea $F : [\kappa]^2 \rightarrow 2$ una partición $F \in M$. Sea $A_\alpha = \{\beta < \alpha \mid F(\{\alpha, \beta\}) = 1\} \subset \alpha$. Claramente $\{A_\alpha\}_{\alpha < \kappa} \in M$ y $j(A_\alpha) = A_\alpha$. Por lo tanto $j(\{A_\alpha\}_{\alpha < \kappa}) = \{A_\alpha\}_{\alpha < j(\kappa)}$ (para ciertos conjuntos A_α , con $\kappa \leq \alpha < j(\kappa)$). Sea $A = A_\kappa \subset \kappa$. Sea $E = \{\alpha < \kappa \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$.

Como $j(E) = \{\alpha < j(\kappa) \mid j(A) \cap \alpha = A_\alpha\}$, se sigue fácilmente que $\kappa \in j(E)$. En consecuencia, para todo $\alpha < \kappa$ se cumple $(\bigvee \beta > j(\alpha) \beta \in j(E))^M$, luego

$(\forall \beta > \alpha \beta \in E)^M$, es decir, E no está acotado en κ . De aquí que al menos uno de los dos conjuntos $A \cap E$ o bien $(\kappa \setminus A) \cap E$ ha de ser no acotado en κ . Sea H uno de ellos (no acotado), Por ejemplo, $H = (\kappa \setminus A) \cap E$. Ciertamente $H \in M$ y $|H|^M = \kappa$ (por la regularidad).

Si $\alpha < \beta$ están en H , entonces $\beta \in E$, luego $A \cap \beta = A_\beta$ y así $\alpha \notin A_\beta$, de donde resulta que $F(\{\alpha, \beta\}) = 0$. Así pues, H es homogéneo para F . ■

12.3 Cardinales indescriptibles

En esta sección estudiamos otro tipo de propiedades interesantes de los cardinales grandes, éstas relacionadas con la lógica de órdenes superiores. El resultado principal será una caracterización útil de los cardinales débilmente compactos. Veamos las definiciones básicas.

Definición 12.19 Sea \mathcal{L} el lenguaje formal que resulta de añadir al lenguaje \mathcal{L}_0 de la teoría de conjuntos un número finito de relatores monádicos R_0, \dots, R_k . Un caso particular es el lenguaje \mathcal{L}_R que consta de un único relator R . Un modelo natural de \mathcal{L} está formado por un conjunto M junto con n subconjuntos A_0, \dots, A_k (de forma que $M(R_i)$ es la pertenencia a A_i). El relator \in se interpreta como la pertenencia usual en M .

Llamaremos \mathcal{L}^m al lenguaje que resulta de añadir a \mathcal{L} m conjuntos (numerales, disjuntos) de variables $\text{Var}_1(\mathcal{L}^m), \dots, \text{Var}_m(\mathcal{L}^m)$. Convenimos en que $\text{Var}_0(\mathcal{L}^m)$ es el conjunto de las variables originales de \mathcal{L} . En particular $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}$.

Diremos que \mathcal{L}^m es el *lenguaje de orden $m+1$* asociado a \mathcal{L} . Los elementos de $\text{Var}_i(\mathcal{L}^m)$ se llaman *variables de orden $i+1$* de \mathcal{L}^m .

Los términos y fórmulas de \mathcal{L}^m se definen como en el caso de los lenguajes de primer orden, sólo que ahora pueden aparecer en ellos variables de distintos órdenes. La diferencia aparece en la interpretación. En general, si M es un conjunto, llamaremos $\mathcal{P}^0 M = M$, $\mathcal{P}^1 M = \mathcal{P}M$, $\mathcal{P}^2 M = \mathcal{P}\mathcal{P}M$, etc. Si (M, A_1, \dots, A_k) es un modelo de \mathcal{L} , definimos

$$\overline{M} = \bigcup_{i \leq m} \mathcal{P}^i M.$$

Consideramos a $(\overline{M}, A_1, \dots, A_k)$ como modelo de \mathcal{L} , de modo que el relator \in se sigue interpretando como la pertenencia en \overline{M} y los relatores R_i se siguen interpretando como la pertenencia a A_i . Una *valoración* de \mathcal{L} en \overline{M} es una aplicación v que a cada $x \in \text{Var}_i(\mathcal{L}^m)$ le asigna un conjunto $v(x) \in \mathcal{P}^i M$. Si ϕ es una fórmula de \mathcal{L}^m , la definición de $\overline{M} \models \phi[v]$ es la misma que para los lenguajes de primer orden, salvo que las valoraciones son las que acabamos de definir.

Informalmente, la diferencia es que ahora las variables de primer orden recorren elementos de M , mientras que las variables de segundo orden recorren subconjuntos de M , las de tercer orden subconjuntos de subconjuntos de M , y así sucesivamente. En la práctica escribiremos M en lugar de \overline{M} .

Una fórmula Π_m^n es una fórmula de \mathcal{L}^n que conste de una sucesión de m variables de orden $n + 1$ cuantificadas en la forma $\bigwedge x_1 \bigvee x_2 \bigwedge x_3 \cdots$ seguidas de una fórmula cuyas variables cuantificadas sean a lo sumo de orden n . Una fórmula Σ_m^n se define igualmente, salvo que el primer cuantificador ha de ser existencial.

Vamos a considerar únicamente modelos de la forma $(V_\alpha, A_1, \dots, A_k)$. En la práctica, cuando digamos que una sentencia ϕ es Π_m^n o Σ_m^n querremos decir que es equivalente a una sentencia ϕ' de este tipo, en el sentido de que cualquier modelo V_α cumple ϕ si y sólo si cumple ϕ' .

Un cardinal κ es Π_m^n -*indescriptible* si cuando ϕ es una sentencia Π_m^n de \mathcal{L}_R y $A \subset V_\kappa$ cumple $(V_\kappa, A) \models \phi$, existe un $\alpha < \kappa$ tal que $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \models \phi$. Similarmente se definen los cardinales Σ_m^n -indescriptibles.

Notemos que si $m \leq m'$ y $n \leq n'$, entonces toda fórmula Π_m^n es también una fórmula $\Pi_{m'}^{n'}$. Más aún, si $n < n'$ toda fórmula Π_m^n es, de hecho, $\Pi_0^{n'}$. Por lo tanto, todo cardinal $\Pi_{m'}^{n'}$ -indescriptible es Π_m^n -indescriptible.

Otro hecho elemental es que si κ es Π_m^n -indescriptible ($n \geq 1$) entonces cumple también la definición para lenguajes con k relatores monádicos R_1, \dots, R_k , pues si $(V_\kappa, A_1, \dots, A_k) \models \phi$, consideramos $A = A_1 \times \{0\} \cup \dots \cup A_k \times \{k-1\}$ y la sentencia

$$\phi' = \bigvee x_1 \cdots x_k (x_1 = \emptyset \wedge x_2 = x_1 \cup \{x_1\} \wedge \cdots \wedge x_k = x_{k-1} \cup \{x_{k-1}\} \wedge \phi''),$$

donde ϕ'' es la fórmula que resulta de reemplazar cada $R_i x$ por $R(x, x_i)$. Es claro que $(V_\kappa, A) \models (\phi' \wedge \bigwedge \alpha \bigvee \beta \alpha < \beta)$ y la fórmula es Π_m^n porque los cuantificadores de orden $n + 1$ de ϕ' se pueden extraer. Si $(V_\alpha, A \cap V_\alpha)$ cumple esto mismo con $\alpha < \kappa$, entonces α es un ordinal límite y

$$A \cap V_\alpha = (A_1 \cap V_\alpha) \times \{0\} \cup \cdots \cup (A_k \times V_\alpha) \times \{k-1\},$$

con lo que $(V_\alpha, A_1 \cap V_\alpha, \dots, A_k \cap V_\alpha) \models \phi$.

En realidad aquí hemos usado que κ es infinito, pero esto es consecuencia del teorema siguiente, que prueba que los cardinales indescriptibles son grandes:

Teorema 12.20 *Un cardinal κ es fuertemente inaccesible si y sólo si es Π_0^1 -indescriptible (es decir, si es Π_m^0 -indescriptible para todo $m < \omega$).*

DEMOSTRACIÓN: Si κ es singular, sea $\mu = \text{cf } \kappa$ y sea $f : \mu \rightarrow \kappa$ cofinal. Sea $A = f \times \{\mu\} \subset V_\kappa$. Entonces

$$(V_\kappa, A) \models \bigvee \mu > 0 \bigwedge \delta < \mu \bigvee \beta R(\delta, \beta, \mu),$$

donde la sentencia es claramente de tipo Π_m^0 para algún m (simplemente, es de primer orden). Sin embargo, no existe un $\alpha < \kappa$ tal que

$$(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \models \bigvee x \neq \emptyset \bigwedge y \in x \bigvee z R(y, z, x).$$

En efecto, tendría que ser $\mu < \alpha$ para que existiera x en V_α , y entonces el x cuya existencia afirma la sentencia ha de ser μ . Pero entonces cualquier $\delta < \mu$ tal que $f(\delta) > \alpha$ incumple la sentencia. Esto prueba que todo cardinal Π_0^1 -indescriptible es regular.

Si $\mu < \kappa$ pero $2^\mu \geq \kappa$, sea $f : \mathcal{P}\mu \rightarrow \kappa$ suprayectiva. Tomamos ahora $A = f \times \{\mathcal{P}\mu\} \subset V_\kappa$. La misma sentencia de antes describe a κ . Por consiguiente κ es un límite fuerte.

No puede ser $\kappa = \omega$, pues la sentencia $\bigwedge x \bigvee y x \in y$ describe a ω . Así pues, los cardinales Π_0^1 -indescriptibles son fuertemente inaccesibles.

Supongamos ahora que κ es fuertemente inaccesible y que $A \subset V_\kappa$ cumple

$$(V_\kappa, A) \models \phi,$$

donde ϕ es una sentencia Π_0^1 , es decir, una sentencia de primer orden. Sea $M_0 \prec (V_\kappa, A)$ un submodelo elemental numerable. Sea $\alpha_0 < \kappa$ tal que $M_0 \subset V_{\alpha_0}$. Sea $M_1 \prec (V_\kappa, A)$ tal que $V_{\alpha_0} \subset M_1$ y $|M_1| = |V_{\alpha_0}| < \kappa$, sea $\alpha_1 < \kappa$ tal que $M_1 \subset V_{\alpha_1}$, etc.

Sea $\alpha = \bigcup_n \alpha_n < \kappa$. El teorema 1.7 implica que $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \prec (V_\kappa, A)$. En particular $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \models \phi$, luego κ es Π_0^1 -indescriptible. ■

En realidad los cardinales indescriptibles cumplen más de lo que dice la definición:

Teorema 12.21 *Si κ es un cardinal Π_m^n -indescriptible (con $n, m \geq 1$) y ϕ es una sentencia Π_m^n tal que $(V_\kappa, A) \models \phi$, existe un conjunto estacionario $E \subset \kappa$ formado por cardinales fuertemente inaccesibles tal que para todo cardinal $\mu \in E$ se cumple $(V_\mu, A \cap V_\mu) \models \phi$. En particular κ es un cardinal de Mahlo.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si C es c.n.a. en κ entonces existe un cardinal fuertemente inaccesible $\mu \in C$ tal que $(V_\mu, A \cap V_\mu) \models \phi$. Como κ es fuertemente inaccesible, no perdemos generalidad si suponemos que C está formado por cardinales límite fuerte (pues el conjunto de cardinales límite fuerte menores que κ es c.n.a. en κ). Así pues, basta encontrar un μ regular. Tenemos que

$$(V_\kappa, A, C) \models \phi \wedge \bigwedge \alpha \bigvee \beta (\alpha < \beta \wedge R\beta) \wedge \\ \bigwedge f ((\bigvee \alpha f : \alpha \rightarrow \Omega) \rightarrow (\bigvee \beta f : \alpha \rightarrow \beta)),$$

donde R se interpreta con C . (La variable f es de segundo orden.) Es claro que la sentencia es Π_m^n , pues todo lo que hemos añadido es Π_1^1 . Sea $\mu < \kappa$ un ordinal tal que $(V_\mu, A \cap V_\mu, C \cap V_\mu)$ satisfaga esta sentencia. Entonces $C \cap \mu$ no está acotado en μ , luego $\mu \in C$. La última parte de la sentencia implica que μ es regular, luego cumple todo lo pedido. ■

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 12.22 *Un cardinal es Π_1^1 -indescriptible si y sólo si es débilmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si κ es Π_1^1 -indescriptible, entonces es fuertemente inaccesible por el teorema 12.20. Según las observaciones tras el teorema 12.13 basta probar que ${}^{<\kappa}2$ no tiene κ -subárboles de Aronszajn. Sea $A \subset {}^{<\kappa}2$ un κ -subárbol. Es claro que, para todo $\alpha < \kappa$, el modelo $(V_\alpha, A \cap V_\alpha)$ satisface la sentencia Σ_1^1

$$\forall C \ C \text{ es un camino en } R.$$

Por consiguiente, también la satisface (V_κ, A) , lo cual se traduce en que A tiene un camino.

Supongamos ahora que κ es débilmente compacto y sea $A \subset V_\kappa$ tal que

$$(V_\kappa, A) \models \bigwedge X \phi(X),$$

donde la variable X es de segundo orden y ϕ tiene sólo cuantificadores de primer orden. Por el teorema 12.14 existe un modelo transitivo M de ZFC y un conjunto $A' \subset M$ de modo que $\kappa \in M$ y $(V_\kappa, A) \prec (M, A')$. Teniendo en cuenta que $V_\kappa^M = V_\kappa$, es fácil ver que

$$(M, A') \models (\bigwedge X \subset V_\kappa (V_\kappa, A' \cap \kappa) \models \phi(X)),$$

donde lo que hay tras el primer \models ha de verse como una fórmula (de primer orden) de \mathcal{L}_R . En particular

$$(M, A') \models \forall \alpha \bigwedge X \subset V_\alpha (V_\alpha, A' \cap \alpha) \models \phi(X).$$

Como (V_κ, A) es un submodelo elemental, concluimos que

$$(V_\kappa, A) \models \forall \alpha \bigwedge X \subset V_\alpha (V_\alpha, A \cap \alpha) \models \phi(X),$$

de donde se sigue que existe un $\alpha < \kappa$ tal que $(V_\alpha, A \cap \alpha) \models \bigwedge X \phi(X)$. ■

Puede probarse que los cardinales medibles son Π_1^2 -indescriptibles, pero no vamos a entrar en ello.

12.4 Cardinales de Ramsey

En esta sección investigaremos el trecho que separa a los cardinales medibles de los cardinales débilmente compactos, para lo cual estudiaremos una nueva clase de cardinales intermedios. Los cardinales débilmente compactos son los que cumplen $\kappa \longrightarrow (\kappa)_m^n$, para todo $m < \kappa$ y todo $n < \omega$. Por otra parte sabemos que $\kappa \not\longrightarrow (\kappa)^\omega$, pero cabe la posibilidad de reforzar la propiedad de compacidad débil sin caer en la contradicción de hacer $n = \omega$.

Definición 12.23 Sean κ y μ cardinales infinitos y m un cardinal $2 \leq m < \mu$. Llamaremos

$$\mu \longrightarrow (\kappa)_m^{<\omega}$$

a la fórmula:

Para toda partición $F : [\mu]^{<\omega} \longrightarrow m$ existe un conjunto $H \subset \mu$ con cardinal κ tal que F es constante en cada conjunto $[H]^n$, para $n \in \omega$.

Aquí $[\kappa]^{<\omega}$ es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de κ . Si un conjunto H cumple la fórmula anterior diremos que es *homogéneo* para F . Notemos que no exigimos que F sea constante en $[H]^{<\omega}$, sino que permitimos que el valor que F toma sobre cada $[H]^n$ dependa de n . En caso contrario la propiedad sería falsa salvo en casos triviales. Como de costumbre omitiremos m cuando sea $m = 2$.

Diremos que κ es un *cardinal de Ramsey* si $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Al igual que sucede con los cardinales débilmente compactos, la definición de los cardinales de Ramsey con $m = 2$ implica el caso general:

Teorema 12.24 *Si κ es un cardinal de Ramsey y $m < \kappa$ es un cardinal arbitrario, entonces $\kappa \longrightarrow (\kappa)_m^{<\omega}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow m$ y sea $G : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow 2$ definida como sigue: Si $\alpha_1 < \dots < \alpha_k < \alpha_{k+1} < \dots < \alpha_{2k} < \kappa$ y

$$F(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) = F(\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{2k}\})$$

entonces $G(\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}\}) = 1$, y en cualquier otro caso G toma el valor 0.

Sea H homogéneo para G con $|H| = \kappa$. Notemos que si $x \in [H]^{2k}$ se ha de cumplir $G(x) = 1$. En efecto, como $|H| = \kappa > m$, podemos dividir H en κ sucesiones crecientes de longitud k y tomar dos de ellas en las que F coincide, es decir, existen ordinales $\alpha_1 < \dots < \alpha_k < \alpha_{k+1} < \dots < \alpha_{2k}$ en H tales que $F(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) = F(\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{2k}\})$, luego $G(\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}\}) = 1$ y, por homogeneidad, lo mismo vale para todo $[H]^{2k}$.

Veamos que H es homogéneo para F . Si $\alpha_1 < \dots < \alpha_k, \beta_1 < \dots < \beta_k$ están en H , tomamos $\gamma_1 < \dots < \gamma_k$ en H tales que $\alpha_k, \beta_k < \gamma_1$ (notemos que H no puede tener máximo).

Entonces $G(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}) = G(\{\beta_1, \dots, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}) = 1$, lo que significa que $F(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) = F(\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}) = F(\{\beta_1, \dots, \beta_k\})$. ■

Casi es obvio que los cardinales de Ramsey son débilmente compactos. Lo único que no es inmediato es que no son numerables. La propiedad de Ramsey no es, al contrario de lo que sucede con la compacidad débil, una generalización de una propiedad de \aleph_0 :

Teorema 12.25 \aleph_0 no es un cardinal de Ramsey.

DEMOSTRACIÓN: Sea $F : [\omega]^{<\omega} \longrightarrow 2$ dada por $F(x) = 1 \leftrightarrow |x| \in x$. Si $H \subset \omega$ es infinito, podemos tomar $n \in H$ y dos conjuntos $x, y \in [H]^n$ de manera que $|x| = |y| = n$, $n \in x$ y $n \notin y$. Así $F(x) = 1$ y $F(y) = 0$, luego F no es constante en $[H]^n$ y H no es homogéneo para F . ■

Ahora es inmediato:

Teorema 12.26 *Todo cardinal de Ramsey es débilmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si κ es un cardinal de Ramsey, entonces κ es no numerable por el teorema anterior. Si $F : [\kappa]^2 \rightarrow 2$ es una partición, es claro que podemos extender F de cualquier forma a una partición $G : [\kappa]^{<\omega} \rightarrow 2$, y un conjunto homogéneo para G lo es también para F . ■

Pronto demostraremos que, en realidad, bajo un cardinal de Ramsey κ hay κ cardinales débilmente compactos, pero de momento nos ocupamos de la relación entre los cardinales medibles y los cardinales de Ramsey, que es más sencilla:

Teorema 12.27 *Sea κ un cardinal medible y sea D una medida normal sobre κ . Sea $m < \kappa$ un cardinal.*

- a) *Si $F : [\kappa]^{<\omega} \rightarrow m$ existe un $H \in D$ homogéneo para F . En particular κ es un cardinal de Ramsey.*
- b) $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es un cardinal de Ramsey}\} \in D$.

DEMOSTRACIÓN: a) Basta probar que existe $H_n \in D$ homogéneo para $F|_{[\kappa]^n}$, pues entonces sirve $H = \bigcap_{n \in \omega} H_n$. En otras palabras, podemos suponer que $F : [\kappa]^n \rightarrow m$.

Razonamos por inducción sobre n . Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que vale para n y sea $F : [\kappa]^{n+1} \rightarrow m$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $F_\alpha : [\kappa]^n \rightarrow m$ dada por

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} F(x \cup \{\alpha\}) + 1 & \text{si } \alpha \notin x, \\ 0 & \text{si } \alpha \in x. \end{cases}$$

Por hipótesis de inducción existe $X_\alpha \in D$ homogéneo para F_α . Es obvio que el valor que F_α toma en $[X_\alpha]^n$ no puede ser 0, pues siempre podemos tomar un subconjunto de n elementos en X_α que no contenga a α . Por tanto $\alpha \notin X_\alpha$ y existe un $i_\alpha < m$ tal que $\bigwedge x \in [X_\alpha]^n F(x \cup \{\alpha\}) = i_\alpha$. Sea $X = \bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha \in D$.

Como $X = \bigcup_{i < m} \{\alpha \in X \mid i_\alpha = i\} \in D$, ha de existir un $i < m$ tal que

$$H = \{\alpha \in X \mid i_\alpha = i\} \in D.$$

Así, si $\gamma < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ están en $H \subset X$, se cumple $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in [X_\gamma]^n$, por lo que $F(\{\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = i_\gamma = i$. Esto demuestra que H es homogéneo para F .

b) Sea $M = \text{Ult}_D(V)$ y sea $j : V \rightarrow M$ la inmersión natural. Se cumple que κ es un cardinal de Ramsey^M, pues si $(F : [\kappa]^{<\omega} \rightarrow 2)^M$, esto es lo mismo que $F : [\kappa]^{<\omega} \rightarrow 2$, luego existe un conjunto H homogéneo para F con $|H| = \kappa$. Pero por 11.23 se cumple que $H \in M$ y así (H es homogéneo para F)^M. Además $|H|^M = \kappa$, por ejemplo porque H no está acotado en κ y κ es regular^M.

Si d es la identidad en κ , tenemos que $[d]$ es un cardinal de Ramsey^M, luego $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es un cardinal de Ramsey}\} \in D$. ■

Veamos ahora la información adicional que nos aportan los cardinales de Ramsey. Para ello introducimos un nuevo concepto de la teoría de modelos:

Definición 12.28 Sea \mathcal{L} un lenguaje formal, sea M un modelo de \mathcal{L} y sea κ un cardinal infinito. Diremos que un conjunto $I \subset \kappa$ es un conjunto de *indiscernibles* para M si $I \subset M$ y para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L} y todos los ordinales $\alpha_1 < \dots < \alpha_n, \beta_1 < \dots < \beta_n$ en I se cumple

$$M \models \phi[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \leftrightarrow M \models \phi[\beta_1, \dots, \beta_n].$$

En otras palabras, un conjunto de indiscernibles es un conjunto de ordinales que en M no se diferencian en nada salvo en el orden. El resultado fundamental sobre cardinales de Ramsey e indiscernibles resulta ser muy simple, pero también muy fructífero:

Teorema 12.29 *Sea κ un cardinal de Ramsey, \mathcal{L} un lenguaje formal tal que $|\mathcal{L}| < \kappa$ y M un modelo de \mathcal{L} con $\kappa \subset M$. Entonces M tiene un conjunto de indiscernibles de cardinal κ .*

DEMOSTRACIÓN: Como κ es fuertemente inaccesible tenemos $|\text{Form}(\mathcal{L})| < \kappa$ y $|\mathcal{P}\text{Form}(\mathcal{L})| < \kappa$. Sea $F : [\kappa]^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}\text{Form}(\mathcal{L})$ la aplicación que asigna a cada $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \kappa$ el conjunto

$$F(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = \{\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}) \mid M \models \phi[\alpha_1, \dots, \alpha_n]\}.$$

Es claro que un conjunto homogéneo para F es un conjunto de indiscernibles para M . ■

De aquí podemos extraer numerosas consecuencias a través de una misma técnica que conviene desarrollar en general:

Teorema 12.30 *Sea κ un cardinal de Ramsey y $\mu < \kappa$ un cardinal infinito, sea \mathcal{L} un lenguaje formal tal que $|\mathcal{L}| \leq \mu$ y M un modelo de \mathcal{L} con $\kappa \subset M$. Sean $P, X \subset M$ tales que $|P| < \kappa$ y $|X| \leq \mu$. Entonces*

a) *Existe un submodelo elemental $N \prec M$ tal que*

$$|N| = \kappa, \quad X \subset N \quad \text{y} \quad |P \cap N| \leq \mu.$$

b) *N tiene un conjunto $I \subset \kappa$ de indiscernibles de cardinal κ y toda aplicación creciente $\pi : I \rightarrow I$ se extiende a una inmersión elemental $\bar{\pi} : N \rightarrow N$.*

c) *Si κ es un cardinal medible y D es una medida normal en κ podemos exigir que $I \in D$ y, por lo tanto $N \cap \kappa \in D$.*

DEMOSTRACIÓN: Añadamos a \mathcal{L} un relator monádico cuya interpretación en M sea la pertenencia a P , así como un conjunto de constantes que nombren a cada elemento de X . Se sigue cumpliendo que $|\mathcal{L}| \leq \mu$. Sea ahora $\bar{\mathcal{L}}$ la extensión de \mathcal{L} que resulta de añadirle funtores de Skolem según la definición 1.11. Se sigue cumpliendo $|\bar{\mathcal{L}}| \leq \mu$. Podemos considerar a M como modelo de $\bar{\mathcal{L}}$ sin más que interpretar los funtores de Skolem con unas funciones de Skolem prefijadas.

Por el teorema anterior M tiene un conjunto I de indiscernibles de cardinal κ . Teniendo en cuenta el teorema 12.27 es claro que si κ es medible y D es una medida normal en κ podemos tomar $I \in D$, por lo que se cumple c).

Sea $N = N(I) \prec M$. Teniendo en cuenta la descripción del núcleo de Skolem dada en 1.12, es claro que $|N| = \kappa$, así como que $X \subset N$, pues N ha de contener a las interpretaciones de las constantes.

El conjunto I es también un conjunto de indiscernibles para N , pues si $\alpha_1 < \dots < \alpha_n, \beta_1 < \dots < \beta_n \in I$ y $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L})$, entonces

$$\begin{aligned} N \models \phi[\alpha_1, \dots, \alpha_n] &\leftrightarrow M \models \phi[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \\ &\leftrightarrow M \models \phi[\beta_1, \dots, \beta_n] \leftrightarrow N \models \phi[\beta_1, \dots, \beta_n]. \end{aligned}$$

Más aún, si $t(x_1, \dots, x_n)$ es un término de Skolem, tomamos $\gamma_1 < \dots < \gamma_n$ tales que $\alpha_n, \beta_n < \gamma_1$ y observamos que, por la indiscernibilidad,

$$M \models t[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = t[\gamma_1, \dots, \gamma_n] \leftrightarrow M \models t[\beta_1, \dots, \beta_n] = t[\gamma_1, \dots, \gamma_n].$$

Esto hace que el conjunto

$$\{M(t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \mid \alpha_1 < \dots < \alpha_n \in I\}$$

tenga cardinal 1 o κ .

Si $x \in P \cap N$, entonces $x = M(t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, para cierto término de Skolem t y ciertos $\alpha_1 < \dots < \alpha_n \in I$. En este caso el conjunto anterior ha de tener cardinal 1 pues, en caso contrario, aplicando la indiscernibilidad al relator de pertenencia a P , concluiríamos que P tiene κ elementos distintos. Así pues, en $P \cap N$ hay a lo sumo un elemento para cada término de Skolem de $\overline{\mathcal{L}}$, luego $|P \cap N| \leq \mu$.

Sea ahora $\pi : I \rightarrow I$ una aplicación estrictamente creciente. Todo $a \in N$ es de la forma $a = M(t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, donde $\alpha_1 < \dots < \alpha_n \in I$ y t es un término de Skolem. Definimos

$$\bar{\pi}(a) = M(t)[\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n)].$$

Esto no depende de la elección de t ni de la de los indiscernibles, pues si se cumple $M(t_1)[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = M(t_2)[\beta_1, \dots, \beta_m]$, donde t_1 y t_2 son términos de Skolem y $\alpha_1 < \dots < \alpha_n, \beta_1 < \dots < \beta_m \in I$, llamamos $\gamma_1 < \dots < \gamma_r$ a los mismos $\alpha_1 < \dots < \alpha_n, \beta_1 < \dots < \beta_m$ ordenados y $\phi(z_1, \dots, z_r)$ a la fórmula $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(y_1, \dots, y_m)$ con la ordenación correspondiente de las variables para que $M \models \phi[\gamma_1, \dots, \gamma_r]$ sea equivalente a

$$M \models t_1[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = t_2[\beta_1, \dots, \beta_m].$$

Puesto que, ciertamente, $M \models \phi[\gamma_1, \dots, \gamma_r]$ y π es creciente, también se cumple $M \models \phi[\pi(\gamma_1), \dots, \pi(\gamma_r)]$, pero esto equivale a

$$M(t_1)[\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n)] = M(t_2)(\pi(\beta_1), \dots, \pi(\beta_m)).$$

Así tenemos $\bar{\pi} : N \longrightarrow N$ que claramente extiende a π , pues $t(x) = x$ es un término de Skolem y así, si $\alpha \in I$, se cumple que

$$\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\pi}(M(x)[\alpha]) = M(x)[\pi(\alpha)] = \pi(\alpha).$$

Se cumple que $\bar{\pi}$ es una inmersión elemental, pues si $a_1, \dots, a_n \in N$ y $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\bar{\mathcal{L}})$, entonces existen $\alpha_1 < \dots < \alpha_m \in I$ de manera que $a_i = M(t_i)[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$, para ciertos términos de Skolem t_i . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} N \models \phi[a_1, \dots, a_n] &\rightarrow M \models \phi[a_1, \dots, a_n] \rightarrow M \models \phi(t_1, \dots, t_n)[\alpha_1, \dots, \alpha_m] \\ &\rightarrow M \models \phi(t_1, \dots, t_n)[\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_m)] \rightarrow M \models \phi[\bar{\pi}(a_1), \dots, \bar{\pi}(a_n)] \\ &\rightarrow N \models \phi[\bar{\pi}(a_1), \dots, \bar{\pi}(a_n)]. \end{aligned}$$

■

Veamos un par de aplicaciones:

Teorema 12.31 *Si κ es un cardinal de Ramsey, entonces hay κ cardinales débilmente compactos menores que κ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu < \kappa$ un cardinal arbitrario. Sea \mathcal{L} el lenguaje de la teoría de conjuntos extendido con una familia de constantes $\{c_\alpha\}_{\alpha \leq \mu}$. Consideremos a V_κ como modelo de \mathcal{L} interpretando cada constante c_α como α .

Sea $N \prec V_\kappa$ según el teorema anterior, de modo que $\mu + 1 \subset N$ y tomemos $\bar{\pi} : N \longrightarrow N$ una inmersión elemental distinta de la identidad (obtenida extendiendo cualquier aplicación creciente del conjunto de indiscernibles I que no sea la identidad).

La relación de pertenencia en N es la relación de pertenencia, luego está bien fundada, y como N cumple el axioma de extensionalidad, también es extensional. Esto significa que podemos formar el colapso transitivo M de N , que es un modelo transitivo de ZFC isomorfo a N . Teniendo en cuenta que $\mu + 1 \subset N$, una simple inducción muestra que la función colapsante fija a todos los ordinales $\leq \mu$.

La inmersión $\bar{\pi}$ se corresponde a través del colapso transitivo con una inmersión elemental no trivial $j : M \longrightarrow M$ que fija todos los ordinales $\leq \mu$ (notemos que $\bar{\pi}$ los fija porque conserva las constantes c_α). Sea $\nu \in M$ el menor ordinal no fijado por j . El teorema 12.18 nos da que ν es débilmente compacto^M y ciertamente $\mu < \nu$. Así pues,

$$M \models \bigvee \nu([\mu] < \nu \wedge \nu \text{ es débilmente compacto}),$$

luego

$$N \models \bigvee \nu([\mu] < \nu \wedge \nu \text{ es débilmente compacto}),$$

y también

$$V_\kappa \models \bigvee \nu([\mu] < \nu \wedge \nu \text{ es débilmente compacto}),$$

es decir, $\bigvee \nu < \kappa (\mu < \nu \wedge \nu \text{ es débilmente compacto})$, pues ser débilmente compacto es absoluto para V_κ .

Con esto hemos probado que el conjunto de los cardinales débilmente compactos menores que κ no está acotado en κ , luego hay κ de ellos. ■

Terminamos probando que los cardinales de Ramsey, al igual que los cardinales medibles y al contrario que los débilmente compactos, no son compatibles con el axioma de constructibilidad. De hecho probaremos algo mucho más fino:

Teorema 12.32 (Rowbottom) *Si κ es un cardinal de Ramsey y $\mu < \kappa$ es un cardinal, entonces $|\mathcal{P}^L \mu| = \mu$. En particular $V \neq L$.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 3.19 nos da que $P = \mathcal{P}^L \mu \subset L_\kappa$. Aplicamos el teorema 12.30 a $M = L_\kappa$. Así obtenemos un submodelo $N \prec L_\kappa$ de cardinal κ y tal que $\mu + 1 \subset N$ y $|P \cap N| \leq \mu$. Tenemos que L_κ es un modelo de ZFC+V=L, luego lo mismo vale para N , luego también para su colapso transitivo, que por el teorema 3.15 tiene que ser L_κ (notemos que todo ordinal en el colapso transitivo es un ordinal en N , luego en L_κ).

Así pues, el colapso transitivo es un isomorfismo $\pi : N \rightarrow L_\kappa$. Del hecho de que $\mu \subset N$ se sigue que π fija a todos los ordinales $\leq \mu$ y, por consiguiente, a todos los elementos de $P \cap N$. Así, si $x \in P \cap \pi[N]$, tenemos que $x = \pi(y)$, para un cierto $y \in N$, pero $\pi(y) \subset \mu = \pi(\mu)$, luego $y \subset \mu$, es decir, $y \in P \cap N$, con lo que $x = \pi(y) = y$ y por tanto $x \in N$. Con esto concluimos que

$$P \cap N = P \cap \pi[N] = P \cap L_\kappa = P,$$

luego $|P| = |P \cap N| \leq \mu$, y la otra desigualdad es obvia. ■

En particular, vemos que si existe un cardinal de Ramsey entonces \aleph_1^L es un ordinal numerable (pues $|\aleph_1^L| = |\mathcal{P}^L \omega| = |\omega| = \aleph_0$). En el capítulo XIV probaremos mucho más.

Ejercicio: Probar que si κ es un cardinal de Ramsey entonces L_κ tiene un conjunto de indiscernibles I de cardinal κ tal que toda aplicación creciente $\pi : I \rightarrow I$ se extiende a una inmersión elemental $\bar{\pi} : L_\kappa \rightarrow L_\kappa$.

Capítulo XIII

Constructibilidad relativa

En los capítulos anteriores hemos visto que los cardinales medibles y los cardinales de Ramsey contradicen al axioma de constructibilidad, lo que hace que, por ejemplo, no tengamos ninguna información sobre qué determinaciones de la función del continuo son consistentes con la existencia de estos cardinales.

En este capítulo introduciremos una noción de constructibilidad relativa que sí es consistente con todos los cardinales grandes que hemos estudiado hasta ahora. No se trata de la definida en 3.25, pues en general no es posible demostrar que la clase $L(A)$ cumpla el axioma de elección. Lo que vamos a ver es que si en vez de introducir un conjunto arbitrario A en la jerarquía constructible nos limitamos a usarlo como auxiliar en la definición de conjuntos, obtenemos una clase $L[A]$ que no siempre contiene a A , pero siempre cumple el axioma de elección. Mientras no se indique lo contrario trabajamos en ZF–AP.

La idea básica es trabajar con el lenguaje formal \mathcal{L}_R resultante de añadir al lenguaje \mathcal{L}_0 de la teoría de conjuntos un relator monádico R . Así, un modelo de \mathcal{L}_R viene determinado por una terna (M, E, A) , donde M es un conjunto (el universo del modelo), E es una relación en M (la interpretación de la relación de pertenencia) y $A \subset M$ es la interpretación del relator R (más exactamente, R se interpreta como la pertenencia a A). En realidad vamos a trabajar únicamente con modelos naturales de \mathcal{L}_R , es decir, modelos en los que la relación E es la relación de pertenencia. Claramente, un modelo natural de \mathcal{L}_R viene determinado por un par (M, A) .

A la hora de relacionar el lenguaje metamatemático \mathcal{L}_m de la teoría de conjuntos con el lenguaje \mathcal{L}_R , conviene observar que si $\phi(x_1, \dots, x_n, A)$ es una fórmula de \mathcal{L}_m sin descriptores en la que la variable A sólo aparece en subfórmulas de tipo $x \in A$, podemos asociarle $\ulcorner \phi \urcorner(\ulcorner x_1 \urcorner, \dots, \ulcorner x_n \urcorner) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ de modo que para todo par (M, A) y todos los $x_1, \dots, x_n \in M$, se cumple

$$(M, A) \models \ulcorner \phi \urcorner[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \phi^M(x_1, \dots, x_n, A).$$

13.1 Hechos básicos

Incluimos en esta sección las definiciones y resultados que no requieren sino modificaciones insignificantes de lo visto en el capítulo III. En primer lugar hemos de definir el conjunto de relaciones n -ádicas definibles mediante fórmulas de \mathcal{L}_R , lo cual supone únicamente añadir en la definición recurrente 3.1 las relaciones definibles por una fórmula elemental Rx_i :

Definición 13.1 Sean X y A dos conjuntos, n un número natural, $i \in n$ y $R \subset X^{n+1}$. Definimos

$$\text{Rel}(X, A, n, i) = \{s \in X^n \mid s(i) \in A\}.$$

Llamaremos $\text{Df}_A(X, n)$ al conjunto definido como en 3.1 salvo la modificación siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Df}_{A0}(X, n) = & \{\text{Diag}_{\neq}(X, n, i, j) \mid i, j < n\} \cup \{\text{Diag}_{=} (X, n, i, j) \mid i, j < n\} \\ & \cup \{\text{Rel}(X, A, n, i) \mid i < n\}. \end{aligned}$$

De este modo, se cumple que $\text{Df}_A(X, n) \in \mathcal{P}\mathcal{P}X^n$ y su interpretación es la siguiente:

Teorema 13.2 Si X y A son conjuntos y n un número natural, entonces $\text{Df}_A(X, n)$ es el conjunto de las relaciones n -ádicas definibles en el modelo (X, A) del lenguaje \mathcal{L}_R . Es decir, $\text{Df}_A(X, n)$ es el conjunto de las relaciones $S \subset X^n$ tales que existe una fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ tal que

$$\bigwedge s \in X^n (s \in S \leftrightarrow (X, A) \models \phi[s(0), \dots, s(n-1)]).$$

La prueba es la misma que la del teorema 3.4, sólo que ahora hay que contemplar la posibilidad adicional de que ϕ sea de la forma Rx_i , en cuyo caso define el conjunto $\text{Rel}(X, A, n, i) \in \text{Df}_A(X, n)$.

Claramente $\text{Df}(X, n) = \text{Df}_{\emptyset}(X, n)$.

Definición 13.3 Llamaremos conjunto de las *partes definibles* de un conjunto X respecto a un conjunto A al conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A X = & \{x \mid \bigvee ns S (n \in \omega \wedge s \in X^n \wedge S \in \text{Df}_A(X, n+1) \\ & \wedge x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in S\})\}. \end{aligned}$$

Ciertamente $\mathcal{D}_A X$ es un subconjunto de $\mathcal{P}X$ (aunque $\mathcal{P}X$ pueda no ser un conjunto) y su interpretación es la siguiente:

Teorema 13.4 Sean X y A dos conjuntos. Entonces $\mathcal{D}_A X$ está formado por los conjuntos $x \subset X$ tales que existe una fórmula $\phi(x_0, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ y existen $a_1, \dots, a_n \in X$ de modo que

$$x = \{u \in X \mid (X, A) \models \phi[u, a_1, \dots, a_n]\}.$$

La versión metamatemática de este teorema es como sigue:

Teorema 13.5 *Sea $\phi(x, x_1, \dots, x_n, A)$ una fórmula (metamatemática) con a lo sumo las variables libres indicadas y de manera que A sólo aparezca en subfórmulas de tipo $x \in A$. Entonces en ZF-AP se demuestra que si X es un conjunto transitivo, A un conjunto cualquiera y $\emptyset \in X$ entonces*

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in X \{x \in X \mid \phi^X(x, x_1, \dots, x_n, A)\} \in \mathcal{D}_A X.$$

El teorema 3.8 es válido para \mathcal{D}_A con la misma prueba. Además podemos añadir que $\mathcal{D}X = \mathcal{D}_{\emptyset}X$ (obvio), $\mathcal{D}_A X = \mathcal{D}_{A \cap X} X$ (porque (X, A) y $(X, A \cap X)$ son el mismo modelo), así como que $X \cap A \in \mathcal{D}_A X$, pues

$$X \cap A = \{x \in X \mid (X, A) \models R[x]\}.$$

Es fácil ver que un buen orden \leq en un conjunto transitivo X se extiende explícitamente a un buen orden $\leq_{X,A}^*$ en $\mathcal{D}_A(X)$ respecto al cual X es un segmento inicial. El único cambio respecto a la definición esbozada en el capítulo III es que ahora hemos de tener en cuenta las relaciones $\text{Rel}(X, A, n, i)$ en la ordenación de $\text{Df}_{A_0}(X, n)$.

Definición 13.6 Si A es un conjunto, la clase $L[A]$ de los *conjuntos constructibles respecto de A* se define mediante la siguiente recursión transfinita:

$$L_0[A] = \emptyset, \quad \bigwedge \alpha L_{\alpha+1}[A] = \mathcal{D}_A L_\alpha[A], \quad \bigwedge \lambda L_\lambda[A] = \bigcup_{\delta < \lambda} L_\delta[A],$$

$$L[A] = \bigcup_{\alpha \in \Omega} L_\alpha[A].$$

Así mismo definimos

$$\leq_0^A = \emptyset \wedge \bigwedge \alpha \leq_{\alpha+1}^A = \leq_{\alpha L_\alpha[A] A}^* \wedge \bigwedge \lambda \leq_\lambda^A = \bigcup_{\delta < \lambda} \leq_\delta^A, \quad \leq^A = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \leq_\alpha^A.$$

El teorema 3.11 se adapta de forma obvia a la jerarquía relativa. Así mismo es claro que \leq_α^A es un buen orden en $L_\alpha[A]$ de modo que cada $\leq_{\alpha+1}^A$ extiende a \leq_α^A y $L_\alpha[A]$ es un segmento inicial de $L_{\alpha+1}[A]$. Por consiguiente la clase \leq^A es un buen orden de la clase $L[A]$, luego $V = L[A]$ implica el axioma de elección. Conviene añadir tres propiedades sencillas:

Teorema 13.7 *Se cumple:*

- a) $L_\alpha[A] = L_\alpha[A \cap L[A]]$.
- b) $L[A] = L[A \cap L[A]]$.
- c) $A \cap L[A] \in L[A]$.

DEMOSTRACIÓN: a) se sigue inmediatamente por inducción sobre α usando que $\mathcal{D}_A X = \mathcal{D}_{A \cap X} X$. La propiedad b) es inmediata a partir de a). Para probar c) llamemos $\bar{A} = A \cap L[A]$. Como es un conjunto, existe un ordinal α tal que $\bar{A} \subset L_\alpha[A]$. Así

$$\bar{A} = \{x \in L_\alpha[A] \mid (L_\alpha[A], A) \models R[x]\} \in \mathcal{D}_A(L_\alpha[A]) = L_{\alpha+1}[A] \subset L[A].$$

■

En general no podemos garantizar que $A \in L[A]$. No obstante, esto se cumple si $A \subset L[A]$, pues entonces $A = A \cap L[A] \in L[A]$. En particular, si $A \subset \Omega$ o si $A \subset V_\omega$ podemos asegurar que $A \in L[A]$. Un último hecho obvio es que $L = L[\emptyset]$.

La prueba del teorema 3.12 se generaliza sin cambio alguno, de modo que $L[A]$ es un modelo de ZF-AP (o de todo ZF si suponemos el axioma de partes). Así mismo es fácil ver que $L_\alpha[A]$ es absoluto para modelos transitivos de ZF-AP (en la sección 13.4 daremos otra prueba de este hecho). Como consecuencia tenemos la generalización obvia del teorema 3.14:

Teorema 13.8 *Sea M un modelo transitivo de ZF-AP y $A \in M$.*

a) *Si M es una clase propia entonces $L[A] \subset M$ y*

$$\bigwedge x \in M (x \in L[A]^M \leftrightarrow x \in L[A]).$$

b) *Si M es un conjunto y $\lambda = \Omega^M$, entonces $L_\lambda[A] \subset M$ y*

$$\bigwedge x \in M (x \in L[A]^M \leftrightarrow x \in L_\lambda[A]).$$

En particular, si $\bar{A} = A \cap L[A]$ y tomamos $M = L[\bar{A}] = L[A]$, tenemos que

$$\bigwedge x \in L[A] \ x \in L[\bar{A}]^M,$$

es decir, que $(V = L[\bar{A}])^{L[A]}$. Así pues, $L[A]$ es un modelo transitivo de ZFC-AP (o de todo ZFC si suponemos AP).

Más en general, si M es un modelo transitivo de ZF-AP y existe un $A \in M$ tal que $(V = L[A])^M$, entonces ha de ser $M = L_\lambda[A]$ con $\lambda = \Omega^M$ si M es un conjunto o bien $M = L[A]$ si M es una clase propia.

El hecho de que $L[A]$ cumpla el axioma de elección nos permite probar (en ZF-AP) la generalización de 3.17:

Teorema 13.9 *Para todo conjunto A y todo ordinal infinito α , $|L_\alpha[A]| = |\alpha|$.*

13.2 Codificación por ordinales

En esta sección mostraremos una primera aplicación de la constructibilidad relativa. Un conjunto de ordinales puede codificar mucha información. Un ejemplo de lo que queremos decir lo proporciona el teorema siguiente:

Teorema 13.10 *Para todo conjunto A existe un conjunto $A' \subset \Omega$ tal que $L[A] = L[A']$.*

DEMOSTRACIÓN: Cambiando A por $A \cap L[A]$ si es necesario, podemos suponer que $A \in L[A]$. Sea $B = \text{ct}A \cup \{A\} \in L[A]$. Sea $\kappa = |B|^{L[A]}$. Si B es finito entonces $A \in V_\omega \subset L$, luego $A = L = L[\emptyset]$ (es decir, sirve $A' = \emptyset$).

Supongamos, pues, que B es infinito. Sea $f \in L[A]$ tal que $f : \kappa \rightarrow B$ biyectiva.

Sea $E \subset \kappa \times \kappa$ la relación dada por $\alpha E \beta \leftrightarrow f(\alpha) \in f(\beta)$. Obviamente $E \in L[A]$, está bien fundada, es extensional y, por unicidad, B es el colapso transitivo de (κ, E) (y f es la función colapsante).

Sea $g \in L$ tal que $g : \kappa \times \kappa \rightarrow \kappa$ biyectiva y sea $A' = g[E] \in L[A]$. Por consiguiente $L[A'] \subset L[A]$. Por otra parte, como A' es un conjunto de ordinales, se cumple que $A' \in L[A']$ y $g \in L \subset L[A']$, luego $E \in L[A']$, luego B , que es el colapso de (κ, E) , también está en $L[A']$, y por transitividad $A \in L[A']$ y también $L[A] \subset L[A']$. ■

Así pues, desde un punto de vista teórico es suficiente estudiar las clases $L[A]$ con $A \subset \Omega$. Observemos que en este caso $L[A] = L(A)$, donde $L(A)$ es la clase definida en 3.25, pues $A \in L[A]$ y tanto $L[A]$ como $L(A)$ son el menor modelo transitivo de ZF-AP que contiene a A y a todos los ordinales.

Por consiguiente, los modelos $L[A]$ son un caso particular de los modelos $L(A)$. El recíproco no es cierto en general, pues los modelos $L(A)$ no siempre cumplen el axioma de elección.

Veamos otros ejemplos de codificación. Sabemos que un ordinal numerable no tiene por qué ser numerable^L. Ahora probamos que siempre podemos conservarlo numerable en un modelo $L[A]$.

Teorema 13.11 *Si α es un ordinal infinito numerable, entonces existe $A \subset \omega$ tal que α es numerable^{L[A]}.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $R \subset \omega \times \omega$ un buen orden de ω de ordinal α . Sea $g \in L$ tal que $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ biyectiva y sea $A = g[R] \subset \omega$. Entonces $A \in L[A]$ y $g \in L \subset L[A]$, luego $R \in L[A]$ y, por consiguiente, la semejanza entre (ω, R) y α ha de estar en $L[A]$. En particular α es numerable^{L[A]}. ■

Hasta el final de la sección suponemos el axioma de partes.

Teorema 13.12 *Si \aleph_1 no es inaccesible^L, entonces existe $A \subset \omega$ de manera que $\aleph_1 = \aleph_1^{L[A]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que \aleph_1 es un cardinal regular no numerable^L, luego decir que no es inaccesible^L equivale a decir que es un cardinal sucesor^L. Sea, pues, $\aleph_1 = (\alpha^+)^L$, donde α es un ordinal numerable. Por el teorema anterior existe $A \subset \omega$ tal que α es numerable^{L[A]}. Hemos de probar que todo ordinal numerable β es numerable^{L[A]}. En efecto, puesto que $\beta < (\alpha^+)^L$, existe $f \in L$ tal que $f : \alpha \rightarrow \beta$ suprayectiva. Como α es numerable^{L[A]}, al componer f con una biyección de α con ω en $L[A]$, obtenemos $g \in L[A]$ tal que $g : \omega \rightarrow \beta$ suprayectiva. ■

Teorema 13.13 Existe $A \subset \omega_1$ tal que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $\alpha < \omega_1$, sea $A_\alpha \subset \omega$ tal que α es numerable ^{$L[A_\alpha]$} . Sea $B = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \{\alpha\} \times A_\alpha \subset \omega_1 \times \omega$. Sea $f \in L$ tal que $f : \omega_1 \times \omega \rightarrow \omega_1$ biyectiva.

El conjunto $A = f[B] \subset \omega_1$ cumple lo pedido, pues $A \in L[A]$, con lo que $B \in L[A]$, luego, para cada $\alpha < \omega_1$, se cumple que $A_\alpha \in L[A]$, luego tenemos la inclusión $L[A_\alpha] \subset L[A]$, luego α es numerable ^{$L[A]$} . Esto prueba que ω_1 es el menor ordinal no numerable ^{$L[A]$} . ■

Finalmente obtenemos:

Teorema 13.14 Si \aleph_2 no es inaccesible ^{L} , entonces existe $A \subset \omega_1$ tal que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$ y $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$.

DEMOSTRACIÓN: La hipótesis significa que $\aleph_2 = (\alpha^+)^L$. Claramente ha de ser $|\alpha| = \aleph_1$. Sea $R \subset \omega_1 \times \omega_1$ un buen orden en ω_1 de ordinal α . Sea $f \in L$ tal que $f : \omega_1 \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$ biyectiva y sea $A_0 = f[R] \subset \omega_1$. Sea $A_1 \subset \omega_1$ tal que $\aleph_1^{L[A_1]} = \aleph_1$. Sea $A_2 = (\{0\} \times A_0) \cup (\{1\} \times A_1)$. Sea $g \in L$ tal que $g : 2 \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$ biyectiva y sea $A = g[A_2] \subset \omega_1$.

Claramente, A_0 y A_1 están en $L[A]$, luego también $R \in L[A]$. Del hecho de que $A_1 \in L[A]$ se sigue que $L[A_1] \subset L[A]$, y de aquí que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$.

Por otra parte, del hecho de que $R \in L[A]$ se sigue que $|\alpha|^{L[A]} = \aleph_1$. Si $\beta < \omega_2$, entonces $\beta < (\alpha^+)^L$, luego existe $h \in L$ tal que $h : \alpha \rightarrow \beta$ suprayectiva, la cual nos permite construir $j \in L[A]$ tal que $j : \omega_1 \rightarrow \beta$ suprayectiva. Esto implica que no hay cardinales ^{$L[A]$} entre \aleph_1 y \aleph_2 , luego $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$. ■

La aplicación a la que queríamos llegar es la siguiente:

Teorema 13.15 Si no existen \aleph_2 -árboles de Aronszajn, entonces \aleph_2 es un cardinal inaccesible ^{L} .

DEMOSTRACIÓN: Si \aleph_2 no es inaccesible ^{L} , por el teorema anterior existe $A \subset \omega_1$ tal que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$ y $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$. En la sección siguiente probaremos (teorema 13.20) que en $L[A]$ se cumple la hipótesis del continuo generalizada, pero esto implica que existe un $(\aleph_2$ -árbol de Aronszajn) ^{$L[A]$} (X, \leq) . Más aún, (ver las observaciones previas a 12.10) podemos suponer que (en $L[A]$) X está formado por aplicaciones inyectivas de ω_2 en ω_1 y si $p, q \in X$, $p \leq q$, entonces $p \subset q$.

Del hecho de que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$ y $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$ se sigue inmediatamente que (X, \leq) es un \aleph_2 -árbol, y no puede tener caminos, pues un camino daría lugar a una aplicación inyectiva de ω_2 en ω_1 . ■

De este modo, para probar la consistencia de que no existan \aleph_2 -árboles de Aronszajn hay que partir de un modelo que contenga un cardinal inaccesible. En la sección siguiente probaremos que de hecho se necesita un cardinal débilmente compacto.

Ejercicio: Probar que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (o cualquier otra posibilidad razonable) es consistente con que exista un \aleph_2 -árbol de Aronszajn.

13.3 Argumentos de condensación

La técnica de condensación consiste a grandes rasgos en tomar submodelos elementales de modelos $L_\lambda[A]$, colapsarlos y usar que el colapso tiene que ser un $L_{\lambda'}[A']$ por el teorema 13.8. Es el argumento con el que hemos demostrado que el axioma de constructibilidad implica la HCG o el diamante de Jensen. En esta sección refinaremos la técnica y extraeremos nuevas consecuencias. Empezamos probando que en muchos casos podemos tomar submodelos elementales que ya son de la forma $L_\lambda[A]$, sin necesidad de colapsarlos.

Teorema 13.16 *Sea A un conjunto y κ un cardinal regular no numerable ^{$L[A]$} . Entonces el conjunto $\{\lambda < \kappa \mid L_\lambda[A] \prec L_\kappa[A]\}$ es cerrado no acotado en κ .*

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta que la fórmula $M \models \phi[s]$ es absoluta para modelos transitivos de ZF–AP, se comprueba sin dificultad que la fórmula $L_\lambda[A] \prec L_\kappa[A]$ es absoluta para $L[A]$. Ser cerrado no acotado es así mismo absoluto, luego basta demostrar la relativización del teorema a $L[A]$ o, equivalentemente, podemos suponer que $V = L[A]$.

Para cada $\alpha < \kappa$ tenemos que $|N(L_\alpha[A])| \leq \aleph_0 |L_\alpha[A]| \leq \aleph_0 |\alpha| < \kappa$, luego existe un mínimo ordinal $\alpha < h(\alpha) < \kappa$ tal que $N(L_\alpha[A]) \subset L_{h(\alpha)}[A]$. Para cada ordinal $\delta < \lambda$, consideremos $\lambda = h^\omega(\delta)$, es decir, el supremo de la sucesión $\delta < h(\delta) < h(h(\delta)) < \dots$. Es inmediato que $L_\lambda[A]$ es cerrado para las funciones de Skolem, luego $L_\lambda[A] = N(L_\lambda[A]) \prec L_\kappa[A]$ y $\delta < \lambda$, luego el conjunto del enunciado no está acotado en κ .

Si $\lambda < \kappa$ y $\{\delta < \lambda \mid L_\delta[A] \prec L_\kappa[A]\}$ no está acotado en λ , de nuevo es claro que $L_\lambda[A]$ es cerrado para las funciones de Skolem, luego $L_\lambda[A] \prec L_\kappa[A]$ y el conjunto es cerrado. ■

La razón por la que hemos insistido en desarrollar la teoría de la constructibilidad relativa en ZF–AP es que, sin la ayuda de cardinales grandes, no es posible demostrar la existencia de modelos de ZF, mientras que existen muchísimos modelos naturales de ZF–AP:

Teorema 13.17 *Sea A un conjunto y κ un cardinal regular no numerable ^{$L[A]$} . Entonces $L_\kappa[A] \models \text{ZFC–AP}$.*

DEMOSTRACIÓN: La tesis del teorema es una fórmula absoluta para $L[A]$, luego podemos suponer que $V = L[A]$.

La prueba del teorema 3.12 es válida para $L_\kappa[A]$ (formalizando de forma obvia los razonamientos metamatemáticos) salvo la parte correspondiente al axioma de partes (que no tiene por qué cumplirse en $L_\kappa[A]$) y la del axioma de reemplazo, que se basa en el teorema de reflexión. Así pues, basta probar que $L_\kappa[A]$ cumple el axioma de reemplazo, para lo cual sustituiremos el teorema de reflexión por el teorema anterior.

Tomamos una fórmula $\phi(u, v, x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_0)$ con a lo sumo las variables libres indicadas. Hemos de probar:

$$L_\kappa[A] \models \bigwedge x_1 \cdots x_n (\bigwedge xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z) \\ \rightarrow \bigwedge a \forall b \bigwedge y (y \in b \leftrightarrow \bigvee x (x \in a \wedge \phi(x, y))))).$$

Tomamos $a_1, \dots, a_n \in L_\kappa[A]$ y suponemos que

$$L_\kappa[A] \models \bigwedge xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z)[a_1, \dots, a_n].$$

Tomemos $a \in L_\kappa[A]$ y sea

$$b = \{y \in L_\kappa[A] \mid \bigvee x (x \in a \wedge L_\kappa[A] \models \phi[x, y])\}.$$

Claramente b es una imagen de a , luego es un conjunto de cardinal menor que κ y además $b \subset L_\kappa[A]$. Basta probar que $b \in L_\kappa[A]$.

Sea $\alpha < \kappa$ un ordinal tal que $a, a_1, \dots, a_n \in L_\alpha[A]$ y $b \subset L_\alpha[A]$. Claramente

$$b = \{y \in L_\alpha[A] \mid \bigvee x (x \in a \wedge L_\kappa[A] \models \phi[x, y])\}.$$

Por el teorema anterior existe λ tal que $\alpha < \lambda < \kappa$ y $L_\lambda[A] \prec L_\kappa[A]$. De este modo

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n xy \in L_\lambda[A] (L_\lambda[A] \models \phi[x, y] \leftrightarrow L_\kappa[A] \models \phi[x, y]),$$

luego

$$b = \{y \in L_\lambda[A] \mid \bigvee x (x \in a \wedge L_\lambda[A] \models \phi[x, y])\} \\ = \{y \in L_\lambda[A] \mid L_\lambda[A] \models \bigvee x (x \in z \wedge \phi)[y, a]\} \in \mathcal{D}_A L_\lambda[A] = L_{\lambda+1}[A] \subset L_\kappa[A].$$

El axioma de elección ^{$L_\kappa[A]$} se deduce de que si $\alpha < \kappa$ entonces $\leq_\alpha^A \in L_\kappa[A]$, luego todo conjunto en $L_\kappa[A]$ puede ser bien ordenado en $L_\kappa[A]$. ■

Notemos que si $A \in L_\kappa[A]$ entonces $L_\kappa[A]$ cumple $V = L[A]$, pero si no es así esto no tiene sentido. También conviene destacar que, por el teorema 13.16, para que $L_\lambda[A]$ sea un modelo de ZFC–AP no hace falta que λ sea un cardinal regular no numerable ^{$L[A]$} , sino que por debajo de cada uno de estos cardinales hay un conjunto cerrado no acotado de ordinales λ que cumplen lo mismo.

Hasta el final de la sección supondremos el axioma de partes. El argumento de condensación más elemental es el siguiente:

Teorema 13.18 *Sea A un conjunto y supongamos que $V = L[A]$. Si se cumple $A \in L_\alpha[A]$, entonces $\mathcal{P}L_\alpha[A] \subset L_{\alpha^+}[A]$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que α es infinito, pues en caso contrario el teorema es obvio. Sea $a \in \mathcal{P}L_\alpha[A]$. Sea $N = N(L_\alpha[A] \cup \{a\})$, donde el núcleo de Skolem se toma respecto al modelo $L_{\alpha^+}[A]$, modelo de ZFC–AP+V=L[A], luego N también es un modelo de estos axiomas (notemos que $A \in N$). Además $|N| = |L_\alpha[A]| + 1 = |\alpha|$. Como N cumple el axioma de extensionalidad, la relación de pertenencia en N es extensional y bien fundada, luego podemos considerar el colapso transitivo M , que es un modelo transitivo isomorfo a N . Como el conjunto $L_\alpha[A] \cup \{a\}$ es transitivo, es fácil ver que la función colapsante

fija a todos sus elementos, luego $L_\alpha[A] \subset M$, $a \in M$ y M es un modelo transitivo de ZFC-AP+V=L[A]. Por el teorema 13.8 ha de ser $M = L_\lambda[A]$, para un cierto ordinal límite $\lambda < \alpha^+$ (pues $|\lambda| = |M| = |N| = |\alpha| < \alpha^+$). Así pues, concluimos que $a \in L_\lambda[A] \subset L_{\alpha^+}[A]$. ■

De aquí se sigue inmediatamente:

Teorema 13.19 *Sea A un conjunto y supongamos $V = L[A]$. Sea α el mínimo ordinal tal que $A \in L_{\alpha^+}[A]$. Entonces para todo cardinal infinito $\kappa \geq \alpha$ se cumple $2^\kappa = \kappa^+$. En particular, si $A \subset V_\omega$ se cumple la HCG.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\delta < \alpha^+$ tal que $A \in L_\delta[A]$. Entonces $|\delta| \leq |\alpha| \leq \kappa$ y así $|L_{\delta+\kappa}[A]| = |\delta + \kappa| = \kappa$ y $A \in L_{\delta+\kappa}[A]$. Ahora podemos aplicar el teorema anterior:

$$2^\kappa = |\mathcal{P}L_{\delta+\kappa}[A]| \leq |L_{(\delta+\kappa)^+}[A]| = (\delta + \kappa)^+ = \kappa^+.$$

Notemos que si $A \subset V_\omega = L_\omega[A]$, entonces $A \in L_{\omega+1}[A]$ y sirve $\alpha = \omega$. ■

Mediante un argumento de condensación más fino podemos probar un poco más:

Teorema 13.20 *Si $V = L[A]$ para un cierto $A \subset \omega_1$, se cumple la HCG.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $A \subset L_{\omega_1}[A]$, luego $A \in L_{\omega_1+1}[A]$ y el teorema anterior nos da que $2^\kappa = \kappa^+$ siempre que $\kappa \geq \aleph_1$. Así pues, basta probar que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. A su vez, para ello basta probar que $\mathcal{P}\omega \subset L_{\omega_1}[A]$.

Tomemos $a \in \mathcal{P}\omega$. El teorema 13.18 nos da que $a \in L_{\omega_2}[A]$. Consideremos $N = N(\omega \cup \{a, \omega, \omega_1, A\}) \prec L_{\omega_2}[A]$. Claramente $|N| = \aleph_0$.

Observemos que si α es un ordinal numerable, entonces α es numerable $^{L_{\omega_2}[A]}$. En efecto, si $f : \omega \rightarrow \alpha$ biyectiva, entonces $f \subset \omega \times \alpha \subset L_{\omega_1}[A]$, luego por 13.18 tenemos que $f \in L_{\omega_2}[A]$.

Por consiguiente, si $\alpha \in N$ cumple $\alpha < \omega_1$, entonces $L_{\omega_2}[A] \models [\alpha]$ es numerable, luego lo mismo vale en N , luego existe $f \in N$ tal que $N \models [f] : \omega \rightarrow \alpha$ biyectiva, luego lo mismo vale en $L_{\omega_2}[A]$, luego $f : \omega \rightarrow \alpha$ biyectiva. Para cada $n \in \omega$ se cumple $L_{\omega_2}[A] \models [n] \in \omega$, luego N cumple lo mismo, luego existe un $y \in N$ tal que $N \models ([n], [y]) \in [f]$, luego $L_{\omega_2}[A]$ cumple lo mismo, luego $(n, y) \in f$, es decir, $f(n) \in N$, luego $\alpha \in N$.

Con esto hemos probado que $\omega_1 \cap N$ es un conjunto transitivo, luego es un ordinal. Usando que en $L_{\omega_2}[A]$ el siguiente de un ordinal numerable es numerable concluimos que $\lambda = \omega_1 \cap N$ es, de hecho, un ordinal límite (numerable).

Sea $\pi : N \rightarrow M$ la función colapsante. Se comprueba inmediatamente que $\pi(a) = a$, $\pi(\omega_1) = \lambda$, $\pi(A) = A \cap \lambda$, por lo que M es un modelo transitivo numerable de ZFC-AP+V=L[A \cap λ]. Necesariamente $M = L_\delta[A \cap \lambda]$, donde $\delta < \omega_1$.

Así pues, tenemos que $a \in L_{\omega_1}[A \cap \lambda]$, con $\lambda < \omega_1$. Ahora bien, es claro que $A \cap \lambda \in L_{\lambda+1}[A] \subset L_{\omega_1}[A]$ y éste es un modelo transitivo de ZFC-AP, luego por 13.8 concluimos que $L_{\omega_1}[A \cap \lambda] \subset L_{\omega_1}[A]$. Así pues, $a \in L_{\omega_1}[A]$. ■

Ejercicio: Probar (en ZFC) que si $V = L[A]$ con $A \subset \omega_1$ entonces se cumple \diamond .

Ejercicio: Probar que $V = L[A]$ (para un A adecuado) es consistente con $2^{\aleph_0} = \aleph_5$.
AYUDA: Cualquier extensión genérica de un modelo de $ZFC + V = L$ cumple $V = L[G]$.

Como siguiente aplicación demostraremos que los cardinales débilmente compactos implican la existencia de inmersiones elementales entre los escalones de la jerarquía constructible:

Teorema 13.21 *Sea κ un cardinal regular fuertemente inaccesible^L y tal que no existan κ -árboles de Aronszajn. Entonces, si $\kappa < \alpha < \kappa^+$, existe una inmersión elemental $j : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ (para cierto β) tal que $j(\kappa) > \kappa$ y κ es el mínimo ordinal no fijado.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que es suficiente probar el teorema para α un conjunto no acotado de α 's, más concretamente para los ordinales límite λ tales que $L_\lambda \models \text{ZFC-AP}$. En efecto, si $\alpha < \lambda$ y existe una inmersión elemental $j : L_\alpha \rightarrow L_{\lambda'}$, entonces $j|_{L_\alpha} : L_\alpha \rightarrow L_{j(\alpha)}$ también cumple el enunciado.

En efecto, observemos que la sucesión $\{L_\delta\}_{\delta < \lambda}$ es definible en L_λ , porque es definible en ZF-AP , es decir, existe una fórmula $y = L_\delta \in \text{Form}(\mathcal{L}_0)$ de modo que un $y \in L_\lambda$ cumple $y = L_\delta$ si y sólo si $L_\lambda \models [y] = L_{[\delta]}$.

Por lo tanto, si $x \in L_\alpha$, se cumple que $L_\lambda \models [x] \in L_{[\alpha]}$, luego, al ser j elemental, $L_{\lambda'} \models [j(x)] \in L_{[j(\alpha)]}$, luego $j(x) \in L_{j(\alpha)}$. Esto prueba que en efecto $j[L_\alpha] \subset L_{j(\alpha)}$. Ahora, si $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_0)$ y $a_1, \dots, a_n \in L_\alpha$, tenemos

$$L_\alpha \models \phi[a_1, \dots, a_n] \rightarrow L_\lambda \models (L_{[\alpha]} \models [\phi][[a_1], \dots, [a_n]])$$

$$\rightarrow L_{\lambda'} \models (L_{[j(\alpha)]} \models [j(\phi)][[j(a_1)], \dots, [j(a_n)]]) \rightarrow L_{j(\alpha)} \models \phi[j(a_1), \dots, j(a_n)],$$

donde hemos usado que $j(\phi) = \phi$ porque (podemos suponer que) $\phi \in V_\omega$.

Así pues, tomamos $\kappa < \lambda < \kappa^+$ de modo que $L_\lambda \models \text{ZFC-AP}$. Tomemos una enumeración $\{X_\delta\}_{\delta < \kappa}$ de $\mathcal{P}\kappa \cap L_\lambda$. Para cada $t : \gamma \rightarrow 2$ con $\gamma < \kappa$ sea

$$Y_\delta = \begin{cases} X_\delta & \text{si } t(\delta) = 1, \\ \kappa \setminus X_\delta & \text{si } t(\delta) = 0 \end{cases}$$

y sea $X_t = \bigcap_{\delta < \gamma} Y_\delta$.

Sea $A = \{t \in L \mid \forall \gamma < \kappa (t \in {}^\gamma 2 \wedge |X_t| = \kappa)\}$. Claramente A es un árbol con la inclusión. Como para cada $\gamma < \kappa$ se cumple que $|{}^\gamma 2|^L < \kappa$, es fácil ver que A es un κ -árbol (notemos que $\{X_t\}_{t \in {}^\gamma 2}$ es una partición de κ en menos de κ conjuntos, luego algún $t \in A$ tiene altura γ). Por hipótesis A tiene un camino, el cual determina una función $F : \kappa \rightarrow 2$. Sea U el filtro en $\mathcal{P}\kappa \cap L_\lambda$ generado por los conjuntos $\{X_\delta \mid \delta < \kappa \wedge F(\delta) = 1\} \cup \{\kappa \setminus X_\delta \mid \delta < \kappa \wedge F(\delta) = 0\}$.

El filtro U es casi un ultrafiltro^{L λ} salvo por el hecho de que no pertenece a L_λ . Concretamente cumple:

- a) $\kappa \in U$, $\emptyset \notin U$,

- b) $\bigwedge XY \in U \ X \cap Y \in U$,
 c) $\bigwedge X \in U \bigwedge Y \in L_\lambda (X \subset Y \rightarrow Y \in U)$,
 d) $\bigwedge X \in L_\lambda (X \subset \kappa \rightarrow X \in U \vee \kappa \setminus X \in U)$.

(La última propiedad se cumple porque X es un X_δ .) Más aún, la intersección de menos de κ elementos de U es no vacía (no tiene por qué estar en U porque puede no estar en L_λ).

Estas propiedades son suficientes para definir una ultrapotencia $\text{Ult}_U(L_\lambda)$. En efecto, definimos en $L_\lambda^\kappa \cap L_\lambda$ la relación usual

$$f =_U g \leftrightarrow \{\delta \in \kappa \mid f(\delta) = g(\delta)\} \in U,$$

y en el cociente $\text{Ult}_U^*(L_\lambda)$ definimos la relación

$$[f]^* R [g]^* \leftrightarrow \{\delta \in \kappa \mid f(\delta) \in g(\delta)\} \in U.$$

La demostración del teorema 11.9 se adapta trivialmente sin más que particularizarla a una ultrapotencia en lugar de un ultraproducto y al lenguaje \mathcal{L}_0 de la teoría de conjuntos, comprobando que los conjuntos y funciones involucrados están en L_λ (aquí se usa que $L_\lambda \models \text{ZFC-AP}$).

No hemos de comprobar que R sea conjuntista porque ahora la ultrapotencia es un conjunto, la prueba de que R está bien fundada sirve igual, con lo que podemos formar el colapso transitivo $\text{Ult}_U(L_\lambda)$, así como la inmersión elemental $j : L_\lambda \rightarrow \text{Ult}_U(L_\lambda)$. La ultrapotencia es un modelo transitivo de $\text{ZFC-AP}+V=L$, luego ha de ser un $L_{\lambda'}$, para cierto ordinal λ' . Tenemos, pues, $j : L_\lambda \rightarrow L_{\lambda'}$.

La prueba de que κ es el menor ordinal no fijado (teorema 11.22) se adapta sin dificultad teniendo en cuenta que U es no principal (sus elementos tienen todos cardinal κ) y que si $\{C_\delta\}_{\delta < \gamma} \in L_\lambda$ es una familia de menos de κ elementos de U , su intersección también está en U . Notemos que si d es la identidad en κ entonces $\kappa \leq [d] < j(\kappa)$. ■

Notemos que un cardinal débilmente compacto cumple las hipótesis de este teorema, pero por 13.15 también las cumple \aleph_2 si es que no hay \aleph_2 -árboles de Aronszajn. Lo interesante es que la tesis implica que κ es débilmente compacto^L:

Teorema 13.22 *Si κ es un cardinal inaccesible^L y para cada $\kappa < \alpha < \kappa^+$ existe una inmersión elemental $j : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ tal que κ es el menor ordinal no fijado, entonces κ es débilmente compacto^L.*

DEMOSTRACIÓN: Por la observación tras el teorema 12.13 basta probar que, en L , todo κ -subárbol A de ${}^{<\kappa}2$ tiene un camino. Como κ es fuertemente inaccesible^L, se cumple que $A \subset {}^{<\kappa}2 \subset L_\kappa$ (aplicando 13.18). Así mismo existe $\lambda < \kappa^+$ tal que $A \in L_\lambda$. Podemos exigir que $L_\lambda \models \text{ZFC-AP}$.

Sea $j : L_\lambda \rightarrow L_{\lambda'}$ una inmersión elemental tal que κ sea el mínimo ordinal no fijado. Claramente (A es un árbol de altura κ)^{L λ} , luego $(j(A))$ es un árbol de altura mayor que κ)^{L λ'} , por lo que podemos tomar $f \in j(A)$ de altura κ en $j(A)$.

Ahora bien, si $\delta < \kappa$, entonces $f|_\gamma \in L_\kappa$, luego $j(f|_\gamma) = f|_\gamma$ (porque κ es el menor ordinal no fijado), y como $j(f|_\gamma) \in j(A)$, también $f|_\gamma \in A$, lo que significa que $\{f|_\gamma\}_{\gamma < \kappa}$ es un camino en A (obviamente constructible). ■

Con esto hemos probado:

Teorema 13.23 *Si no existen \aleph_2 -árboles de Aronszajn, entonces \aleph_2 es débilmente compacto^L.*

Así pues, no es posible demostrar la consistencia de que no existan \aleph_2 -árboles de Aronszajn sin suponer al menos la consistencia de que exista un cardinal débilmente compacto. En el capítulo XVII probaremos que esta hipótesis es suficiente.

13.4 La constructibilidad y la jerarquía de Lévy

Las aplicaciones más delicadas de la constructibilidad relativa requieren un análisis más profundo de la definición de la jerarquía constructible $L_\alpha[A]$. En esta sección probaremos que las fórmulas $y = L_\alpha[A]$ y $x \leq_\alpha^A y$ son $\Delta_1^{\text{ZF-AP}}$ y, más aún, que tanto $L_\alpha[A]$ como $x \leq_\alpha^A y$ pueden definirse en cualquier modelo $L_\lambda[A]$, donde $\lambda > \alpha$ es un ordinal límite. Trabajamos en ZF-AP.

Teorema 13.24 *Existe una fórmula $\phi(f, Y, \alpha, A)$, en la que la variable A sólo aparece en subfórmulas $x \in A$, que es Δ_0 y cumple:*

$$a) Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall f \phi(f, Y, \alpha, A).$$

b) Si $\lambda > \omega$ es un ordinal límite, $\alpha < \lambda$ e Y, A son conjuntos cualquiera,

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall f \in L_\lambda[A] \phi(f, Y, \alpha, A).$$

DEMOSTRACIÓN: La fórmula ϕ que hemos de construir es enormemente compleja, así que dejaremos a cargo del lector los últimos detalles sobre el carácter Δ_0 de las fórmulas que consideremos. Por ejemplo, un cuantificador de la forma $\bigwedge x \in \text{Dom } y$ puede acotarse como

$$\bigwedge u \in y \bigwedge v \in u \bigwedge x \in v \bigvee z \in v (u = (x, z) \rightarrow \dots)$$

Similarmente, una igualdad $f(x) = f(y)$ puede expresarse como

$$\bigvee uv \in f \bigvee w \in u \bigvee z \in w (u = (x, z) \wedge v = (y, z)).$$

La técnica que vamos a seguir es ir construyendo fórmulas acotando las variables que podamos con otras variables y las que no podamos las acotaremos por otros objetos de los que ya veremos cómo deshacernos al final. Concretamente, las variables “mal acotadas” se resumirán al final en la variable f del enunciado. Para empezar:

$$Y = \text{Diag}_=(X, n, i, j) \leftrightarrow \bigwedge u \in Y (u : n \longrightarrow X \wedge i \in n \wedge j \in n \wedge u(i) = u(j))$$

$$\wedge \bigwedge u \in X^{<\omega} (\text{Dom } u = n \wedge i \in n \wedge j \in n \wedge u(i) = u(j) \rightarrow u \in Y).$$

Así hemos expresado $Y = \text{Diag}_=(X, n, i, j) \leftrightarrow \alpha(Y, X, n, i, j, X^{<\omega})$, donde la fórmula α es Δ_0 , pero tenemos una variable “mal acotada” por $X^{<\omega}$. Es claro que podemos expresar igualmente la fórmula $Y = \text{Diag}_\in(X, n, i, j)$ y similarmente se llega a una expresión análoga para $Y = \text{Proy}(X, R, n)$. Para $\text{Rel}(X, A, n, i)$ obtenemos una fórmula en la que aparece la variable A en las condiciones del enunciado.

Llamemos $g_{XA} : \omega \times \omega \longrightarrow \mathcal{P}X^{<\omega}$ a la aplicación $g_{XA}(n, k) = \text{Def}_{Ak}(X, n)$. Claramente

$$\begin{aligned} g = g_{XA} &\leftrightarrow g \text{ es una función } \wedge \text{Dom } g = \omega \times \omega \wedge \wedge n \in \omega (\wedge Y \in g(n, 0) \\ &\vee ij \in n (Y = \text{Diag}_=(X, n, i, j) \vee Y = \text{Diag}_\in(X, n, i, j) \vee Y = \text{Rel}(X, A, n, i)) \\ &\wedge \wedge ij \in n (\vee Y \in g(n, 0) Y = \text{Diag}_=(X, n, i, j) \\ &\wedge \vee Y \in g(n, 0) Y = \text{Rel}(X, A, n, i)) \\ &\wedge \wedge n \in \omega \wedge k \in \omega (\wedge Y \in g(n, k+1) (\vee WZ \in g(n, k) (Y = W \vee Y = X^n \setminus W \\ &\vee Y = W \cap Z) \vee \vee Z \in g(n+1, k) Y = \text{Proy}(X, Z, n)) \wedge \\ &\wedge WZ \in g(n, k) (W \in g(n, k+1) \wedge X^n \setminus W \in g(n, k+1) \wedge \\ &W \cap Z \in g(n, k+1)) \wedge \wedge Z \in g(n+1, k) \vee Y \in g(n, k+1) Y = \text{Proy}(X, Z, n)). \end{aligned}$$

Las apariciones de X^n en esta fórmula se pueden cambiar por $X^{<\omega}$. Por ejemplo, $Y = X^n \setminus W$ equivale a

$$\begin{aligned} &\wedge u \in Y (u \in X^{<\omega} \wedge \text{Dom } u = n \wedge u \notin W) \wedge \\ &\wedge u \in X^{<\omega} (\text{Dom } u = n \wedge u \notin W \rightarrow u \in Y). \end{aligned}$$

De este modo queda

$$g = g_{XA} \leftrightarrow \phi(g, X, A, X^{<\omega}, \omega),$$

donde ϕ es una fórmula Δ_0 en la que A sólo aparece en la forma $x \in A$.

Observemos ahora que si $R \in \text{Def}_A(X, n+1)$ y $s \in X^n$, entonces

$$\beta(x, X, s, n) \equiv x = \{u \in X \mid s \cup \{(n, u)\} \in R\}$$

equivale a

$$\begin{aligned} &\wedge u \in x \vee t \in R(t(n) = u \wedge \wedge i \in n t(i) = s(i)) \wedge \\ &\wedge t \in R \wedge u \in X ((t(n) = u \wedge \wedge i \in n t(i) = s(i)) \rightarrow u \in x), \end{aligned}$$

luego β es Δ_0 .

$$\begin{aligned} Y = \mathcal{D}_A X &\leftrightarrow \vee g (\phi(g, X, A, X^{<\omega}, \omega) \wedge \wedge x \in Y \vee nk \in \omega \vee R \in g(n+1, k) \\ &\vee s \in X^{<\omega} (\text{Dom } s = n \wedge \beta(x, X, s, n)) \wedge \wedge nk \in \omega \wedge R \in g(n+1, k) \\ &\wedge s \in X^{<\omega} (\text{Dom } s = n \rightarrow \vee x \in Y \beta(x, X, s, n))). \end{aligned}$$

Así pues, $Y = \mathcal{D}_A X \leftrightarrow \forall g \psi(g, Y, X, A, X^{<\omega}, \omega)$, donde ψ es Δ_0 y cuando esta fórmula se cumple entonces $g = g_{XA}$.

Ahora:

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall h (h \text{ es una función } \wedge \alpha \in \Omega \wedge \text{Dom } h = \alpha + 1 \wedge h(0) = \emptyset \wedge \\ \wedge \lambda \in \alpha + 1 \ h(\lambda) = \bigcup_{\delta < \alpha} h(\delta) \wedge \wedge \beta \in \alpha \forall g \psi(g, h(\beta + 1), h(\beta), A, h(\beta)^{<\omega}, \omega) \\ \wedge Y = h(\alpha)).$$

La estructura de esta fórmula es la siguiente:

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall h u (u = \omega \wedge [\text{fórmula } \Delta_0] \wedge \wedge \beta \in \alpha \forall g v \forall x \in \text{Rang } h \\ (x = h(\beta) \wedge v = x^{<\omega} \wedge \psi(g, h(\beta + 1), h(\beta), A, v, u))).$$

A su vez,

$$v = x^{<\omega} \leftrightarrow \forall p (p \text{ es una función } \wedge \text{Dom } h = \omega \wedge v = \bigcup_{x \in \text{Rang } p} x$$

$$\wedge p(0) = \emptyset \wedge \wedge n \in \omega \wedge s \in p(n+1) \forall z \in p(n) \forall a \in x (s = z \cup \{(n, a)\}) \\ \wedge \wedge n \in \omega \wedge z \in h(n) \wedge a \in x \forall s \in h(n+1) (s = z \cup \{(n, a)\})),$$

donde la función p es la sucesión $\{x^n\}_{n \in \omega}$. Esto reduce nuestra fórmula a

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall h u ([\text{fórmula } \Delta_0] \wedge \wedge \beta \in \alpha \forall g v p ([\text{fórmula } \Delta_0]),$$

de modo que si esta fórmula se cumple entonces las variables no acotadas son necesariamente

$$h = \{L_\beta[A]\}_{\beta \leq \alpha}, \quad u = \omega, \quad g = g_{L_\beta[A]A}, \quad v = L_\beta[A]^{<\omega}, \quad p = \{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}.$$

Todavía podemos simplificar un poco más si observamos que v (es decir, $L_\beta[A]^{<\omega}$) aparece (o se puede hacer que aparezca) siempre en la forma $\wedge x \in v$ o $\forall x \in v$, y esto puede sustituirse por $\wedge n \in \omega \wedge x \in p(n)$ o $\forall n \in \omega \forall x \in p(n)$, por lo que podemos suprimir la variable v y resulta

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall h u ([\text{fórmula } \Delta_0] \wedge \wedge \beta \in \alpha \forall g p ([\text{fórmula } \Delta_0])).$$

Ahora nos molesta el cuantificador $\wedge \beta \in \alpha$, que nos impide extraer las variables g y p . Aplicamos un truco:

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall h u F ([\text{fórmula } \Delta_0] \wedge F \text{ es una función } \wedge \text{Dom } F = \alpha \wedge \\ \wedge \beta < \alpha \forall w \in F(\beta) \forall g p \in w (F(\beta) = (f, h) \wedge [\text{fórmula } \Delta_0])).$$

Así $Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall h y F ([\text{fórmula } \Delta_0])$, de modo que si se cumple esta fórmula las variables no acotadas son necesariamente

$$h = \{L_\beta[A]\}_{\beta \leq \alpha}, \quad u = \omega, \quad F = \{(g_{L_\beta[A]A}, \{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega})\}_{\beta < \alpha}.$$

Una simple manipulación reduce esta expresión a

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \forall f \phi(f, Y, \alpha, A),$$

donde ϕ es Δ_0 y cuando esta fórmula se cumple la variable f es necesariamente

$$f = f_\alpha = (\omega, \{L_\beta[A]\}_{\beta \leq \alpha}, \{g_{L_\beta[A] A}\}_{\beta < \alpha}, \{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha}).$$

Para demostrar b) hemos de comprobar que si $\alpha < \lambda$ entonces $f_\alpha \in L_\lambda[A]$. En primer lugar observamos que si $x, y \in L_\lambda[A]$ entonces $x, y \in L_\delta[A]$, para un $\delta < \lambda$. A su vez $\{x\}, \{x, y\} \in L_{\delta+1}[A]$ y $(x, y) \in L_{\delta+2}[A] \subset L_\lambda[A]$. Esto implica que basta comprobar que las componentes de f_α están en $L_\lambda[A]$. Ciertamente ω lo está.

Ahora veamos que si $\{L_\beta[A]\}_{\beta \leq \alpha} \in L_\lambda[A]$ también $\{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha} \in L_\lambda$.

En efecto, sea $\alpha \leq \epsilon < \lambda$ tal que $\{L_\beta[A]\}_{\beta \leq \alpha} \in L_\epsilon[A]$. Entonces, para cada $\beta < \lambda$ tenemos que $L_\beta[A] \in L_\epsilon[A]$ por transitividad, para cada $n \in \omega$ tenemos que $n \times L_\beta[A] \subset L_{\epsilon+2}[A]$ y entonces $L_\beta[A]^n \subset L_{\epsilon+3}[A]$, pues cada $s \in L_\beta^n[A]$ es un subconjunto finito de $L_{\epsilon+2}[A]$. Ahora bien,

$$L_\beta[A]^n = \{s \in L_{\epsilon+3}[A] \mid (s : n \longrightarrow L_\beta[A])^{L_{\epsilon+3}[A]}\}.$$

Notemos que podemos relativizar a $L_{\epsilon+3}[A]$ porque “ser una aplicación” es Δ_0 y $L_{\epsilon+3}[A]$ es transitivo. Esto prueba que $L_\beta[A]^n \in L_{\epsilon+4}[A]$. Así, $(n, L_\beta[A]^n) \in L_{\epsilon+6}[A]$ y por lo tanto $\{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha} \in L_{\epsilon+6}[A]$. Ahora observamos que

$$\{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha} = \{x \in L_{\epsilon+6}[A] \mid \phi^{L_{\epsilon+6}[A]}(x, \omega, L_\beta[A])\},$$

donde $\phi \equiv \forall ns(n \in y \wedge s : n \longrightarrow z)$. En consecuencia $\{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha} \in L_{\epsilon+7}[A]$.

Ahora, $(\beta, \{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha}) \in L_{\epsilon+9}$, luego $\{\{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha}\}_{\beta < \alpha} \in L_{\epsilon+9}[A]$ y se comprueba que es definible, de modo que

$$\{\{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha}\}_{\beta < \alpha} \in L_{\epsilon+10}[A] \subset L_\lambda[A].$$

(La definición sería, informalmente, “ $\{\{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha}\}_{\beta < \alpha}$ es el conjunto de los $x \in L_{\epsilon+9}[A]$ tales que existen $\beta, y \in L_{\epsilon+9}[A]$ de modo que β es un ordinal y y es una aplicación de dominio ω tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que $y(n)$ es una aplicación de n en el β -ésimo término de $\{L_\beta\}_{\beta \leq \alpha}$ ”. Aquí es donde usamos que $\{L_\beta[A]\}_{\beta \leq \alpha} \in L_\epsilon[A]$.)

Probamos ahora que $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \alpha}, \{g_{L_\beta[A] A}\}_{\beta < \alpha} \in L_\lambda[A]$ para todo $\alpha < \lambda$ por inducción sobre λ . Lo suponemos cierto para todo ordinal límite distinto de ω menor que λ y ahora razonamos a su vez por inducción sobre $\alpha < \lambda$.

Para $\alpha = 0$ es trivial. Supongamos que $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \alpha}, \{g_{L_\beta[A] A}\}_{\beta < \alpha} \in L_\lambda[A]$. Sabemos que $L_\alpha[A] \in L_\lambda[A]$, luego también $\{(\alpha, L_\alpha[A])\} \in L_\lambda[A]$. Se comprueba inmediatamente que si $x, y \in L_\delta[A]$ entonces $x \cup y \in L_{\delta+1}[A]$, con lo que $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \alpha} \cup \{(\alpha, L_\alpha[A])\} \in L_\lambda[A]$, es decir, $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \alpha+1} \in L_\lambda[A]$.

Por el mismo argumento, basta probar que $g_{L_\alpha[A]A} \in L_\lambda[A]$. Tomemos $\omega \leq \epsilon < \lambda$ tal que $L_\alpha[A] \in L_\epsilon[A]$. Igual que hemos razonado más arriba, concluimos que $L_\alpha[A]^n \in L_{\epsilon+4}[A]$. Por inducción sobre k probamos ahora que $\text{Def}_{A^k}(L_\alpha[A], n) \subset L_{\epsilon+5}[A]$. Para $k = 0$ es fácil. Si $R \in \text{Def}_{A^k}(L_\alpha, n)$ cumple $R \in L_{\epsilon+5}[A]$, entonces

$$L_\alpha[A]^n \setminus R = L_\alpha[A]^n \cap (L_{\epsilon+4}[A] \setminus R) \in \mathcal{D}_A L_{\epsilon+4}[A] = L_{\epsilon+5}[A],$$

pues el complementario de una parte definible es definible y la intersección de dos partes definibles es definible. Similarmente se razona con las demás posibilidades.

En consecuencia $g_{L_\alpha[A]A} \subset L_{\epsilon+7}[A]$ (necesitamos dos pasos para formar pares ordenados). Los subconjuntos finitos de $g_{L_\alpha[A]A}$ están en $L_{\epsilon+8}[A]$.

Ahora observamos que para definir $\text{Def}_{A^{k+1}}(X, n)$ hace falta tener definidos los conjuntos $\text{Def}_{A^k}(X, n+1)$, para definir los cuales hacen falta los conjuntos $\text{Def}_{A^{k-1}}(X, n+2)$, etc., luego para definir $\text{Def}_{A^k}(X, n)$ se necesitan los conjuntos $\text{Def}_{A^i}(X, j)$ con $i \in k$, $j \in n+k+1$, pero ninguno más. Esto significa que no necesitamos toda la función g_{XA} , sino únicamente su restricción al conjunto finito $(n+k+1) \times (k+1)$. Llamemos $g_{X,A,n,k}$ a esta restricción. Del mismo modo que hemos construido una fórmula Δ_0 que caracteriza a g_{XA} , podemos construir una fórmula Δ_0 tal que

$$g = g_{X,A,n,k} \leftrightarrow \phi(n, k, g, X, A, X^{<\omega}, \omega).$$

Simplemente hay que modificar la descripción del dominio de g , lo cual no plantea ningún problema técnico.

Tenemos que todas las funciones $g_{L_\alpha[A],A,n,k}$ están en $L_{\epsilon+8}[A]$. Por otra parte, $L_\alpha[A]^{<\omega} \in L_{\epsilon+4}[A]$, luego podemos definir $g_{L_\alpha[A]A}$ como el conjunto de todas las ternas $(n, k, x) \in L_{\epsilon+8}[A]$ tales que existe una función $g \in L_{\epsilon+8}[A]$ que cumple

$$\phi(n, k, g, L_\alpha[A], A, L_\alpha^{<\omega}, \omega).$$

Esto prueba que $g_{L_\alpha[A]A} \in L_{\epsilon+9}[A] \subset L_\lambda[A]$.

Nos falta el caso límite de la inducción: suponemos que α es un ordinal límite y que para todo $\delta < \alpha$ se cumple $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \delta}, \{g_{L_\beta[A]A}\}_{\beta < \delta} \in L_\lambda[A]$. Si $\alpha > \omega$, la hipótesis de inducción sobre λ nos da de hecho que

$$\{L_\beta[A]\}_{\beta < \delta}, \{g_{L_\beta[A]A}\}_{\beta < \delta} \in L_\alpha[A].$$

El caso $\alpha = \omega$ hay que tratarlo aparte: claramente $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \delta} \in L_\alpha[A]$ y, por otra parte, para $\beta < \omega$, $L_\beta[A]^n \subset L_{\beta+2}[A]$ y $\text{Def}_A(L_\beta[A], n) \subset L_{\beta+3}[A]$ (notemos que todos los conjuntos son finitos). Por tanto $g_{L_\beta[A]A} \subset L_\omega[A]$ y es definible mediante la fórmula $\phi(g, L_\beta[A], A, L_\beta[A]^{<\omega}, \omega)$. Todos los parámetros están en $L_{\omega+1}[A]$, luego $g_{L_\beta[A]A} \in L_{\omega+2}[A]$ (En realidad A no tiene por qué estar en $L_{\omega+1}[A]$, pero no importa, porque podemos usarlo en la definición a través del relator R de \mathcal{L}_R). De aquí se sigue que $\{g_{L_\beta[A]A}\}_{\beta < \delta} \in L_{\omega+5}[A]$ por argumentos de finitud.

En cualquier caso, tanto si $\alpha = \omega$ como si no, tenemos que existe un $\epsilon < \lambda$ tal que $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \delta}, \{g_{L_\beta[A]A}\}_{\beta < \delta} \in L_\epsilon[A]$ para todo $\delta < \alpha$. Hemos probado antes que $\{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \delta} \in L_{\epsilon+10}[A]$, luego $f_\delta \in L_{\epsilon+16}[A]$ para todo $\delta < \alpha$. Ahora es fácil ver que $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \alpha}$ y $\{g_{L_\beta[A]A}\}_{\beta < \alpha}$ son definibles en $L_{\epsilon+16}[A]$. Para la primera sucesión tenemos, informalmente, que “ $\{L_\beta[A]\}_{\beta < \alpha}$ es el conjunto de todos los $x \in L_{\epsilon+16}[A]$ tales que existen $\beta, y \in L_{\epsilon+16}[A]$ de modo que $x = (\beta, y)$ y existe un $f \in L_{\epsilon+16}[A]$ tal que $\phi^{L_{\epsilon+16}[A]}(f, y, \beta, A)$ ”. Para la segunda tenemos una descripción similar usando la fórmula $\phi(g, L_\beta[A], A, L_\beta[A]^{<\omega}, \omega)$. ■

En particular hemos probado que $y = L_\alpha[A]$ es $\Sigma_1^{\text{ZF-AP}}$. El carácter Δ_1 es ahora inmediato:

Teorema 13.25 *La fórmula $y = L_\alpha[A]$ es $\Delta_1^{\text{ZF-AP}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \alpha \in \Omega \wedge \bigwedge z (z = L_\alpha[A] \rightarrow z = y),$$

y esta fórmula es Π_1 . ■

A su vez, de aquí deducimos que la clase $L[A]$ es $\Sigma_1^{\text{ZF-AP}}$ y que el axioma $V = L[A]$ (o sea, $\bigwedge x x \in L[A]$) es $\Pi_2^{\text{ZF-AP}}$.

Veamos ahora que el buen orden constructible es también Σ_1 :

Teorema 13.26 *Existe una fórmula $\psi(f, Y, \alpha, A)$ en la que la variable A sólo aparece en subfórmulas $x \in A$, que es Δ_0 y cumple:*

a) $Y = \leq_\alpha^A \leftrightarrow \bigvee f \psi(f, Y, \alpha, A)$.

b) Si $\lambda > \omega$ es un ordinal límite, $\alpha < \lambda$ e Y, A son conjuntos cualquiera,

$$Y = \leq_\alpha^A \leftrightarrow \bigvee f \in L_\lambda[A] \psi(f, Y, \alpha, A).$$

DEMOSTRACIÓN: La prueba de este teorema sigue la misma línea que la de 13.24, pero los detalles técnicos son más complicados porque la definición del orden constructible es formalmente más compleja. Por ello omitiremos algunos detalles. Conservamos la notación de 13.24.

Llamemos g'_{XA} a la aplicación de dominio $\omega \times \omega$ dada por $g'_{XA}(n, k) = \leq_{X, A, n, k}$, donde $\leq_{X, A, n, k}$ es el buen orden en $\text{Def}_{Ak}(X, n)$ definido en la discusión previa al teorema 3.16 (modificada de forma obvia para $\text{Def}_{Ak}(X, n)$ en lugar de $\text{Def}_k(X, n)$). Se demuestra que

$$g' = g'_{XA} \leftrightarrow \bigvee g (\phi(g, X, A, X^{<\omega}, \omega) \wedge \phi'(g', g, X, A, X^{<\omega}, \omega)),$$

donde ϕ' es una fórmula Δ_0 . Llamando ϕ' a $\phi \wedge \phi'$ tenemos

$$g' = g'_{XA} \leftrightarrow \bigvee g \phi'(g', g, X, A, X^{<\omega}, \omega),$$

de modo que si se cumple esta fórmula entonces $g = g_{XA}$. Seguidamente se prueba que si \leq es un buen orden en un conjunto transitivo X y \leq_{XA}^* es su extensión a $\mathcal{D}_A X$, entonces

$$Y = \leq_{XA}^* \leftrightarrow \bigvee g g' \psi'(g, g', Y, X, A, X^{<\omega}, \leq, \omega),$$

donde ψ' es Δ_0 y si se cumple esta fórmula entonces $g = g_{XA}$ y $g' = g'_{XA}$. Por consiguiente,

$$Y = \leq_\alpha^A \leftrightarrow \bigvee abcdh(a = \omega \wedge b = \{L_\beta[A]\}_{\beta \leq \alpha} \wedge c = \{g_{L_\beta[A]} A\}_{\beta < \alpha}$$

$$\wedge d = \{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha} \wedge h \text{ es una función } \wedge \alpha \in \Omega \wedge \text{Dom } h = \alpha + 1$$

$$\wedge h(0) = \emptyset \wedge \bigwedge \lambda \in \alpha + 1 \ h(\lambda) = \bigcup_{\delta < \lambda} h(\delta) \wedge$$

$$\bigwedge \beta \in \alpha \bigvee g g' \psi(g, g', h(\beta + 1), b(\beta), A, b(\beta)^{<\omega} h(\beta), a) \wedge Y = h(\alpha)).$$

Las apariciones de $b(\beta)^{<\omega}$ pueden sustituirse por d , con lo que llegamos a una fórmula con la estructura siguiente:

$$Y = \leq_\alpha^A \leftrightarrow \bigvee abcdh(a = \omega \wedge b = \{L_\beta[A]\}_{\beta \leq \alpha} \wedge c = \{g_{L_\beta[A]} A\}_{\beta < \alpha}$$

$$\wedge d = \{\{L_\beta[A]^n\}_{n \in \omega}\}_{\beta < \alpha} \wedge [\text{fórmula } \Delta_0] \wedge \bigwedge \beta \in \alpha \bigvee g g' [\text{fórmula } \Delta_0]).$$

A su vez esto equivale a

$$Y = \leq_\alpha^A \leftrightarrow \bigvee f Y' h(\phi(f, Y', \alpha, A) \wedge [\text{fórmula } \Delta_0] \wedge$$

$$\bigwedge \beta \in \alpha \bigvee g g' \bigvee abcd [\text{acotadas por } f](f = (a, b, c, d) \wedge [\text{fórmula } \Delta_0]).$$

En definitiva:

$$Y = \leq_\alpha^A \leftrightarrow \bigvee f Y' h(\phi(f, Y', \alpha, A) \wedge [\text{fórmula } \Delta_0] \wedge \bigwedge \beta \in \alpha \bigvee g g' [\text{fórmula } \Delta_0]).$$

Ahora basta aplicar el mismo truco que en 13.24 para extraer todos los cuantificadores no acotados y resumirlos en uno solo.

No entraremos en los detalles del apartado b), que se prueba exactamente igual que el apartado correspondiente de 13.24. ■

El mismo argumento empleado en 13.25 muestra ahora que $y = \leq_\alpha^A$ es en realidad $\Delta_1^{\text{ZF}-\text{AP}}$. Lo mismo puede decirse de la fórmula $u \leq_\alpha^A v$, pues

$$u \leq_\alpha^A v \leftrightarrow \bigvee y (y = \leq_\alpha^A \wedge (u, v) \in y) \leftrightarrow \bigwedge y (y = \leq_\alpha^A \rightarrow (u, v) \in y).$$

13.5 Consecuencias

En esta sección extraeremos algunas consecuencias de los resultados de la sección anterior. En general, cuando consideremos a un conjunto $L_\lambda[A]$ como modelo del lenguaje \mathcal{L}_R , entenderemos que nos referimos al modelo $(L_\lambda[A], A)$, es decir, que interpretamos el relator R como la pertenencia a A .

Observemos ahora que si $x \subset V_\omega = L_\omega[x]$, resulta que $x \in L_{\omega+1}[x]$, pues

$$x = \{u \in L_{\omega+1}[x] \mid L_\omega[x] \models R[u]\} \in \mathcal{D}_A(L_\omega[x]) = L_{\omega+1}[x].$$

Por consiguiente, si $\lambda > \omega$, tenemos que $x \in L_\lambda[x]$, y el teorema 13.24 nos dice que $L[x]$ es definible en $L_\lambda[x]$, de manera que¹

$$L_\lambda[x] \models V = L[[x]].$$

Si no queremos dejar variables libres, lo máximo que podemos decir es que

$$L_\lambda[x] \models \bigvee z V = L[z].$$

Así, si (M, a) es un modelo transitivo de \mathcal{L}_R elementalmente equivalente a $L_\lambda[x]$ (recordemos que esto significa que satisface las mismas sentencias, y se representa por $(M, a) \equiv L_\lambda[x]$), también cumplirá esta sentencia, es decir, existe $x' \in M$ tal que $(V = L[x'])^M$, y el teorema 13.8 nos permite concluir que $M = L_{\lambda'}[x']$, para cierto λ' .

Vemos pues que, en principio, al pasar de $L_\lambda[x]$ a un modelo transitivo elementalmente equivalente cambiamos de λ y cambiamos de x . Sin embargo, el teorema siguiente nos dice que en realidad no cambiamos de x , sino que x está determinado por las sentencias de \mathcal{L}_R verdaderas en $L_\lambda[x]$:

Teorema 13.27 *Sea $\lambda > \omega$ un ordinal límite, sea $x \subset V_\omega$, sea M un conjunto transitivo y a un conjunto arbitrario. Supongamos que $(M, a) \equiv L_\lambda[x]$. Entonces $a = x$ y $M = L_{\lambda'}[x]$, donde $\lambda' = \Omega^M$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi(f, Y, \alpha)$ la fórmula del teorema 13.24 (hemos eliminado la última variable porque la consideramos como fórmula de \mathcal{L}_R). Como

$$L_\lambda[A] \models \bigvee f Y \alpha(\alpha = \omega \wedge \phi(f, Y, \alpha) \wedge \bigwedge y (Ry \rightarrow y \in Y)),$$

el modelo (M, a) cumple lo mismo, lo que se traduce en que $V_\omega = L_\omega[a] \subset M$ y $a \subset V_\omega$.

La clave de la prueba es que para cada $u \in V_\omega$ existe $\alpha_u(z) \in \text{Form}(\mathcal{L}_0)$ con z como única variable libre tal que si N es un conjunto transitivo y $v \in N$, entonces $N \models \alpha_u[v] \leftrightarrow v = u$. En efecto, si $u = \emptyset$ sirve $\alpha_\emptyset(z) = \bigwedge u y \notin z$. En caso contrario, si el resultado es cierto para los elementos de $u = \{a_1, \dots, a_n\}$, entonces sirve

$$\begin{aligned} \alpha_u(z) = & \bigvee y_1 \cdots y_n (\alpha_{a_1}(y_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_{a_n}(y_n) \wedge y_1 \in z \wedge \cdots \wedge y_n \in z \\ & \wedge \bigwedge w (w \in z \rightarrow w = y_1 \vee \cdots \vee w = y_n)). \end{aligned}$$

¹Notemos los dobles corchetes: $L_\lambda[x]$ satisface la fórmula $V = L[z]$ cuando la variable z se interpreta como x , lo cual solemos representar poniendo $[x]$ en el lugar de z .

Así, si $u \in x$ entonces $L_\lambda[x] \models \forall y(\alpha_u(y) \wedge Ry)$, luego (M, a) cumple lo mismo, lo que implica que $u \in a$. La inclusión contraria se prueba igualmente, con lo que $a = x$.

Por el teorema 13.24, tenemos que

$$L_\lambda[x] \models \bigwedge \alpha \forall f Y \phi(f, Y, \alpha) \wedge \bigwedge u \forall f Y \alpha(\phi(f, Y, \alpha) \wedge u \in Y).$$

El hecho de que (M, x) cumpla esto mismo se traduce en que para todo ordinal $\alpha < \lambda'$ se cumple $L_\alpha[x] \in M$ y para todo $u \in M$ existe un $\alpha < \lambda'$ tal que $u \in L_\alpha[x]$, pero esto quiere decir que $M = L_{\lambda'}[x]$. ■

Ejercicio: Probar que si existe un cardinal de Ramsey entonces \aleph_1 es inaccesible^L. AYUDA: Generalizar 12.32 (para \aleph_1) y usar 13.12.

Ahora pasamos a ocuparnos de otra característica de los modelos $L_\lambda[A]$. Se trata de la existencia de funciones de Skolem definibles.

Sea $\psi(f, Y, \alpha, A)$ la fórmula del teorema 13.26 y sea $\lambda > \omega$ un ordinal límite. Sea

$$\chi(x, y, A) \equiv \forall f Y \alpha(\psi(f, Y, \alpha, A) \wedge (x, y) \in Y).$$

De este modo, si $x, y \in L[A]$, se cumple $x \preceq^A y \leftrightarrow \chi(x, y, A)$. Más aún, si $x, y \in L_\lambda[A]$ se cumple $x \preceq^A y \leftrightarrow \chi^{L_\lambda[A]}(x, y, A)$.

La fórmula metamatemática χ nos permite definir una fórmula (matemática) $\chi(x, y) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ (donde la variable A ha sido sustituida por el relator R) de modo que si $x, y \in L_\lambda[A]$ entonces

$$x \preceq^A y \leftrightarrow L_\lambda[A] \models \chi(x, y).$$

Notemos que ahora χ es un designador (un término sin variables libres) del lenguaje formal (metamatemático) \mathcal{L}_m de la teoría de conjuntos que representa a una fórmula de \mathcal{L}_R con dos variables libres. Es importante destacar que χ no depende de λ .

Sea M un modelo de \mathcal{L}_R elementalmente equivalente a $L_\lambda[A]$. Consideremos una fórmula $\phi(x_0, \dots, x_n)$ de \mathcal{L}_R cuyas variables libres sean exactamente las indicadas y sean $a_1, \dots, a_n \in M$.

Si $\forall a \in M M \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$, entonces existe un único $a \in M$ tal que

$$M \models (\phi(x_0, \dots, x_n) \wedge \bigwedge y(\phi(y, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \chi(x_0, y)))[a, a_1, \dots, a_n].$$

Esto se debe a que

$$L_\lambda[A] \models \bigwedge x_1 \cdots x_n (\bigvee x_0 \phi(x_0, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee^1 x_0 (\phi(x_0, \dots, x_n) \wedge \bigwedge y(\phi(y, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \chi(x_0, y))))),$$

y por consiguiente esta sentencia se cumple también en M .

Definamos $h_\phi : M^n \longrightarrow M$ como la función dada por

$$h_\phi(a_1, \dots, a_n) = a \leftrightarrow M \models (\phi(x_0, \dots, x_n) \wedge \bigwedge y (\phi(y, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \chi(x_0, y)) \\ \vee (\neg \bigvee y \phi(y, x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge y y \notin x_0))[a, a_1, \dots, a_n].$$

Así, si $\bigvee a \in M$ $M \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$, también

$$M \models \phi[h_\phi(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n],$$

es decir, las funciones h_ϕ son funciones de Skolem para M con la propiedad adicional de que existe una fórmula $\psi_\phi(x_0, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ tal que

$$h_\phi(a_1, \dots, a_n) = a \leftrightarrow M \models \psi_\phi[a, a_1, \dots, a_n].$$

Más aún, la fórmula ψ_ϕ no depende de M ni de λ ni de A . Esta propiedad se expresa diciendo que las funciones h_ϕ son *uniformemente definibles* en M . Se comprueba inmediatamente por inducción que para todo término de Skolem $t(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L}_R existe una fórmula $\psi_t(x_0, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ tal que

$$M(t)[a_1, \dots, a_n] = a \leftrightarrow M \models \psi_t[a, a_1, \dots, a_n].$$

De aquí se sigue a su vez que para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\overline{\mathcal{L}}_R)$ (recordemos que $\overline{\mathcal{L}}_R$ es el lenguaje \mathcal{L}_R extendido con los términos de Skolem) existe una fórmula $\psi_\phi \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ tal que

$$M \models \phi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow M \models \psi_\phi[a_1, \dots, a_n],$$

de modo que ψ_ϕ sólo depende de ϕ (no de M , λ o A).

Una consecuencia es que si M y N son modelos de \mathcal{L}_R elementalmente equivalentes a $L_\lambda[A]$ y $L_{\lambda'}[A']$ respectivamente, y $j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental (de modelos de \mathcal{L}_R), entonces j también es una inmersión elemental de modelos de $\overline{\mathcal{L}}_R$. En particular, si $t(x_1, \dots, x_n)$ es un término de Skolem y $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$j(M(t)[a_1, \dots, a_n]) = N(t)[j(a_1), \dots, j(a_n)].$$

A su vez esto implica que si $X \subset M$, entonces $j[N(X)] = N(j[X])$.

13.6 El teorema de Lévy-Shoenfield

Vamos a probar un resultado técnico que necesitaremos en el capítulo siguiente. Se trata de que las fórmulas Σ_1 son absolutas para los modelos $L[a]$, con $a \subset V_\omega$. Necesitamos algunos resultados previos.

Definición 13.28 Sea \mathcal{L} un lenguaje formal. Una sentencia de \mathcal{L} es una *sentencia* $\bigwedge \bigvee$ si es de la forma

$$\bigwedge x_1 \cdots x_m \bigvee y_1 \cdots y_n \phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

donde ϕ es una fórmula de \mathcal{L} sin cuantificadores.

Teorema 13.29 Sea $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ una cadena de modelos de un lenguaje \mathcal{L} de modo que cada M_i sea un submodelo de M_{i+1} . Sea

$$\theta = \bigwedge x_1 \cdots x_m \bigvee y_1 \cdots y_n \phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

una sentencia $\bigwedge \bigvee$ de \mathcal{L} . Supongamos que para todos los $x_1, \dots, x_m \in M_k$ existen $y_1, \dots, y_n \in M_{k+1}$ tales que $M_{k+1} \models \phi[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$ (en realidad basta con que esto se cumpla para todo k suficientemente grande). Sea $M = \bigcup_{k \in \omega} M_k$ (es decir, M es el modelo de \mathcal{L} cuyo universo es la unión de los universos de los modelos M_k y en el que los relatores funtores y constantes se interpretan extendiendo las interpretaciones en cada M_k). Entonces $M \models \theta$.

DEMOSTRACIÓN: Si tomamos $x_1, \dots, x_m \in M$, existe un $k \in \omega$ tal que $x_1, \dots, x_m \in M_k$, luego por hipótesis existen $y_1, \dots, y_n \in M_{k+1}$ tales que $M_{k+1} \models \phi[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$. Como ϕ no tiene cuantificadores, una simple inducción sobre su longitud prueba que $M \models \phi[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$. Es claro entonces que $M \models \theta$. ■

Teorema 13.30 (de la forma normal de Skolem) Sea ϕ una sentencia de un lenguaje forma \mathcal{L} . Entonces existe una sentencia $\bigwedge \bigvee \bar{\phi}$ de un lenguaje formal $\bar{\mathcal{L}}$ que consta de los mismos signos de \mathcal{L} más ciertos relatores adicionales R_1, \dots, R_k de manera que

- Si U es un modelo de \mathcal{L} y $U \models \phi$, existen relaciones $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k$ en U tales que si \bar{U} es el modelo de $\bar{\mathcal{L}}$ que extiende a U interpretando los relatores R_i como \bar{R}_i , entonces $\bar{U} \models \bar{\phi}$.
- Si \bar{U} es un modelo de $\bar{\mathcal{L}}$ tal que $\bar{U} \models \bar{\phi}$ y U es el modelo de \mathcal{L} que resulta de olvidar los relatores R_1, \dots, R_k , entonces $U \models \phi$.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que ϕ está en forma prenexa, es decir, que consta de una sucesión de cuantificadores seguida de una fórmula sin cuantificadores (toda fórmula es equivalente a otra fórmula en forma prenexa).

Por claridad vamos a suponer que

$$\phi = \bigvee u \bigwedge v \bigvee w \bigwedge xy \bigvee z \psi(u, v, w, x, y, z),$$

donde ψ no tiene cuantificadores, aunque el argumento es completamente general. La idea es sustituir

$$\begin{array}{ll} \bigvee z \psi(u, v, w, x, y, z) & \text{por } P(u, v, w, x, y), \\ \bigwedge xy \bigvee z \psi(u, v, w, x, y, z) & \text{por } Q(u, v, w), \\ \bigvee w \bigwedge xy \bigvee z \psi(u, v, w, x, y, z) & \text{por } R(u, v), \\ \bigwedge v \bigvee w \bigwedge xy \bigvee z \psi(u, v, w, x, y, z) & \text{por } S(u) \end{array}$$

y adjuntar las “definiciones” de los relatores introducidos. Concretamente, definimos $\bar{\mathcal{L}}$ como el lenguaje que tiene los relatores adicionales P, Q, R y S y consideramos la sentencia

$$\begin{aligned} & \bigwedge uvwxy (P(u, v, w, x, y) \leftrightarrow \bigvee z \psi(u, v, w, x, y, z)) \wedge \\ & \bigwedge uvw (Q(u, v, w) \leftrightarrow \bigwedge xy P(u, v, w, x, y)) \wedge \bigwedge uv (R(u, v) \leftrightarrow \bigvee w Q(u, v, w)) \\ & \wedge \bigwedge u (S(u) \leftrightarrow \bigwedge v R(u, v)) \wedge \bigvee u S(u). \end{aligned}$$

Claramente, esta sentencia es equivalente a

$$\begin{aligned} & \bigwedge uvwxy \bigvee z (P(u, v, w, x, y) \leftrightarrow \psi(u, v, w, x, y, z)) \wedge \\ & \bigwedge uvwxy (Q(u, v, w) \leftrightarrow P(u, v, w, x, y)) \wedge \bigwedge uv \bigvee w (R(u, v) \leftrightarrow Q(u, v, w)) \\ & \wedge \bigwedge uv (S(u) \leftrightarrow R(u, v)) \wedge \bigvee u S(u). \end{aligned}$$

Cambiando las variables ligadas obtenemos otra sentencia equivalente:

$$\begin{aligned} & \bigwedge uvwxy \bigvee p (P(u, v, w, x, y) \leftrightarrow \psi(u, v, w, x, y, p)) \wedge \\ & \bigwedge uvwxy (Q(u, v, w) \leftrightarrow P(u, v, w, x, y)) \wedge \bigwedge uv \bigvee q (R(u, v) \leftrightarrow Q(u, v, q)) \\ & \wedge \bigwedge uv (S(u) \leftrightarrow R(u, v)) \wedge \bigvee r S(r), \end{aligned}$$

que a su vez equivale a

$$\begin{aligned} & \bigwedge uvwxy (\bigvee p (P(u, v, w, x, y) \leftrightarrow \psi(u, v, w, x, y, p)) \wedge \\ & (Q(u, v, w) \leftrightarrow P(u, v, w, x, y)) \wedge \bigvee q (R(u, v) \leftrightarrow Q(u, v, q)) \\ & \wedge (S(u) \leftrightarrow R(u, v)) \wedge \bigvee r S(r)), \end{aligned}$$

y ahora podemos extraer los particularizadores:

$$\begin{aligned} & \bigwedge uvwxy \bigvee pqr ((P(u, v, w, x, y) \leftrightarrow \psi(u, v, w, x, y, p)) \wedge \\ & (Q(u, v, w) \leftrightarrow P(u, v, w, x, y)) \wedge (R(u, v) \leftrightarrow Q(u, v, q)) \\ & \wedge (S(u) \leftrightarrow R(u, v)) \wedge S(r)), \end{aligned}$$

con lo que hemos llegado a una sentencia $\bar{\phi}$ del tipo requerido. Por la construcción es claro que $\bar{\phi}$ es verdadera en un modelo de $\bar{\mathcal{L}}$ si y sólo si lo es ϕ . Ahora es fácil probar el teorema. ■

Teorema 13.31 *Sea M un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L} \in L$ que conste de relatores \in, R_1, \dots, R_k y constantes $\{c_n\}_{n \in \omega}$. Sean $E, \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k$ las interpretaciones en M de los relatores y supongamos que E es una relación bien fundada. Sea S un conjunto de sentencias $\bigwedge \bigvee$ de \mathcal{L} tal que $M \models S$. Entonces existe un modelo bien fundado N de \mathcal{L} tal que $N \models S$ y $N \in L[S]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = \{\phi_n\}_{n \in \omega}$. Repitiendo sentencias o añadiendo alguna, podemos suponer que ϕ_n contiene a lo sumo las constantes $\{c_k\}_{k < n}$. Si S admite un modelo finito, éste será isomorfo a uno constructible y se cumplirá el teorema. Podemos suponer, pues, que S no admite modelos finitos.

Sea P el conjunto de las ternas (N, f, k) tales que $k \in \omega$, N es un modelo finito del lenguaje \mathcal{L}_k cuyos signos son los de \mathcal{L} excepto las constantes $\{c_n\}_{n \geq k}$, $N \subset \omega$ y $f : N \rightarrow \omega$ es una aplicación tal que si $x, y \in N$ cumplen $N(\in)(x, y)$, entonces $f(x) < f(y)$.

Consideramos en P el orden parcial dado por $(N, f, k) < (N', f', k')$ si N' es un submodelo de N , $f' \subset f$, $k' < k$ y para cada $r < k$, si

$$\phi_r = \bigwedge x_1 \cdots x_m \bigvee y_1 \cdots y_n \psi_r(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

entonces para todos los $x_1, \dots, x_m \in N'$ existen $y_1, \dots, y_n \in M$ tales que

$$N \models \psi_r[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n].$$

La definición de (P, \leq) es absoluta para modelos transitivos de ZFC-AP, por lo que $(P, \leq) \in L[S]$. Veamos que (P, \leq) no está bien fundado.

Sea X el conjunto de todos los $(N, f, k) \in P$ tales que existe un submodelo M' de M (como modelo de \mathcal{L}_k) y un isomorfismo $h : N \rightarrow M'$ tal que para todo $b \in N$ se cumpla $f(b) = \text{rang}_E h(b)$.

Claramente $X \neq \emptyset$, pues basta tomar $k \in \omega$, M' igual al conjunto de las interpretaciones en M de las constantes de \mathcal{L}_k , N un modelo isomorfo con $N \subset \omega$, $h : N \rightarrow M'$ el isomorfismo y $f : N \rightarrow \omega$ dada por $f(b) = \text{rang}_E h(b)$. Entonces $(N, f, k) \in X$.

El conjunto X no tiene minimal, pues si $(N, f, k) \in X$ y $h : N \rightarrow M'$ es el isomorfismo dado por la definición de X , como $M \models S$, para todo $r \leq k$ tenemos que si

$$\phi_r = \bigwedge x_1 \cdots x_m \bigvee y_1 \cdots y_n \psi_r(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

y $a_1, \dots, a_m \in M'$, existen $b_1, \dots, b_m \in M$ tales que

$$M \models \psi_r[a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m].$$

Recorriendo todos los $r \leq k$ y todos los $a_1, \dots, a_m \in M'$ posibles, encontramos un número finito de elementos $b_i \in M$ que, junto con M' y $M(c_k)$ forman un submodelo M'' de M (como modelo de \mathcal{L}_{k+1}) tal que $M' \subset M''$. Tomamos $N' \subset \omega$ tal que $N \subset N'$, lo dotamos de estructura de modelo isomorfo a M'' a través de una biyección (que se convierte en isomorfismo) $h' : N' \rightarrow M''$ que extienda a h y definimos $f' : N' \rightarrow \omega$ mediante $h'(b) = \text{rang}_E h'(b)$. Claramente $(N', f', k+1) \in X$ y $(N', f', k+1) < (N, f, k)$.

Estar bien fundado es absoluto para modelos transitivos, luego (P, \leq) no está bien fundado ^{$L[S]$} . Por consiguiente existe una sucesión $\{(N_k, f_k, n_k)\}_{k \in \omega} \in L[S]$ tal que

$$(N_0, f_0, k_0) > (N_1, f_1, k_1) > \cdots$$

Sea $N = \bigcup_{k \in \omega} N_k$ y $f = \bigcup_{k \in \omega} f_k$. Por el teorema 13.29 se cumple que $N \models S$ y $f : N \rightarrow \omega$ cumple que si $N(\in)(u, v)$ entonces $f(u) < f(v)$, luego $N(\in)$ está bien fundada. Obviamente $N \in L[S]$. ■

Teorema 13.32 (Lévy-Shoenfield) *Sea $\phi(x, a)$ una fórmula Δ_0 del lenguaje de la teoría de conjuntos (metamatemático) cuyas variables libres sean a lo sumo las indicadas. Si $a \subset V_\omega$, entonces*

$$\forall x \phi(x, a) \leftrightarrow \forall x \in L[a] \phi(x, a).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{L} el lenguaje formal que consta de un relator \in y de las constantes \bar{X} , \bar{a} y $\{\bar{x}\}_{x \in L_\omega}$. Podemos tomarlo $\mathcal{L} \in L$.

Añadimos a \mathcal{L} los relatores R_1, \dots, R_k necesarios para que existe una sentencia $\bigwedge \bigvee \phi'$ que cumpla el teorema 13.30 para la sentencia

$$\forall x \phi(x, \bar{a}) \wedge \bigwedge xy (\bigwedge u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y) \wedge \bigwedge x (x \in \bar{X} \rightarrow x \in L_\omega).$$

Hay que entender que $x \in L_\omega$ representa la versión matemática de un equivalente sin descriptores de la correspondiente fórmula metamatemática.

Sea S el conjunto formado por las siguientes sentencias de \mathcal{L} (todas ellas de tipo $\bigwedge \bigvee$):

- a) ϕ' ,
- b) $\bar{x} \in \bar{X}$, para todo $x \in L_\omega$,
- c) $\bigwedge x (x \in \bar{y} \leftrightarrow x = \bar{y}_1 \vee \dots \vee x = \bar{y}_n)$, donde $y = \{y_1, \dots, y_n\} \in L_\omega$,
- d) $\bar{x} \in \bar{a}$, para todo $x \in a$,
- e) $\bar{x} \notin \bar{a}$, para todo $x \in L_\omega \setminus a$,
- f) $\bigwedge x (x \in \bar{a} \rightarrow x \in \bar{X})$.

Como \bar{a} puede reconstruirse a partir de S y viceversa, es fácil ver que $a \in L[S]$ y $S \in L[A]$, luego $L[S] = L[a]$.

Supongamos que $\bigvee x \phi(x, a)$. Sea λ un ordinal límite tal que $x, a \in V_\lambda$, con lo que $V_\lambda \models (\bigvee x \phi)[a]$. Interpretando las constantes de \mathcal{L} de forma natural y los relatores según el teorema 13.30 resulta que $V_\lambda \models S$. Por el teorema anterior existe un modelo N de \mathcal{L} tal que $N \in L[S] = L[a]$, N está bien fundado y $N \models S$. En particular N cumple el axioma de extensionalidad, luego la relación $N(\in)$ es extensional y bien fundada. Podemos considerar el colapso transitivo $N' \in L[a]$, que es un modelo isomorfo a N , luego $N' \models S$. La transitividad y las sentencias de S fuerzan que $N'(\bar{X}) = L_\omega$ y $N'(\bar{a}) = a$. Como además $N' \models \bigvee x \phi(x, \bar{a})$, vemos que $\bigvee x \in N' \phi(x, a)$ (aquí usamos que ϕ es absoluta), de donde $\bigvee x \in L[a] \phi(x, a)$. ■

Capítulo XIV

Indiscernibles de Silver

En este capítulo mostraremos el gran impacto que tiene la existencia de un cardinal de Ramsey sobre la clase L de los conjuntos constructibles y, más en general, sobre las clases $L[x]$ con $x \subset V_\omega$. Ya hemos visto algunos hechos aislados. Por ejemplo, si existe un cardinal de Ramsey entonces \aleph_1^L es numerable y \aleph_1 es inaccesible ^{L} . Estos hechos son casos particulares de los profundos resultados que veremos aquí.

La idea básica es la siguiente: si κ es un cardinal de Ramsey, entonces el teorema 12.29 nos da que el modelo $L_\kappa[x]$ tiene un conjunto de indiscernibles. A partir de este modelo, el teorema de compacidad 11.12 nos dará modelos elementalmente equivalentes cuyo conjunto indiscernibles tenga tipo de orden igual a cualquier ordinal prefijado. En principio esto nos llevará a modelos no naturales, pero podremos colapsarlos, y las propiedades de los modelos $L_\lambda[x]$ que hemos visto en el capítulo anterior justificarán que los colapsos vuelven a ser modelos $L_\lambda[x]$, lo que nos dará una clase propia de ordinales λ tales que los modelos $L_\lambda[x]$ serán todos elementalmente equivalentes entre sí. Además, podremos combinar los respectivos conjuntos de indiscernibles para formar una clase de indiscernibles en $L[x]$ (los indiscernibles de Silver que dan título a este capítulo). De aquí se deducirán numerosas consecuencias.

14.1 Conjuntos de Ehrenfeucht-Mostowski

Puesto que parte del trabajo que hemos de realizar tendrá que hacerse en modelos arbitrarios, no necesariamente naturales, conviene que trabajemos desde el principio en este contexto, aunque, según hemos explicado, el punto de partida natural serían los modelos $L_\lambda[x]$. Más precisamente, trabajaremos con modelos de \mathcal{L}_R elementalmente equivalentes a un modelo $L_\lambda[x]$. Empezamos generalizando la noción de indiscernibles a estos modelos.

Definición 14.1 Sea $x \subset L_\omega$ y $\lambda > \omega$ un ordinal límite. Sea M un modelo de \mathcal{L}_R elementalmente equivalente a $L_\lambda[x]$. Llamaremos

$$\Omega^M \models \{a \in M \mid M \models [a] \text{ es un ordinal}\}.$$

Es fácil ver que Ω^M está totalmente ordenado (aunque no necesariamente bien ordenado) por la relación $M(\in)$. Escribiremos simplemente $a < b$ en lugar de $M(\in)(a, b)$ para los elementos $a, b \in \Omega^M$.

Diremos que $I \subset \Omega^M$ es un conjunto de *indiscernibles* para M si es infinito y para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ y todos los $a_1 < \dots < a_n, b_1 < \dots < b_n \in \Omega^M$ se cumple

$$M \models \phi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow M \models \phi[b_1, \dots, b_n].$$

Si M es un modelo transitivo, esta definición coincide con la dada en 12.28.

Si I es un conjunto de indiscernibles para M , llamaremos $\Sigma(M, I)$ al conjunto de todas las fórmulas $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ tales que $M \models \phi[a_1, \dots, a_n]$ para ciertos (o, equivalentemente, para cualesquiera) $a_1 < \dots < a_n \in I$. Se entiende que, en particular, $\Sigma(M, I)$ contiene todas las sentencias de \mathcal{L}_R verdaderas en M .

Un conjunto $\Sigma \subset \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ es un *conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski* para $x \subset V_\omega$ (más brevemente, de E.M.) si existe un modelo M de \mathcal{L}_R elementalmente equivalente a $L_\lambda[x]$, para cierto ordinal límite $\lambda > \omega$, con un conjunto de indiscernibles I tal que $\Sigma = \Sigma(M, I)$.

El teorema 12.29 aplicado a $L_\kappa[x]$ prueba que si κ es un cardinal de Ramsey entonces existe un conjunto de E.M. para todo $x \subset V_\omega$.

El próximo teorema es esencialmente un caso particular de un teorema de la teoría de modelos conocido como teorema de Ehrenfeucht-Mostowski.

Teorema 14.2 *Sea $x \subset V_\omega$, sea Σ un conjunto de E.M. para x y $\alpha \geq \omega$. Entonces existen un modelo M de \mathcal{L}_R y un conjunto I de indiscernibles para M tales que*

- a) $\Sigma = \Sigma(M, I)$,
- b) $\text{ord}(I, \leq) = \alpha$,
- c) $M = N(I)$.

Además (M, I) es único salvo isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Notemos ante todo que la propiedad a) implica que M es elementalmente equivalente a un modelo $L_\lambda[x]$, pues Σ contiene todas las sentencias verdaderas en uno de estos modelos. En particular, M tiene funciones de Skolem definibles y el núcleo de Skolem que aparece en c) ha de entenderse calculado respecto a estas funciones.

Veamos primero la unicidad. Supongamos que (M, I) y (N, J) cumplen las propiedades a) y c), aunque no necesariamente b), y que existe una aplicación $\pi : I \rightarrow J$ estrictamente creciente.

Todo $a \in M$ es de la forma $a = M(t)[a_1, \dots, a_n]$, donde t es un término de Skolem y $a_1 < \dots < a_n \in I$. Definimos

$$\bar{\pi}(a) = N(t)[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

Esto no depende de la elección de t ni de la de los indiscernibles, pues si se cumple $a = M(t_1)[a_1, \dots, a_n] = M(t_2)[b_1, \dots, b_m]$, donde t_1 y t_2 son términos de Skolem y $a_1 < \dots < a_n$, $b_1 < \dots < b_m \in I$, consideramos las fórmulas de \mathcal{L}_R ψ_{t_1} y ψ_{t_2} que definen a los términos de Skolem, es decir, tales que las igualdades anteriores equivalen a

$$M \models \psi_{t_1}[a, a_1, \dots, a_n] \quad \text{y} \quad M \models \psi_{t_2}[a, b_1, \dots, b_m].$$

Llamamos $c_1 < \dots < c_r$ a los mismos $a_1 < \dots < a_n$, $b_1 < \dots < b_m$ ordenados y $\phi(z_1, \dots, z_r)$ a la fórmula

$$\bigvee x (\psi_{t_1}(x, x_1, \dots, x_n) \wedge \psi_{t_2}(x, y_1, \dots, y_m))$$

con la ordenación correspondiente de las variables para que $M \models \phi[c_1, \dots, c_r]$ sea equivalente a

$$M \models t_1[a_1, \dots, a_n] = t_2[b_1, \dots, b_m].$$

Puesto que, $M \models \phi[c_1, \dots, c_r]$, tenemos que $\phi \in \Sigma(M, I) = \Sigma = \Sigma(N, J)$. Como π es creciente, $\pi(c_1) < \dots < \pi(c_r)$, luego $N \models \phi[\pi(c_1), \dots, \pi(c_r)]$, pero, por la uniformidad de la definición de los términos de Skolem, esto equivale a

$$N(t_1)[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)] = N(t_2)(\pi(b_1), \dots, \pi(b_m)).$$

Así tenemos $\bar{\pi} : M \rightarrow N$ que claramente extiende a π , pues $t(x) = x$ es un término de Skolem y así, si $a \in I$, se cumple que

$$\bar{\pi}(a) = \bar{\pi}(M(x)[a]) = N(x)[\pi(a)] = \pi(a).$$

Se cumple que $\bar{\pi}$ es una inmersión elemental, pues si $u_1, \dots, u_n \in M$ y $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$, entonces existen $a_1 < \dots < a_m \in I$ de manera que $u_i = M(t_i)[a_1, \dots, a_m]$, para ciertos términos de Skolem t_i . Por lo tanto,

$$M \models \phi[u_1, \dots, u_n] \rightarrow M \models \phi(t_1, \dots, t_n)[a_1, \dots, a_m].$$

La fórmula $\phi(t_1(x_1, \dots, x_m), \dots, t_n(x_1, \dots, x_m))$ es uniformemente equivalente a una fórmula $\psi(x_1, \dots, x_m) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ (donde uniformemente equivalente quiere decir que, tanto M como N , cumplen una si y sólo si cumplen la otra, con una misma interpretación de las variables).

Tenemos, pues que $M \models \psi[a_1, \dots, a_m]$, luego $\psi \in \Sigma(M, I) = \Sigma = \Sigma(N, J)$, luego

$$\begin{aligned} N \models \psi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_m)] &\rightarrow N \models \phi(t_1, \dots, t_n)[\pi(a_1), \dots, \pi(a_m)] \\ &\rightarrow N \models \phi[\bar{\pi}(u_1), \dots, \bar{\pi}(u_n)]. \end{aligned}$$

Si suponemos que (M, I) y (N, J) cumplen b), entonces existe una semejanza $\pi : I \rightarrow J$ y se comprueba inmediatamente que $\bar{\pi}$ es biyectiva, luego es un isomorfismo entre M y N que se restringe a una semejanza entre I y J . Esto es la unicidad que afirma el enunciado.

Veamos ahora la existencia. Como Σ es un conjunto de E.M., existe un modelo (M_0, I_0) tal que $\Sigma = \Sigma(M_0, I_0)$. Sea \mathcal{L}' el lenguaje formal que resulta de añadir a \mathcal{L}_R una familia de constantes $\{c_\beta\}_{\beta < \alpha}$. Sea Γ el conjunto formado por las siguientes sentencias de \mathcal{L}' :

$$\begin{array}{ll} \text{"}c_\beta \text{ es un ordinal"} & \text{para todo } \beta < \alpha, \\ \text{"}c_\beta < c_\gamma \text{"} & \text{para } \beta < \gamma < \alpha, \\ \phi(c_{\beta_1}, \dots, c_{\beta_n}) & \text{para } \phi(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma \text{ y } \beta_1 < \dots < \beta_n < \alpha. \end{array}$$

Veamos que Γ es finitamente consistente. Tomamos $\Delta \subset \Gamma$ finito y sean $\beta_1 < \dots < \beta_n < \alpha$ tales que $c_{\beta_1}, \dots, c_{\beta_n}$ sean las únicas constantes que aparecen en las fórmulas de Δ y sea $\sigma(c_{\beta_1}, \dots, c_{\beta_n})$ la conjunción de todas las sentencias de Δ . Como I_0 es infinito existen $a_1 < \dots < a_n \in I_0$. Podemos convertir a M_0 en un modelo de \mathcal{L}' haciendo $M_0(c_{\beta_i}) = a_i$ e interpretando las demás constantes arbitrariamente. Es claro que así $M_0 \models \Delta$.

Por el teorema de compacidad 11.12, sabemos que Γ tiene un modelo M . Para cada $\beta < \alpha$ sea $i_\beta = M(c_\beta)$ y sea $I = \{i_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Claramente $I \subset \Omega^M$ y $\text{ord}(I, \leq) = \alpha$.

Veamos que para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ y todos los $\beta_1 < \dots < \beta_n < \alpha$ se cumple

$$M \models \phi[i_{\beta_1}, \dots, i_{\beta_n}] \leftrightarrow \phi \in \Sigma.$$

Si $\phi \in \Sigma$, entonces $M \models \phi(c_{\beta_1}, \dots, c_{\beta_n})$, o sea, $M \models \phi[i_{\beta_1}, \dots, i_{\beta_n}]$.

Si $\phi \notin \Sigma$, entonces $\neg M \models \phi[a_1, \dots, a_n]$, para ciertos $a_1 < \dots < a_n \in I_0$, luego se cumple $M_0 \models \neg\phi[a_1, \dots, a_n]$, luego $\neg\phi \in \Sigma$, luego $M \models \neg\phi(c_{\beta_1}, \dots, c_{\beta_n})$, luego $M \models \neg\phi[i_{\beta_1}, \dots, i_{\beta_n}]$, por lo que no $M \models \phi[i_{\beta_1}, \dots, i_{\beta_n}]$.

Consecuentemente I es un conjunto de indiscernibles para M y $\Sigma = \Sigma(M, I)$. Sea $M^* = N(I)$. Es claro que M^* sigue cumpliendo a) y b) y por el teorema 1.13, también cumple c) (notemos que las restricciones a M^* de las funciones de Skolem que hemos definido en M son las que hemos definido en M^*). ■

Definición 14.3 Sea $x \subset V_\omega$, Σ un conjunto de E.M. para x y $\alpha \geq \omega$. Llamaremos *modelo* (Σ, α, x) a cualquier par (M, I) que cumpla las condiciones del teorema anterior (el cual nos dice que dos cualesquiera de ellos son isomorfos).

En la prueba de la unicidad en el teorema anterior hemos demostrado de hecho el teorema siguiente:

Teorema 14.4 Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x . Sean $\omega \leq \alpha \leq \beta$ y sean (M, I) y (N, J) un modelo (Σ, α, x) y un modelo (Σ, β, x) respectivamente. Entonces toda aplicación estrictamente creciente $\pi : I \rightarrow J$ se extiende a una inmersión elemental $\bar{\pi} : M \rightarrow N$. Si π es biyectiva entonces $\bar{\pi}$ es un isomorfismo.

Ahora estudiamos si los modelos (Σ, α, x) están bien fundados.

Teorema 14.5 Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- a) Para todo $\alpha \geq \omega$ el modelo (Σ, α, x) está bien fundado.
- b) Para cierto $\alpha \geq \omega_1$ el modelo (Σ, α, x) está bien fundado.
- c) Para todo α tal que $\omega \leq \alpha < \omega_1$ el modelo (Σ, α, x) está bien fundado.

DEMOSTRACIÓN: a) \rightarrow b) es obvio.

b) \rightarrow c). Sea $\alpha \geq \omega_1$ tal que el modelo (Σ, α, x) esté bien fundado y sea $\omega \leq \beta < \omega_1$. Por el teorema anterior existe una inmersión elemental del modelo (Σ, β, x) en el modelo (Σ, α, x) , luego el primer está bien fundado.

c) \rightarrow a) Por el mismo argumento que en la implicación anterior basta ver que para todo ordinal límite λ el modelo (Σ, λ, x) está bien fundado. En caso contrario sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) que no esté bien fundado. Esto significa que existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in \omega}$ de elementos de M tal que

$$\bigwedge n \in \omega M(\in)(a_{n+1}, a_n).$$

Cada a_n es de la forma $a_n = M(t)[x_1, \dots, x_n]$, para ciertos elementos $x_1, \dots, x_n \in I$, luego existe un $I_0 \subset I$ numerable tal que $\bigwedge n \in \omega a_n \in N(I_0)$. Sea $\beta = \text{ord}(I_0, \leq) < \omega_1$. Es inmediato que $(N(I_0), I_0)$ cumple las condiciones del teorema 14.2, luego es un modelo (Σ, β, x) y no está bien fundado, contradicción. ■

Definición 14.6 Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x . Diremos que Σ está *bien fundado* si los modelos (Σ, α, x) lo están.

Si κ es un cardinal de Ramsey, entonces $L_\kappa[x]$ tiene un conjunto de indiscernibles no numerable I , y su núcleo de Skolem N está bien fundado, por lo que $\Sigma = \Sigma(N, I)$ resulta ser un conjunto de E.M. bien fundado para x . Ahora podríamos colapsar los modelos (Σ, α, x) , pero antes añadiremos restricciones que nos garanticen que el conjunto de indiscernibles del colapso transitivo es cerrado no acotado. Empezamos estudiando la no acotación.

Sea λ un ordinal límite. Diremos que el modelo (Σ, λ, x) es *no acotado* si su conjunto de indiscernibles no está acotado en Ω^M .

Teorema 14.7 Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- a) Para todo $\lambda \geq \omega$ el modelo (Σ, λ, x) no está acotado.
- b) Para cierto $\lambda \geq \omega$ el modelo (Σ, λ, x) no está acotado.
- c) Para todo término de Skolem $t(v_1, \dots, v_n)$, el conjunto Σ contiene a la fórmula $\phi_t(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ de \mathcal{L}_R que en cualquier modelo equivale a

$$t(v_1, \dots, v_n) \text{ es un ordinal} \rightarrow t(v_1, \dots, v_n) < v_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN: a) \rightarrow b) es obvio.

b) \rightarrow c). Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) no acotado y sea $t(v_1, \dots, v_n)$ un término de Skolem. Sean $a_1 < \dots < a_n \in I$ y sea $x = M(t)[a_1, \dots, a_n]$. Si $x \notin \Omega^M$, se cumple trivialmente $M \models \phi_t[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]$ para cualquier $a_{n+1} \in I$ tal que $a_n < a_{n+1}$. Si, por el contrario, $x \in \Omega^M$, entonces existe $a_{n+1} \in I$ tal que $a_{n+1} > a_n$ y $a_{n+1} > x$ (por la no acotación), e igualmente se cumple $M \models \phi_t[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]$. En cualquier caso $\phi_t \in \Sigma(M, I) = \Sigma$.

c) \rightarrow a). Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) y sea $x \in \Omega^M$. Existe un término de Skolem t junto con unos indiscernibles $a_1 < \dots < a_n \in I$ de modo que $x = M(t)[a_1, \dots, a_n]$. Sea $a_{n+1} > a_n$ (aquí usamos que λ es un límite). Por hipótesis $M \models \phi_t[a_1, \dots, a_{n+1}]$, luego $a_{n+1} > x$, lo que prueba que I no está acotado en Ω^M . ■

Definición 14.8 Sea $x \in V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x . Diremos que Σ es *no acotado* si cumple cualquiera de las condiciones del teorema anterior.

No es evidente que la existencia de un cardinal de Ramsey implique la existencia de conjuntos de E.M. no acotados, pero como todavía hemos de imponer otra restricción, pospondremos la prueba para ocuparnos al mismo tiempo de todas las condiciones que vamos a exigir.

Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) . Llamaremos $i : \lambda \rightarrow I$ a la semejanza, de manera que $I = \{i_\delta \mid \delta < \lambda\}$.

Si $\lambda > \omega$, diremos que el modelo (M, I) es *notable* si es no acotado y para todo $y \in \Omega^M$ tal que $y < i_\omega$ se cumple que $y \in N(\{i_n \mid n < \omega\})$.

Pronto veremos que esta condición técnica implica que el conjunto de indiscernibles es cerrado en Ω^M . De momento probamos un teorema análogo a los anteriores:

Teorema 14.9 Sea $x \in V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- a) Para todo $\lambda > \omega$ el modelo (Σ, λ, x) es notable.
- b) Para cierto $\lambda > \omega$ el modelo (Σ, λ, x) es notable.
- c) Para cada término de Skolem $t(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$, el conjunto Σ contiene la fórmula $\psi_t(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n, x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L}_R que equivale en todo modelo a

$$t(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n) \text{ es un ordinal} \wedge t(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n) < w_1 \\ \rightarrow t(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n) = t(v_1, \dots, v_m, x_1, \dots, x_n).$$

Además, en tal caso, si (M, I) es un modelo (Σ, λ, x) , $\lambda' < \lambda$ y $x \in \Omega^M$ cumple $x < i_{\lambda'}$, entonces $x \in N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\})$.

DEMOSTRACIÓN: a) \rightarrow b) es obvio.

b) \rightarrow c). Sea $\lambda > \omega$ tal que el modelo (Σ, λ, x) sea notable —llamémoslo (M, I) — y consideremos un término de Skolem $t(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$. Sean

$$v_1 < \dots < v_m < w_1 < \dots < w_n < x_1 < \dots < x_n$$

tales que v_1, \dots, v_n sean los primeros elementos de I (es decir, i_0, \dots, i_{m-1}) y $w_1 = i_\omega$. Si $a = M(t)[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n]$ es un ordinal en M y es menor que $w_1 = i_\omega$, por hipótesis $a \in N(\{i_n \mid n < \omega\})$, luego existe un término de Skolem s y un $k < \omega$ de manera que $a = M(s)[i_0, \dots, i_k]$. Podemos suponer $m \leq k$.

Tenemos que $M \models t[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n] = s[i_0, \dots, i_k]$ y, por indiscernibilidad, $M \models t[v_1, \dots, v_m, x_1, \dots, x_n] = s[i_0, \dots, i_k]$, luego

$$M \models t[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n] = t[v_1, \dots, v_m, x_1, \dots, x_n].$$

Esto prueba que $M \models \psi_t$, luego $\psi_t \in \Sigma$.

c) \rightarrow a). Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) con $\lambda > \omega$. Sea $\omega \leq \lambda' < \lambda$ (así, para $\lambda' = \omega$ probamos el apartado a) y en general probamos la última afirmación del enunciado). Sea $x \in \Omega^M$ tal que $x < i_{\lambda'}$. Sea t un término de Skolem y $v_1 < \dots < v_m < w_1 < \dots < w_n \in I$ tales que $w_1 = i_{\lambda'}$ y $x = M(t)[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n]$.

Tomamos indiscernibles $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n$ tales que

$$v_1 < \dots < v_m < x_1 < \dots < x_n < w_1 < \dots < w_n < z_1 < \dots < z_n.$$

Como $x < w_1$ y $M \models \psi_t[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n, z_1, \dots, z_n]$, tenemos que

$$M \models t[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n] = t[v_1, \dots, v_m, z_1, \dots, z_n].$$

Por indiscernibilidad, esto implica

$$M \models t[v_1, \dots, v_m, x_1, \dots, x_n] = t[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n],$$

y esto significa que $x = M(t)[v_1, \dots, v_m, x_1, \dots, x_n] \in N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\})$. ■

Definición 14.10 Sea $x \in V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x . Diremos que Σ es *notable* si cumple cualquiera de las condiciones del teorema anterior.

Los teoremas siguientes explican el interés de esta propiedad:

Teorema 14.11 Sea $x \in V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. notable para x . Consideremos ordinales $\omega < \lambda' < \lambda$. Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) , tomemos $J = \{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}$ y sea $N = N(J)$. Entonces (N, J) es un modelo (Σ, λ', x) y Ω^N es una sección inicial de Ω^M , es decir, todo elemento de Ω^M por bajo de uno de Ω^N está en Ω^N .

DEMOSTRACIÓN: Es claro que N cumple las propiedades del teorema 14.2, luego es un modelo (Σ, λ', x) . Si $x \in \Omega^N$ existe un $\delta < \lambda'$ tal que $x < i_\delta < i_{\lambda'}$ (pues (N, J) no está acotado). Por consiguiente, si $y \in \Omega^M$ cumple $y < x$, entonces $y < i_{\lambda'}$, luego por el teorema 14.9 $y \in N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}) = N$. Así pues, $y \in \Omega^N$. ■

Teorema 14.12 *Sea $x \in V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. notable para x . Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) . Entonces I es cerrado en Ω^M , es decir, si $\lambda' < \lambda$, entonces $i_{\lambda'}$ es el supremo en Ω^M del conjunto $\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in \Omega^M$ cumple $x < i_{\lambda'}$, entonces por el teorema anterior $x \in N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\})$, que es un modelo (Σ, λ', x) . Como Σ no está acotado, el modelo N tampoco lo está, luego existe un $\delta < \lambda'$ tal que $x < i_\delta$. Esto significa que x no es una cota superior del conjunto $\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}$, luego la menor cota superior es exactamente $i_{\lambda'}$. ■

Finalmente estamos en condiciones de colapsar los modelos:

Teorema 14.13 *Sea $x \in V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x . Entonces, para todo ordinal límite λ existe un λ' tal que $L_{\lambda'}[x]$ es un modelo (Σ, λ, x) (con un cierto conjunto de indiscernibles). Si κ es un cardinal no numerable entonces $L_\kappa[x]$ es un modelo (Σ, κ, x) con un único posible conjunto de indiscernibles I_κ^x . Además I_κ^x es cerrado y no acotado en κ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) . Entonces M cumple el axioma de extensionalidad, pues es elementalmente equivalente a un modelo $L_{\lambda_0}[x]$, y está bien fundado por hipótesis. Por consiguiente podemos considerar su colapso transitivo M' . Sea $\pi : M \rightarrow M'$ la función colapsante.

Definimos $a = \{u \in M' \mid M(R)(\pi^{-1}(u))\}$, con lo que $\pi : M \rightarrow (M', a)$ es un isomorfismo de modelos de \mathcal{L}_R . Definimos $I' = \pi[I]$, con lo que $((M', a), I')$ es un modelo (Σ, λ, x) .

En particular (M', a) es elementalmente equivalente a un cierto $L_{\lambda_0}[x]$, luego por el teorema 13.27 tenemos que $(M', a) = L_{\lambda'}[x]$, para cierto λ' . Así pues, $L_{\lambda'}[x]$ es un modelo (Σ, λ, x) .

Supongamos ahora que κ es un cardinal no numerable. Sea $(L_\lambda[x], I)$ un modelo (Σ, κ, x) . Puesto que $|I| = \kappa$, ha de ser $\kappa \leq \lambda$. Supongamos que $\kappa < \lambda$. Como I no está acotado en $\Omega^{L_\lambda[x]} = \lambda$, existe un $\lambda' < \kappa$ tal que $\kappa < i_{\lambda'}$, y por ser notable $\kappa \subset N = N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\})$, pero por otro lado $|N| = |\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}| = |\lambda'| < \kappa$, contradicción. Así pues, $\kappa = \lambda$ y $L_\kappa[x]$ es un modelo (Σ, κ, x) .

Supongamos ahora que $(L_\kappa[x], I)$ y $(L_\kappa[x], I')$ son ambos modelos (Σ, κ, x) . Sea $\pi : I \rightarrow I'$ una semejanza. Por el teorema 14.4 sabemos que π se extiende a un isomorfismo $\bar{\pi} : L_\kappa[x] \rightarrow L_\kappa[x]$, pero el único isomorfismo de un conjunto transitivo en sí mismo es la identidad (por la unicidad de colapso transitivo), luego $I' = \pi[I] = I$.

Llamemos I_κ^x al único posible conjunto de indiscernibles en $L_\kappa[x]$. Sabemos que no está acotado y el teorema 14.12 implica que es cerrado (por ejemplo, porque la aplicación que numera los indiscernibles es normal). ■

El teorema siguiente completa las propiedades básicas de los conjuntos de indiscernibles I_κ^x :

Teorema 14.14 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x . Si $\kappa < \mu$ son dos cardinales no numerables, entonces $I_\mu^x \cap \kappa = I_\kappa^x$ y $L_\kappa[x] = N(I_\kappa^x) \prec L_\mu[x]$.*

DEMOSTRACIÓN: En el modelo $L_\mu[x]$, definimos $J = \{i_\delta \mid \delta < \kappa\}$ y $N = N(J)$. Por el teorema 14.11 tenemos que N es un modelo (Σ, κ, x) y los ordinales de N son una sección inicial de μ , es decir, $\Omega^N = \lambda \leq \mu$. Como $L_\kappa[x]$ también es un modelo (Σ, κ, x) , ha de ser isomorfo a N . En particular $\Omega^{L_\kappa[x]} = \kappa$ ha de ser semejante a λ , pero esto es tanto como decir que $\lambda = \kappa$.

Más aún, el isomorfismo entre $L_\kappa[x]$ y N ha de transformar I_κ^x en J , pero por otra parte ha de ser la identidad en κ , luego $J = I_\kappa^x$.

Si $i_\delta \in I_\mu^x \cap \kappa$, entonces $\delta \leq i_\delta < \kappa$, luego $i_\delta \in J = I_\kappa^x$. Por lo tanto $I_\mu^x \cap \kappa = I_\kappa^x$.

Para probar que $N = L_\kappa[x]$ basta ver que N es transitivo, pues dos modelos transitivos isomorfos han de ser iguales. Tomemos $u \in N$ y sea $\alpha = |u| < \mu$. Sea $f : \alpha \rightarrow u$ biyectiva. Por 13.18 concluimos que $f \in L_\mu[x]$. Por consiguiente $L_\mu[x] \models \forall f \alpha f : \alpha \rightarrow [u]$ biyectiva, luego existen $f, \alpha \in N$ tales que $N \models [f] : [\alpha] \rightarrow [u]$ biyectiva, luego $L_\mu[x]$ cumple lo mismo, y al ser transitivo concluimos que $f : \alpha \rightarrow u$ biyectiva. Ahora, si $\beta < \alpha$, se cumple $L_\mu[x] \models [\beta] < [\alpha]$, luego lo mismo sucede en N , luego existe un $v \in N$ tal que $N \models [v] = [f]([\beta])$, luego lo mismo sucede en $L_\mu[x]$, luego $f(\beta) = v \in N$. Con esto hemos probado que $u \subset N$, luego N es transitivo. ■

Tenemos pendiente justificar que la existencia de un cardinal de Ramsey implica la existencia de conjuntos de E.M. notables y bien fundados, pero antes probaremos el teorema siguiente que concreta el problema:

Teorema 14.15 *Sea $x \subset V_\omega$. Si existe un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x , entonces éste es único.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Σ un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x . Si $n \in \omega$, $n \neq 0$, por el teorema anterior $I_{\omega_n}^x \cap \omega_n = I_{\omega_n}^x$ es c.n.a. en ω_n y, como $I_{\omega_n}^x$ es c.n.a. en ω_n , concluimos que $\omega_n \in I_{\omega_n}^x$.

Como $(L_{\omega_n}[x], I_{\omega_n}^x)$ es un modelo (Σ, ω_n, x) , si $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$, se cumple que

$$\phi \in \Sigma \leftrightarrow L_{\omega_n}[x] \models \phi[\omega_1, \dots, \omega_n],$$

y el miembro derecho no depende de Σ , luego Σ es único. ■

Definición 14.16 *Sea $x \subset L_\omega$. Llamaremos x^\sharp (x sostenido) al único conjunto de E.M. notable y bien fundado para x , si es que existe tal conjunto.*

En lugar de “existe un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x ”, diremos simplemente “existe x^\sharp ”.

Es costumbre escribir 0^\sharp en lugar de \emptyset^\sharp .

Aunque la definición de los sostenidos puede parecer aparatosa, en realidad la existencia de x^\sharp equivale a una condición relativamente simple:

Teorema 14.17 *Sea $x \subset V_\omega$. La existencia de x^\sharp equivale a que exista un ordinal límite λ tal que $L_\lambda[x]$ tenga un conjunto de indiscernibles no numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Ciertamente, si existe x^\sharp entonces $I_{\omega_1}^x$ es un conjunto no numerable de indiscernibles en $L_{\omega_1}[x]$.

Supongamos que $L_\lambda[x]$ tiene un conjunto no numerable de indiscernibles J . Pasando a una sección inicial podemos suponer que el ordinal de J es ω_1 . También podemos suponer que λ es el mínimo ordinal tal que $L_\lambda[x]$ tiene un conjunto de indiscernibles de ordinal ω_1 . Sea $N = N(J) \prec L_\lambda[x]$ y sea M el colapso transitivo de N . Transportando a M la relación $N(R)$, obtenemos un conjunto $a \subset M$ tal que (M, a) es un modelo de \mathcal{L}_R isomorfo a N . Por el teorema 13.27 resulta que $a = x$ y $M = L_{\lambda'}[x]$. Como los ordinales de N son todos menores que λ y la función colapsante envía ordinales a ordinales, es claro que $\lambda' \leq \lambda$. Por otra parte, si I es la imagen de J por el colapso transitivo, tenemos que I es un conjunto de indiscernibles en $L_{\lambda'}[x]$ de ordinal ω_1 y $L_{\lambda'}[x] = N(I)$. Por la minimalidad de λ ha de ser $\lambda = \lambda'$. Así pues, $L_\lambda[x] = N(I)$.

Veamos ahora que I no está acotado en λ . En otro caso existe $\lambda' < \lambda$ tal que $I \subset \lambda'$. Sea t un término de Skolem y sean $\alpha_1 < \dots < \alpha_n \in I$ tales que $\lambda' = L_{\lambda'}[x](t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Sea $I' = \{i \in I \mid i > \alpha_n\}$. Vamos a probar que I' es un conjunto de indiscernibles para $L_{\lambda'}[x]$ (claramente de ordinal ω_1).

Consideremos una fórmula $\phi(x_1, \dots, x_m) \in \text{Form}(\mathcal{L})$. Teniendo en cuenta que $y = L_\alpha[x]$ es definible en $L_\lambda[x]$, es fácil definir por inducción sobre la longitud de ϕ una fórmula $\psi(\alpha, x_1, \dots, x_m)$ tal que, para $\alpha < \lambda$,

$$L_\alpha[x] \models \phi[x_1, \dots, x_m] \leftrightarrow L_\lambda[x] \models \psi[\alpha, x_1, \dots, x_m].$$

El único caso no trivial es $\phi = \bigwedge u \phi'(u, x_1, \dots, x_m)$, en cuyo caso tomamos

$$\psi = \bigvee y (y = L_\alpha[x] \wedge \bigwedge y \in Y \psi'(\alpha, u, x_1, \dots, x_m)).$$

Ahora, para todos los $i_1 < \dots < i_m \in I'$ se cumple

$$\begin{aligned} L_{\lambda'}[x] \models \phi[i_1, \dots, i_m] &\leftrightarrow L_\lambda[x] \models \psi[\lambda', i_1, \dots, i_m] \\ &\leftrightarrow L_\lambda[x] \models \chi[\alpha_1, \dots, \alpha_n, i_1, \dots, i_m], \end{aligned}$$

donde χ es la fórmula que resulta de sustituir en ψ la variable interpretada por λ' por el término t y pasar a una fórmula equivalente en \mathcal{L}_R . Por indiscernibilidad esto no depende de i_1, \dots, i_m (siempre y cuando sean mayores que α_n),

luego ciertamente I' es un conjunto de indiscernibles para $L_{\lambda'}[x]$ y contradice la minimalidad de λ .

De entre todos los conjuntos de indiscernibles para $L_\lambda[x]$ de ordinal ω_1 , no acotados y tales que $L_\lambda[x] = N(I)$, elijamos uno que tenga el menor i_ω posible. El conjunto $\Sigma = \Sigma(L_\lambda[x], I)$ es ciertamente un conjunto de E.M. bien fundado y no acotado. Vamos a probar que $(L_\lambda[x], I)$ es notable, con lo que Σ será x^\sharp .

En caso contrario, por el teorema 14.9, existe un término de Skolem

$$t(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$$

tal que para todos los indiscernibles

$$v_1 < \dots < v_m < w_1 < \dots < w_n < x_1 < \dots < x_n$$

se cumple

$$\begin{aligned} L_\lambda[x] \models t[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n] \in \Omega \wedge t[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n] < [w_1] \\ \wedge t[v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n] \neq t[v_1, \dots, v_m, x_1, \dots, x_n]. \end{aligned} \quad (14.1)$$

De hecho, la desigualdad será siempre $<$ o siempre $>$.

Tomemos $v_1 < \dots < v_m < i_\omega$. Sea u_0 la sucesión de los n primeros indiscernibles mayores que v_m . Para cada $\alpha < \omega_1$ sea u_α la sucesión de los n primeros indiscernibles mayores que todos los indiscernibles que aparecen en las sucesiones u_β con $\beta < \alpha$ (que son una cantidad numerable). Sea

$$t_\alpha = L_\lambda[x](t)[v_1, \dots, v_m, u_\alpha(0), \dots, u_\alpha(n-1)].$$

Si la desigualdad (14.1) es $>$, entonces para todos los $\alpha < \beta < \omega_1$ se cumple que

$$v_1 < \dots < v_m < u_\alpha(0) < \dots < u_\alpha(n-1) < u_\beta(0) < \dots < u_\beta(n-1),$$

luego $t_\alpha > t_\beta$. Tenemos, pues, una sucesión decreciente de ordinales, lo cual es absurdo. Por consiguiente la desigualdad ha de ser $<$, y la sucesión $\{t_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ es creciente.

Es inmediato comprobar que $J = \{t_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es un conjunto de indiscernibles para $L_\lambda[x]$ de ordinal ω_1 . Por construcción i_ω es el primer elemento de u_ω , luego

$$t_\omega = L_\lambda[x](t)[v_1, \dots, v_m, u_\omega(0), \dots, u_\omega(n-1)] < i_\omega.$$

Sea $N = N(J)$. Estamos justo como al principio de la prueba. Repitiendo todo el argumento llegamos a que el colapso transitivo de N ha de ser el propio $L_\lambda[x]$, que tiene como conjunto de indiscernibles a la imagen I' de J por la función colapsante π , de modo que I' no está acotado en λ y $L_\lambda[x] = N(I')$. Además, el ω -ésimo elemento de I' será $\pi(t_\omega) \leq t_\omega < i_\omega$, lo que contradice la elección de I . ■

Teniendo en cuenta el teorema 12.29, ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 14.18 *Si existe un cardinal de Ramsey, entonces existe x^\sharp para todo $x \subset V_\omega$.*

14.2 Los indiscernibles de Silver

En esta sección reformularemos los resultados que acabamos de obtener para los modelos $L_\lambda[x]$ en términos de las clases $L[x]$.

Definición 14.19 Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista x^\sharp . Llamaremos *indiscernibles de Silver* para x a los elementos de la clase

$$I_x = \bigcup_{\kappa} I_{\kappa}^x \subset \Omega,$$

donde κ recorre los cardinales no numerables.

El teorema siguiente recoge las propiedades básicas de estos indiscernibles.

Teorema 14.20 Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista x^\sharp . Entonces I_x es la única clase que cumple las propiedades siguientes:

- $I_x \subset \Omega$ contiene a todos los cardinales no numerables.
- Si κ es un cardinal no numerable, entonces $I_x \cap \kappa$ es c.n.a. en κ y tiene ordinal κ .
- Si κ es un cardinal no numerable, entonces $I_x \cap \kappa$ es un conjunto de indiscernibles para $L_\kappa[x]$ y todo $a \in L_\kappa[x]$ es definible en $L_\kappa[x]$ a partir de $I_x \cap \kappa$, es decir, existe una fórmula $\phi(x, x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ y unos $a_1, \dots, a_n \in I_x \cap \kappa$ de modo que a es el único elemento de $L_\kappa[x]$ que cumple $L_\kappa[x] \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 14.14 tenemos que $I_x \cap \kappa = I_{\kappa}^x$, que es c.n.a. en κ , tiene ordinal κ y es un conjunto de indiscernibles para $L_\kappa[x]$. Además, si $\kappa < \mu$ son cardinales no numerables, tenemos que $I_{\mu}^x \cap \kappa = I_{\kappa}^x$ es c.n.a. en κ , y como I_{μ}^x es c.n.a. en μ concluimos que $\kappa \in I_{\mu}^x$, luego I_x contiene a todos los cardinales no numerables.

Si $a \in L_\kappa[x]$, como $L_\kappa[x] = N(I_{\kappa}^x)$, existe un término de Skolem t tal que $a = L_\kappa[x](t)[a_1, \dots, a_n]$, para ciertos $a_1, \dots, a_n \in I_{\kappa}^x$. Como las funciones de Skolem son definibles, la fórmula $y = t(x_1, \dots, x_n)$ es equivalente a una fórmula $\phi(x, x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ que cumple el enunciado.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que I'_x es otra clase que cumple el teorema. Sea $\Sigma_\kappa = \Sigma(L_\kappa[x], I'_x \cap \kappa)$. Claramente Σ_κ es un conjunto de E.M. bien fundado y no acotado, pues la propiedad c) implica que $L_\kappa[x]$ es el núcleo de Skolem de $I'_x \cap \kappa$. Veamos que Σ_κ es notable. Sea $a < i'_\omega$ (el ω -ésimo elemento de $I'_x \cap \kappa$). Como $I'_x \cap \kappa$ es c.n.a. en κ , existe un $n \in \omega$ tal que $a < i'_n$. Sea t un término de Skolem tal que $a = L_\kappa[x](t)[a_1, \dots, a_m]$, para ciertos $a_1 < \dots < a_m \in I'_x \cap \kappa$. Tomemos nuevos indiscernibles tales que

$$a_1 < \dots < a_r \leq a < b_{r+1} < \dots < b_m < i'_\omega.$$

Así

$$a = L_\kappa[x](t)[a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_m] \in N(\{i'_n \mid n < \omega\}).$$

Con esto podemos concluir que $\Sigma_\kappa = x^\sharp$, luego $(L_\kappa[x], I'_x \cap \kappa)$ es un modelo (x^\sharp, κ, x) . Por la unicidad de 14.13 concluimos que $I_x \cap \kappa = I'_x \cap \kappa$, para todo cardinal no numerable κ , luego $I_\kappa = I'_\kappa$. ■

Observemos que, por el teorema 14.14, si existe x^\sharp y $\kappa < \mu$ son cardinales infinitos, entonces $L_\kappa[x] \prec L_\mu[x]$. Esto nos permite dotar a la clase $L[x]$ de estructura de modelo de \mathcal{L}_R :

Definición 14.21 Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista x^\sharp . Si $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ y $a_1, \dots, a_n \in L[x]$, definimos

$$L[x] \models \phi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \bigvee \kappa (\kappa \text{ es un cardinal no numerable} \\ \wedge a_1, \dots, a_n \in L_\kappa[x] \wedge L_\kappa[x] \models \phi[a_1, \dots, a_n]).$$

Por la observación precedente a la definición, la relación $L_\kappa[x] \models \phi[a_1, \dots, a_n]$ no depende de κ : si es cierta para un cardinal no numerable (suficientemente grande como para que $L_\kappa[x]$ contenga a los parámetros) es cierta para todo κ . De aquí se sigue que esta relación \models cumple todas las propiedades usuales. Por ejemplo, veamos que

$$L[x] \models \bigwedge z \phi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \bigwedge a \in L[x] L[x] \models \phi[a, a_1, \dots, a_n].$$

Si $L[x] \models \bigwedge z \phi[a_1, \dots, a_n]$ y $a \in L[x]$, existe un cardinal no numerable κ tal que $a, a_1, \dots, a_n \in L_\kappa[x]$. Por definición $L_\kappa[x] \models \bigwedge z \phi[a_1, \dots, a_n]$, luego $L_\kappa[x] \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$, luego $L[x] \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$.

Recíprocamente, si $\bigwedge a \in L[x] L[x] \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$, sea κ un cardinal regular tal que $a_1, \dots, a_n \in L_\kappa[x]$. En particular $\bigwedge a \in L_\kappa[x] L_\kappa[x] \models \phi[a, a_1, \dots, a_n]$, luego $L_\kappa[x] \models \bigwedge z \phi[a_1, \dots, a_n]$, luego $L[x] \models \bigwedge z \phi[a_1, \dots, a_n]$.

Similarmente,

$$L[x] \models (\phi \wedge \psi)[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow L[x] \models \phi[a_1, \dots, a_n] \wedge L[x] \models \psi[a_1, \dots, a_n],$$

etc.

Una simple inducción muestra que si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula metamatemática sin descriptores (y $\ulcorner \phi \urcorner$ es su versión formalizada), entonces

$$\bigwedge a_1 \cdots a_n \in L[x] (L[x] \models \ulcorner \phi \urcorner[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \phi^{L[x]}(a_1, \dots, a_n)).$$

A partir de aquí, todos los conceptos de la teoría de modelos son aplicables a $L[x]$, a pesar de ser una clase propia. Por ejemplo, la propia definición de $L[x] \models \phi$ implica que si κ es un cardinal no numerable, entonces $L_\kappa[x] \prec L[x]$.

Sabemos que si κ es regular $L_\kappa[x] \models \text{ZFC-AP}$, luego $L[x] \models \text{ZFC-AP}$. Por otra parte, sabemos que se cumple $\text{AP}^{L[x]}$, luego en definitiva $L[x] \models \text{ZFC}$.

El teorema 14.20 admite este enunciado alternativo:

Teorema 14.22 Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista x^\sharp . Entonces existe una única función normal $i : \Omega \rightarrow \Omega$ tal que si $I_x = \{i_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$, entonces

- a) Si κ es un cardinal no numerable, se cumple $i_\kappa = \kappa$.
- b) I_x es una clase de indiscernibles para $L[x]$.
- c) Todo $a \in L[x]$ es definible en $L[x]$ a partir de I_x .

DEMOSTRACIÓN: Sea I_x la clase de los indiscernibles de Silver para x . Sea $i : \Omega \rightarrow I_x$ la semejanza. Como $I_\kappa^x \cap \kappa$ tiene ordinal κ , la restricción de i^{-1} a este conjunto tiene imagen κ , luego $i_\kappa = \kappa$. Además, el hecho de que $I_\kappa^x \cap \kappa$ sea c.n.a. en κ equivale a que $i|_\kappa : \kappa \rightarrow \kappa$ es normal y, como esto vale para todo κ , concluimos que i es normal.

Si $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ y $\alpha_1 < \dots < \alpha_n, \beta_1 < \dots < \beta_n \in I_x$, tomamos un cardinal no numerable κ mayor que α_n y β_n , de modo que

$$\begin{aligned} L[x] \models \phi[\alpha_1, \dots, \alpha_n] &\leftrightarrow L_\kappa[x] \models \phi[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \\ &\leftrightarrow L_\kappa[x] \models \phi[\beta_1, \dots, \beta_n] \leftrightarrow L[x] \models \phi[\beta_1, \dots, \beta_n]. \end{aligned}$$

Por consiguiente I_x es una clase de indiscernibles para $L[x]$.

Dado $a \in L[x]$, sea κ un cardinal no numerable tal que $a \in L_\kappa[x]$. Por el teorema 14.20 existe una fórmula $\phi(u, u_1, \dots, u_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ e indiscernibles $\alpha_1 < \dots < \alpha_n \in I_x \cap \kappa$ de modo que a es el único elemento de $L_\kappa[x]$ que cumple $L_\kappa[x] \models \phi[a, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Entonces $L[x] \models \phi[a, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ y a es el único elemento de $L[x]$ que cumple esto, pues $L[x] \models \bigvee_1 u \phi[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$.

Veamos la unicidad. Basta probar que si i' cumple las condiciones del enunciado, entonces I'_x es la clase de los indiscernibles de Silver, pues entonces i' será necesariamente la única semejanza i entre ésta y Ω . Es fácil ver que I'_x cumple las propiedades a) y b) del teorema 14.20, pero no es evidente que haya de cumplir la propiedad c).

Para cada $a \in L[x]$, sea $F(a)$ el mínimo cardinal no numerable κ tal que $L_\kappa[x]$ contenga indiscernibles $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ de modo que a sea el único elemento de $L[x]$ que cumpla $L[x] \models \phi[a, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ (para una cierta fórmula ϕ).

Para cada cardinal no numerable κ definimos

$$G(\kappa) = \kappa^+ \cup \bigcup_{a \in L_\kappa[x]} F(a),$$

que es de nuevo un cardinal no numerable. Sea κ_0 un cardinal arbitrario y

$$\bigwedge n \in \omega \kappa_{n+1} = G(\kappa_n), \quad \mu = \bigcup_{n \in \omega} \kappa_n.$$

De este modo $\mu > \kappa_0$ es un cardinal no numerable con la propiedad de que todo elemento de $L_\mu[x]$ es definible en $L[x]$ (luego en $L_\mu[x]$) a partir de $I'_x \cap \mu$. Es claro que $I'_x \cap \mu$ es un conjunto de indiscernibles para $L_\mu[x]$ y además es

c.n.a. en μ . Igual que en 14.20 podemos concluir que $\Sigma(L_\mu[x], I'_x \cap \mu) = x^\sharp$, luego $I'_x \cap \mu = I_x \cap \mu$, para cardinales μ arbitrariamente grandes, luego $I'_x = I_x$. ■

Es fácil probar que si existe x^\sharp , entonces todo indiscernible de Silver para x es un cardinal inaccesible $^{L[x]}$. En efecto, como \aleph_1 es un cardinal regular, es un cardinal regular $^{L[x]}$, y lo mismo vale para todos los indiscernibles. Por otra parte, como \aleph_ω es un cardinal límite, también es un cardinal límite $^{L[x]}$, y lo mismo vale para todos los indiscernibles, luego todos ellos son cardinales límite regulares $^{L[x]}$, es decir, inaccesibles $^{L[x]}$.

En realidad los indiscernibles de Silver resultan ser cardinales débilmente compactos $^{L[x]}$. Esto se sigue de la versión para $L[x]$ del teorema 14.4:

Teorema 14.23 *Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista x^\sharp . Entonces toda aplicación estrictamente creciente $\pi : I_x \rightarrow I_x$ se extiende a una única inmersión elemental $\bar{\pi} : L[x] \rightarrow L[x]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\kappa < \mu$ cardinales no numerables de manera que $\pi|_{I_x \cap \kappa} : I_x \cap \kappa \rightarrow I_x \cap \mu$. Por el teorema 14.4 esta aplicación se extiende a una única inmersión elemental $\bar{\pi}|_{L_\kappa[x]} : L_\kappa[x] \rightarrow L_\mu[x]$. Más concretamente, $\bar{\pi}$ actúa como sigue: si $a \in L_\kappa[x]$, entonces $a = L_\kappa[x](t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, para ciertos $\alpha_1 < \dots < \alpha_n \in I_x \cap \kappa$ y un cierto término de Skolem t . Entonces,

$$\bar{\pi}(a) = L_\mu[x](t)[\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n)].$$

Ahora bien, esto puede reformularse así:

$$\bar{\pi}(L[x](t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n]) = L[x](t)[\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n)], \quad (14.2)$$

pero esto no depende de κ o μ , luego tenemos definida $\bar{\pi} : L[x] \rightarrow L[x]$ que extiende a π y se restringe a inmersiones elementales entre los modelos $L_\kappa[x]$. Es fácil ver entonces que $\bar{\pi}$ es una inmersión elemental. La unicidad es clara, pues una inmersión elemental ha de cumplir (14.2). ■

Como consecuencia:

Teorema 14.24 *Si $x \subset V_\omega$ y existe x^\sharp , los indiscernibles de Silver para x son cardinales débilmente compactos $^{L[x]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\pi : I_x \rightarrow I_x$ creciente tal que ω_1 sea el menor ordinal no fijado. Sea $\bar{\pi} : L[x] \rightarrow L[x]$ la inmersión elemental que extiende a π .

Se cumple que ω_1 es el menor ordinal no fijado por $\bar{\pi}$, pues si $\alpha < \omega_1$, entonces α es definible en $L_{\omega_1}[x]$ a partir de $I_x \cap \omega_1$, es decir, existe una fórmula $\phi(u, u_1, \dots, u_n)$ y un conjunto de indiscernibles $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \omega_1$ de modo que α es el único elemento de $L_{\omega_1}[x]$ (luego de $L[x]$) que cumple $L[x] \models \phi[\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Como $L[x] \models \phi[\bar{\pi}(\alpha), \alpha_1, \dots, \alpha_n]$, ha de ser $\bar{\pi}(\alpha) = \alpha$.

Así pues, el teorema 12.18 nos da que ω_1 es débilmente compacto $^{L[x]}$, pero entonces todos los indiscernibles cumplen lo mismo. ■

Si M es un modelo de un lenguaje formal \mathcal{L} , se dice que $a \in M$ es *definible* en M si existe $\phi(x) \in \text{Form}(\mathcal{L})$ tal que a es el único elemento de M para el que $M \models \phi[a]$.

Por ejemplo, si M es un modelo transitivo de ZFC, entonces $0, 1, \aleph_0, \aleph_1^M, \mathbb{R}^M$, el mínimo cardinal inaccesible ^{M} (si existe) son ejemplos de conjuntos definibles en M . La fórmula que define a \mathbb{R}^M es (cualquier equivalente sin descriptores de) $x = \mathbb{R}$.

Teorema 14.25 *Si $x \subset V_\omega$ y existe x^\sharp , entonces todo conjunto definible en $L[x]$ es numerable. En particular $V \neq L[x]$.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia de que $L_{\omega_1}[x] \prec L[x]$. Si $a \in L[x]$ es definible por la fórmula $\phi(u)$, entonces $L[x] \models \forall u \phi(u)$, luego $L_{\omega_1}[x] \models \forall u \phi(u)$, luego existe un $b \in L_{\omega_1}[x]$ tal que $L_{\omega_1}[x] \models \phi[b]$, luego $L[x] \models \phi[b]$, luego ha de ser $a = b \in L_{\omega_1}[x]$ y, por consiguiente, a es numerable.

En particular $\aleph_1^{L[x]}$ es numerable, luego $\aleph_1^{L[x]} \neq \aleph_1$, luego $L[x] \neq V$. ■

Así, por ejemplo, si existe 0^\sharp , se cumple que \mathcal{P}^{ω^L} es numerable, luego sólo hay una cantidad numerable de subconjuntos constructibles de ω , así mismo, \aleph_{27}^L es un ordinal numerable y, en general, alguien que “viva” en L se equivocará al identificar cualquier objeto que deba ser no numerable, pues el objeto que él reconozca como \aleph_{27} o como \mathbb{R} o como el menor cardinal débilmente compacto (que lo hay) será en realidad un elemento de L_{ω_1} . Todos los conjuntos que quedan fuera de L_{ω_1} serán conjuntos que ve, pero que no puede definir. Por ejemplo, verá al auténtico \aleph_1 , pero no lo reconocerá como tal (ya hemos dicho que su \aleph_1 será en realidad un ordinal numerable), verá que \aleph_1 es un cierto cardinal débilmente compacto, pero no será ni “el menor cardinal débilmente compacto”, ni “el \aleph_1 -ésimo cardinal débilmente compacto” ni, en general, “el único conjunto tal que ...”

Del teorema anterior se sigue, en particular, que si existe un cardinal de Ramsey entonces $V \neq L[x]$ para todo $x \subset V_\omega$.

14.3 Los sostenidos y la jerarquía de Lévy

Nos ocupamos ahora de la estructura lógica de los conceptos que hemos definido. Ésta viene dada por el teorema siguiente:

Teorema 14.26 *La fórmula “ Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x ” es Π_1 , luego “Existe x^\sharp ” es Σ_2 .*

DEMOSTRACIÓN: En la definición de conjunto de E.M. hemos exigido que $\Sigma = \Sigma(M, I)$, donde M es un modelo de \mathcal{L}_R elementalmente equivalente a un modelo $L_\lambda[x]$. Observemos que esta hipótesis nos ha hecho falta por tres motivos:

- Para garantizar que los modelos que satisfacen Σ tienen funciones de Skolem definibles,

- para definir Ω^M y probar que esta totalmente ordenado por la pertenencia en todo modelo que satisfaga Σ ,
- para garantizar que todo modelo transitivo que satisfaga Σ es de la forma $L_\lambda[x]$, para cierto λ .

Ahora bien, para garantizar estos hechos no hace falta exigir que los modelos satisfagan todas las sentencias verdaderas en un $L_\lambda[x]$, sino únicamente un conjunto de ellas Σ_0^x definible explícitamente en términos de x .

Por ejemplo, para garantizar la existencia de funciones definibles en un modelo M basta con que satisfaga las sentencias

$$\begin{aligned} \bigwedge x_1 \cdots x_n (\bigvee x_0 \phi(x_0, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee^1 x_0 (\phi(x_0, \dots, x_n) \\ \wedge \bigwedge y (\phi(y, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \chi(x_0, y))))), \end{aligned}$$

para toda $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$. (En realidad, también se usa que $M \models \bigvee y \bigwedge x x \notin y$.)

El teorema 13.27 requiere en su prueba que M satisfaga varias sentencias, entre ellas

$$\bigvee f Y \alpha (\alpha = \omega \wedge \phi(f, Y, \alpha) \wedge \bigwedge y (Ry \rightarrow y \in Y)),$$

las sentencias $\bigvee y (\alpha_u(y) \wedge Ry)$, para $u \in V_\omega$, y otras más.

Cuando decimos que Σ_0^x puede definirse explícitamente queremos decir, más concretamente, que

$$y = \Sigma_0^x \leftrightarrow \phi_0(y, x, V_\omega),$$

donde ϕ_0 es una fórmula Δ_0 del lenguaje \mathcal{L}_m de la teoría de conjuntos. El parámetro V_ω aparece para acotar todas las variables que hagan referencia a fórmulas, sucesiones finitas de fórmulas, números naturales, etc.). Una construcción detallada de ϕ_0 requiere definir sistemáticamente los conceptos lógicos: podemos suponer que los signos de \mathcal{L}_R son los números naturales (p.ej. $R = 0$, $\in = 1$, $= = 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, ...). Así, las sucesiones de signos son los elementos de $\omega^{<\omega} \subset V_\omega$, para definir una fórmula hace falta referirse a una sucesión de cadenas de signos (elementos de $(\omega^{<\omega})^{<\omega} \subset V_\omega$) que enumere las subfórmulas necesarias para construir la fórmula paso a paso, etc. Lo importante es que todas las definiciones necesarias para llegar a Σ_0^x involucran únicamente objetos de V_ω , por lo que pueden formalizarse acotando todas las variables por V_ω .

Si modificamos la definición de conjunto de E.M. sustituyendo “ M es elementalmente equivalente a un modelo $L_\lambda[x]$ ” por “ $M \models \Sigma_0^x$ ”, todos los teoremas que hemos probado siguen siendo válidos. Como al final terminamos teniendo la unicidad de los conjuntos de E.M. notables y bien fundados para x y uno de estos conjuntos respecto a la definición original lo es también respecto a la que acabamos de dar, concluimos que ambas definiciones son equivalentes.

Por otra parte, debemos recordar que todo modelo $L_\lambda[x]$ satisface las sentencias de Σ_0^x .

La fórmula “ Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x ” equivale a

- a) Σ es un conjunto de E.M. para x ,
- b) Σ es notable,
- c) Para todo ordinal límite λ , el modelo (Σ, α, x) está bien fundado.

donde a) lo entendemos en el sentido débil que acabamos de comentar.

Sea \mathcal{L}' el lenguaje formal que consta de los signos de \mathcal{L}_R más un conjunto de constantes $\{c_n\}_{n \in \omega}$. Para cada fórmula ϕ de \mathcal{L}_R sea ϕ' la sentencia de \mathcal{L}' que resulta de sustituir la variable x_i por la constante c_i . Para cada conjunto Σ de fórmulas de \mathcal{L}_R sea Σ' el conjunto formado por las siguientes sentencias de \mathcal{L}' :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Todas las sentencias de } \Sigma_0^x & \\
 \phi' & \text{para cada } \phi \in \Sigma, \\
 c_i \in \Omega & \text{para cada } i \in \omega, \\
 c_i < c_j & \text{para } i < j < \omega, \\
 \phi(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \leftrightarrow \phi(c_{j_1}, \dots, c_{j_n}) & \text{para cada } \phi \in \text{Form}(\mathcal{L}_R), \\
 & i_1 < \dots < i_n, j_1 < \dots < j_n.
 \end{array}$$

Sea a') la fórmula

$$\Sigma' \text{ es consistente} \wedge \bigwedge \phi \in \text{Form}(\mathcal{L}_R) (\phi \in \Sigma \vee \neg \phi \in \Sigma),$$

donde la consistencia hay que entenderla en el sentido sintáctico de que no puede probarse una contradicción a partir de las sentencias de Σ' . Así mismo hay que entender que a') es una fórmula con las variables libres Σ y x , es decir, la construcción de Σ' a partir de Σ forma parte de a').

Veamos que a) \wedge b) \wedge c) es equivalente a a') \wedge b) \wedge c).

En efecto, si se cumple a) \wedge b) \wedge c) entonces existe $x^\#$ y $L_{\omega_1}[x]$ es un modelo de Σ' , interpretando las constantes $\{c_n\}_{n \in \omega}$ con indiscernibles. Por lo tanto Σ' es consistente. Por otra parte, si $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$, se cumplirá $\phi \in \Sigma$ o $\neg \phi \in \Sigma$ según si $L_{\omega_1}[x]$ cumple o no ϕ al interpretar sus variables por indiscernibles.

Recíprocamente, si suponemos a') \wedge b) \wedge c) entonces, por el teorema de completitud, Σ' tiene un modelo M con funciones de Skolem definibles en el cual $I = \{M(c_i) \mid i \in \omega\}$ es un conjunto numerable de indiscernibles. Además se cumple que $\Sigma = \Sigma(M, I)$, pues ciertamente todas las fórmulas de Σ (con las variables interpretadas en I) son verdaderas en M y, recíprocamente, si $M \models \phi[a_1, \dots, a_n]$, con $a_1 < \dots < a_n \in I$, ha de ser $\phi \in \Sigma$ o, de lo contrario $\neg \phi \in \Sigma$ y se cumpliría $M \models \neg \phi[a_1, \dots, a_n]$. Por consiguiente Σ es un conjunto de E.M., es decir, se cumple a).

Una comprobación rutinaria muestra que a') es equivalente a una fórmula $\phi_1(\Sigma, x, V_\omega)$, donde ϕ_1 es Δ_0 . (La consistencia de Σ' significa que no existe ninguna sucesión finita de fórmulas de \mathcal{L}' que demuestre $x \neq x$, y esto puede formularse acotando todas las variables en V_ω , tal y como hemos comentado antes.)

Los teoremas 14.7 y 14.9 caracterizan la propiedad b) en términos puramente sintácticos, luego b) también es equivalente a una fórmula $\phi_2(\Sigma, x, V_\omega)$ con ϕ_2 de tipo Δ_0 .

Finalmente, la propiedad c) tiene esta estructura:

$\bigwedge MEaI\lambda((M, E, a) \models \Sigma_0^x \wedge I \subset M$ es un conjunto de indiscernibles de ordinal $\lambda \wedge M = N(I) \wedge \Sigma = \Sigma(M, I)) \rightarrow E$ está bien fundada en M).

Queremos probar que esto es Π_1 . Por 1.37 sabemos que “estar bien fundada” es Δ_1 , luego basta probar que

$(M, E, a) \models \Sigma_0^x \wedge I \subset M$ es un conjunto de indiscernibles de ordinal $\lambda \wedge M = N(I) \wedge \Sigma = \Sigma(M, I)$

es Σ_1 .

Para definir la relación $(M, E, a) \models \phi[s]$, para $s \in M^{<\omega}$ (bajo el convenio de que los signos de \mathcal{L}_R son números naturales) necesitamos construir una función $f : V_\omega \times M^{<\omega} \rightarrow 2$ (sólo hemos de especificarla, no demostrar su existencia) de modo que $f(\phi, s) = 1$ si y sólo si el dominio de s incluye a todas las variables libres en ϕ y se cumple $M \models \phi[s]$. Todas las variables involucradas pueden acotarse por V_ω y $M^{<\omega}$. Para exigir que I tenga ordinal λ necesitamos una semejanza $g : (\lambda, \in) \rightarrow (I, E)$. El punto más delicado es formalizar que $M = N(I)$, pero, una vez contamos con que $M \models \Sigma_0^x$, esto equivale a que todo elemento de M sea definible a partir de I , lo cual se formaliza sin dificultad. En resumen, podemos escribir nuestra fórmula como

$$\bigvee fgY(Y = M^{<\omega} \wedge f : V_\omega \times Y \rightarrow 2 \wedge g : (\lambda, \in) \rightarrow (I, E) \text{ semejanza} \wedge \dots).$$

En definitiva, tenemos que la fórmula “ Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x ” puede expresarse mediante una fórmula $\bigwedge X\psi(\Sigma, x, V_\omega)$, con ψ de tipo Δ_0 . Ahora bien, $V_\omega = L_\omega$ y sabemos que $y = L_\alpha$ es de tipo Δ_1 . Una simple manipulación nos da

$$\bigwedge Xyz(z = \omega \wedge y = L_z \rightarrow \psi(\Sigma, x, y)),$$

y esto es una fórmula $\phi(\Sigma, x)$ de tipo Π_1 . ■

Como consecuencia de este teorema y del teorema de Lévy-Shoenfield obtenemos que los sostenidos son absolutos para modelos transitivos que sean clases propias:

Teorema 14.27 *Sea M un modelo transitivo de ZFC tal que $\Omega \subset M$ y sea $x \in M$ tal que $x \subset V_\omega$. Entonces*

$$(\text{existe } x^\#)^M \leftrightarrow \text{existe } x^\# \wedge x^\# \in M.$$

Además, en tal caso $(x^\#)^M = x^\#$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\psi(y, \Sigma, x)$ una fórmula Δ_0 tal que $\bigwedge y \psi(y, \Sigma, x)$ equivalga a que Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x .

Si existe x^\sharp y $x^\sharp \in M$, entonces $\bigwedge y \phi(y, x^\sharp, x)$, luego también se cumple $\bigwedge y \in M \psi(y, x^\sharp, x)$, lo que significa que (x^\sharp) es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para $x)^M$, es decir, $(\text{existe } x^\sharp)^M$ y $(x^\sharp)^M = x^\sharp$.

Supongamos ahora que $(\text{existe } x^\sharp)^M$ y $(x^\sharp)^M = x^\sharp$. Sea $\Sigma = (x^\sharp)^M \subset V_\omega$. Hemos de probar que $\bigwedge y \psi(y, \Sigma, x)$.

Consideremos $A = x \times \{0\} \cup \Sigma \times \{1\} \subset V_\omega$. Claramente $A \in M$, luego $L[A] \subset M$. Además A es una función tal que $x = A^{-1}[\{0\}]$ y $\Sigma = A^{-1}[\{1\}]$. Sea $\phi(y, z) \equiv \psi(y, z^{-1}[\{1\}], z^{-1}[\{0\}])$. Claramente ϕ es Δ_0 y $\bigwedge y \psi(y, \Sigma, x)$ equivale a $\bigwedge y \phi(y, A)$. Si esto no se cumpliera, tendríamos que $\bigvee y \neg \phi(y, A)$ y, por el teorema 13.32, también $\bigvee y \in L[A] \neg \phi(y, A)$. En particular $\bigvee y \in M \neg \phi(y, A)$, es decir, $\neg \bigwedge y \in M \psi(y, \Sigma, x)$, por lo que $(\Sigma \neq x^\sharp)^M$, contradicción. ■

Así, por ejemplo, $L[0^\sharp]$ es un modelo de ZFC en el que existe 0^\sharp pero no existe $0^{\sharp\sharp}$ (por el teorema 14.25). Vemos, pues, que la existencia de un sostenido no implica la existencia de los demás.

Ejercicio: Demostrar que la existencia de 0^\sharp no implica la existencia de un cardinal inaccesible (ni, por consiguiente, de ningún otro cardinal grande).

En general, x^\sharp no es absoluto para modelos transitivos de ZFC que no sean clases propias, pero sí lo es para extensiones genéricas:

Teorema 14.28 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $x \subset V_\omega$ tal que $x \in M$, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces*

$$(\text{existe } x^\sharp)^{M[G]} \rightarrow (\text{existe } x^\sharp)^M.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\kappa = (|\mathbb{P}|^+)^M$. Entonces \mathbb{P} conserva los cardinales $\geq \kappa$. Sean $\{\kappa_n\}_{n \in \omega}$ cardinales M tales que $\kappa \leq \kappa_0 < \kappa_1 < \dots$ y sea κ_ω el supremo de los anteriores. Todos ellos son cardinales $M[G]$. Si $(\text{existe } x^\sharp)^{M[G]}$ entonces

$$(x^\sharp)^{M[G]} = \{\phi \in \text{Form}(\mathcal{L}_R) \mid L_{\kappa_\omega}[x] \models \phi[\kappa_1, \dots, \kappa_n]\},$$

pero esto es absoluto para $M - M[G]$, luego $(x^\sharp)^{M[G]} \in M$ y por 14.26 concluimos que $((x^\sharp)^{M[G]})^M$ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para $x)^M$, luego $(\text{existe } x^\sharp)^M$ y, de hecho, $(x^\sharp)^M = (x^\sharp)^{M[G]}$. ■

Así pues, no es posible fabricar sostenidos mediante extensiones genéricas. En particular, si un modelo transitivo numerable M cumple $V = L$ entonces en ninguna extensión genérica de M existen sostenidos. En la sección siguiente entenderemos la importancia de este hecho.

14.4 El lema del cubrimiento

En esta sección mostraremos las consecuencias de un profundo teorema que enunciamos sin demostración, pues la prueba es muy compleja y exige un análisis minucioso de la estructura de la clase L de los conjuntos constructibles (ver [5]):

Teorema 14.29 (Lema del cubrimiento de Jensen) *Si no existe 0^\sharp entonces para todo conjunto $X \subset \Omega$ no numerable existe un conjunto $Y \in L$ tal que $X \subset Y$ y $|X| = |Y|$.*

Es decir, si no existe 0^\sharp , entonces todo conjunto no numerable de ordinales puede cubrirse por un conjunto constructible del mismo cardinal. El teorema siguiente muestra que la no existencia de 0^\sharp implica que el universo V es muy parecido a L .

Ejercicio: Demostrar el recíproco del lema de Jensen. AYUDA: Considerar

$$X = \{\omega_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}.$$

Si existe 0^\sharp entonces \aleph_{ω_1} es regular^L.

Teorema 14.30 *Supongamos que no existe 0^\sharp . Entonces:*

- a) (HCS) *Para todo cardinal singular κ tal que $2^{\text{cf } \kappa} < \kappa$ se cumple $\kappa^{\text{cf } \kappa} = \kappa^+$.*
- b) *Si κ es un cardinal regular^L, entonces $|\kappa| \leq \aleph_1 \vee \text{cf } \kappa = |\kappa|$. En particular κ no es un cardinal singular.*
- c) *Si κ es un cardinal singular entonces $(\kappa^+)^L = \kappa^+$.*

DEMOSTRACIÓN: a) Sea κ un cardinal tal que $2^{\text{cf } \kappa} < \kappa$ y sea $A = [\kappa]^{\text{cf } \kappa}$, el conjunto de los subconjuntos de κ de cardinal $\text{cf } \kappa$. Por el lema de Jensen, para cada $x \in A$ existe un $y \in L$ tal que $x \subset y \subset \kappa$ y $|y| = \aleph_1 \text{cf } \kappa$.

Como hay a lo sumo $|\mathcal{P}^L \kappa| = |(\kappa^+)^L| \leq \kappa^+$ subconjuntos constructibles y de κ y cada uno de ellos puede cubrir a lo sumo a $(\aleph_1 \text{cf } \kappa)^{\text{cf } \kappa} = 2^{\text{cf } \kappa} < \kappa$ subconjuntos x de cardinal $\text{cf } \kappa$, concluimos que $|A| \leq \kappa^+$, o sea, $\kappa^{\text{cf } \kappa} \leq \kappa^+$. La otra desigualdad se cumple siempre.

b) Si κ es un cardinal regular^L y $\aleph_2 \leq \kappa$, sea $X \subset \kappa$ no acotado tal que $|X| = \text{cf } \kappa$. Por el lema de Jensen existe un conjunto $Y \in L$ tal que $X \subset Y \subset \kappa$ y $|Y| = \aleph_1 |X|$. Como κ es regular^L ha de ser $|Y| = |\kappa|$, y por consiguiente $|\kappa| = \aleph_1 \text{cf } \kappa = \text{cf } \kappa$ (la alternativa es $|\kappa| = \aleph_1$, en contra de la hipótesis).

c) Sea κ un cardinal singular y $\mu = (\kappa^+)^L$. Si fuera $\mu \neq \kappa^+$, entonces $|\mu| = \kappa$ y, como κ es singular, $\text{cf } \mu \leq \text{cf } \kappa < \kappa$, es decir, $\text{cf } \mu < \mu$, luego por b) habría de ser $\mu \leq \aleph_1$, lo cual es absurdo. ■

Hemos visto que si ZFC es consistente, también lo es

$$\text{ZFC} + \bigwedge \alpha < \omega \ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2}.$$

Sin embargo, ahora sabemos que no es posible probar que si ZFC es consistente también lo es

$$\text{ZFC} + \bigwedge \alpha \leq \omega \ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2},$$

pues esto contradice la hipótesis de los cardinales singulares, de modo que tal prueba nos daría

$$\frac{\vdash}{\text{ZFC}} \text{Consis ZFC} \rightarrow \text{Consis ZFC} + \text{existe } 0^\sharp,$$

de donde

$$\vdash_{\text{ZFC} + \text{existe } 0^\sharp} \text{Consis ZFC} + \text{existe } 0^\sharp.$$

Por el teorema de incompletitud, esto implica que la existencia de 0^\sharp es contradictoria y por consiguiente —dado nuestro argumento— también ZFC sería contradictorio.

En general, vemos que para demostrar la consistencia de $\neg\text{HCS}$ necesitamos suponer al menos la consistencia de que exista 0^\sharp . De hecho, puede probarse que se necesita una hipótesis algo más fuerte que la existencia de un cardinal medible.

Otra consecuencia es que la HCS se cumple necesariamente en toda extensión genérica construida a partir de un modelo de $\text{ZFC} + \text{V=L}$ (pues en caso contrario 0^\sharp existiría en la extensión y, por el teorema 14.28, también en el modelo de partida).

El apartado b) del teorema anterior nos previene de la dificultad de encontrar una extensión genérica que conserve los cardinales pero no las cofinalidades. Para que ello sea posible en el modelo base M debe existir 0^\sharp , pues si no existe en M tampoco existirá en la extensión $M[G]$, luego todo cardinal regular en M es regular en $L^M = L^{M[G]}$ y por b) es regular en $M[G]$.

Veamos ahora una consecuencia de la propiedad c). En 6.27 hemos demostrado que si ZFC es consistente también lo es $\text{ZF} + \aleph_1$ es singular. Ahora veremos que no es posible demostrar que si ZFC es consistente también lo es $\text{ZF} + \aleph_1$ y \aleph_2 son singulares. De hecho, por el mismo argumento que hemos empleado con la HCS, basta probar el teorema siguiente:

Teorema 14.31 (ZF) *Si \aleph_1 y \aleph_2 son singulares, entonces existe un modelo transitivo M de ZFC en el que existe 0^\sharp .*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que ha de ser $\text{cf } \aleph_1 = \text{cf } \aleph_2 = \aleph_0$, ya que la cofinalidad es siempre un cardinal regular. Sea $\kappa = \aleph_1$ y $\mu = (\kappa^+)^L \leq \aleph_2$, luego $\text{cf } \mu = \aleph_0$. Sean $A \subset \kappa$ y $B \subset \mu$ subconjuntos no acotados en κ y μ , respectivamente, de ordinal ω . Sea $C = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$. Sea $M = L[C]$. Es claro que $C \subset L$, luego $C \in M$, de donde se sigue a su vez que $A, B \in M$.

Como κ es un cardinal, también es un cardinal ^{M} y, como $A \in M$, se cumple $\text{cf}^M \kappa = \aleph_0$. Igualmente $\text{cf}^M \mu = \aleph_0$. Ahora bien, si $\kappa < \alpha < \mu$, entonces $|\alpha|^L = \kappa$, luego $|\alpha|^M = \kappa$. Por consiguiente, si μ fuera un cardinal ^{M} , sería $\mu = (\kappa^+)^M$, pero esto es imposible, pues M cumple ZFC y un cardinal sucesor no puede ser singular. Así pues, μ no es un cardinal ^{M} y en particular $\mu < (\kappa^+)^M$.

Así pues $((\kappa^+)^L < \kappa^+)^M$, luego por el apartado c) del teorema anterior (relativizado a M) concluimos que (existe 0^\sharp) ^{M} . ■

14.5 Inmersiones elementales

Terminamos el capítulo demostrando que la existencia de x^\sharp equivale a la existencia de una inmersión elemental no trivial $j : L[x] \longrightarrow L[x]$. Una implicación la tenemos probada ya (teorema 14.23). La implicación contraria tiene interés —entre otros motivos— porque es el último paso de la prueba del lema de Jensen.

Para empezar, observemos en general que si $j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental no trivial entre modelos transitivos de ZFC y κ es el mínimo ordinal no fijado, entonces κ es un cardinal^M. Esto se prueba con el mismo argumento empleado en 11.33. Al igual que allí, podemos definir

$$U = \{X \in \mathcal{P}^M \kappa \mid \kappa \in j(X)\},$$

y con los mismos argumentos podemos probar lo siguiente:

- a) $\emptyset \notin U, \kappa \in U,$
- b) $\bigwedge XY \in U \ X \cap Y \in U,$
- c) $\bigwedge X \in U \bigwedge Y \in M (X \subset Y \subset \kappa \rightarrow Y \in U),$
- d) $\bigwedge X \in \mathcal{P}^M \kappa (X \in U \vee \kappa \setminus X \in U),$

El conjunto U no es exactamente un ultrafiltro en κ , pero podemos definir la ultrapotencia $\text{Ult}_U^*(M)$ como el conjunto de clases de equivalencia reducidas¹ de la clase $\{f \in M \mid f : \kappa \longrightarrow M\}$ respecto de la relación

$$f =_U g \leftrightarrow \{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U.$$

Definimos la relación de pertenencia R en $\text{Ult}_U^*(M)$ de la forma usual y probamos el teorema 11.14 sin más cambio que la comprobación (siempre trivial) de que los conjuntos involucrados están en M .

Tenemos así que $\text{Ult}_U^*(M)$ es un modelo de ZFC, pero el argumento de 11.16 para probar que está bien fundado no vale ahora, pues si $\{f_n\} \in M^\kappa \cap M$ cumple que $\bigwedge n \in \omega [f_{n+1}]^* R [f_n]$, podemos asegurar que

$$X_n = \{\alpha \in \kappa \mid f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha)\} \in U,$$

pero no tenemos la garantía de que $\{X_n\}_{n \in \omega} \in M$, por lo que no podemos concluir que $\bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$ y, en particular, que la intersección sea no vacía.

No obstante tenemos otro argumento basado en la prueba del teorema 11.33. Definimos $k^* : \text{Ult}_U^*(M) \longrightarrow N$ mediante $k^*([f]^*) = j(f)(\kappa)$. Se comprueba como en este teorema que k^* es una inmersión elemental² y que $j_U^* \circ k^* = j$, donde $j_U^* : M \longrightarrow \text{Ult}_U^*(M)$ es la inmersión natural.

¹Todo esto vale tanto si M es un conjunto como una clase propia, pero nos va a interesar el segundo caso, así que hemos de tomar clases reducidas como en la definición 11.13.

²Hasta ahora nunca hemos trabajado con una inmersión natural de un modelo no transitivo que es una clase propia en otro modelo, pero la definición es la obvia.

Ahora es claro que la relación R en $\text{Ult}_U^*(M)$ es conjuntista y bien fundada. Es conjuntista porque si $[f]^* \in \text{Ult}_U^*(M)$, la restricción de k^* a

$$\{x \in \text{Ult}_U^*(M) \mid x R [f]^*\} \longrightarrow k^*([f]^*)$$

es inyectiva, luego la clase de la izquierda es un conjunto.

Similarmente, si existiera una sucesión $\{x_n\}_{n \in \omega} \in \text{Ult}_U^*(M)$ de manera que $\bigwedge n \in \omega x_{n+1} R x_n$, también tendríamos que $\bigwedge n \in \omega k^*(x_{n+1}) \in k^*(x_n)$, lo cual es imposible.

Por consiguiente podemos colapsar la ultrapotencia, lo que nos da una clase transitiva $\text{Ult}_U(M)$ con la propiedad fundamental

$$\phi^{\text{Ult}_U(M)}([f_1], \dots, [f_n]) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \phi^M(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))\} \in U,$$

una inmersión elemental natural $j_U : M \longrightarrow \text{Ult}_U(M)$, y una inmersión elemental $k : \text{Ult}_U(M) \longrightarrow N$ dada por $k([f]) = j(f)(\kappa)$ tal que $j_U \circ k = j$.

El mismo argumento del teorema 11.22 prueba que $\bigwedge \alpha < \kappa j_U(\alpha) = \alpha$. Por otra parte, si d es la identidad en κ , se comprueban inmediatamente las desigualdades $\kappa \leq [d] < j_U(\kappa)$. Por consiguiente, κ es también el menor ordinal fijado por j_U .

Con estas herramientas podemos probar lo siguiente:

Teorema 14.32 *Sea $x \subset V_\omega$ y supongamos que existe una inmersión elemental no trivial $j : L[x] \longrightarrow L[x]$. Entonces existe otra con la propiedad adicional de que el mínimo ordinal no fijado κ es el mismo y si μ es un cardinal límite tal que $\text{cf } \mu > \kappa$ entonces $j(\mu) = \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U según la discusión anterior y consideremos la inmersión natural $j_U : L[x] \longrightarrow \text{Ult}_U(L[x])$. Toda inmersión elemental j fija a los números naturales y a ω . Como el rango de x es a lo sumo ω , el teorema 11.20 nos da que $j(x) = x$. Como $L[x]$ cumple $V = L[x]$, la ultrapotencia $\text{Ult}_U(L[x])$ ha de cumplir $V = L[j(x)] = L[x]$, luego ha de ser $\text{Ult}_U(L[x]) = L[x]$. Así pues, $j_U : L[x] \longrightarrow L[x]$. Vamos a probar que j_U cumple el teorema.

Ya hemos visto que κ es el menor ordinal no fijado por j_U . El mismo argumento del teorema 11.23 j) nos da que

$$j_U(\mu) = \bigcup_{\alpha < \mu} j_U(\alpha),$$

pero si $\alpha < \mu$ y $a \in j_U(\alpha)$, entonces $a = [f]$ para cierta f que podemos suponer $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ (y además $f \in L[x]$). Por lo tanto ha de ser

$$|j_U(\alpha)| \leq |({}^\kappa \alpha)^{L[x]}| < \mu,$$

pues $L[x]$ cumple la HCG. De aquí se sigue que $j_U(\alpha) < \mu$, luego $j_U(\mu) \leq \mu$, y la otra desigualdad es obvia. ■

Teorema 14.33 (Kunen) *Si $x \in V_\omega$, la existencia de x^\sharp equivale a la existencia de una inmersión elemental no trivial $j : L[x] \rightarrow L[x]$.*

DEMOSTRACIÓN: Según comentábamos al principio de la sección, una implicación es clara por el teorema 14.23. Para probar la contraria, en virtud del teorema anterior podemos partir de una inmersión elemental $j : L[x] \rightarrow L[x]$ con la propiedad adicional de que si κ es el menor ordinal no fijado y μ es un cardinal límite tal que $\text{cf } \mu > \kappa$, entonces $j(\mu) = \mu$.

Para cada ordinal β , definimos inductivamente los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} K_0(\beta) &= \{\mu < \beta \mid \mu \text{ es un cardinal límite con } \text{cf } \mu > \kappa\}, \\ K_{\alpha+1}(\beta) &= \{\mu \in K_\alpha(\beta) \mid |K_\alpha(\beta) \cap \mu| = \mu\}, \\ K_\lambda(\beta) &= \bigcap_{\delta < \lambda} K_\delta(\beta). \end{aligned}$$

La cota β la hemos introducido únicamente para que en la recursión no aparezcan clases propias, pero la podemos suprimir definiendo $K_\alpha = \bigcup_{\beta \in \Omega} K_\alpha(\beta)$. Se comprueba inmediatamente que

$$\begin{aligned} K_0 &= \{\mu < \in \Omega \mid \mu \text{ es un cardinal límite con } \text{cf } \mu > \kappa\}, \\ K_{\alpha+1} &= \{\mu \in K_\alpha \mid |K_\alpha \cap \mu| = \mu\}, \\ K_\lambda &= \bigcap_{\delta < \lambda} K_\delta. \end{aligned}$$

Probamos ahora por inducción que cada K_α es una clase propia y que si λ es un ordinal límite con $\text{cf } \lambda > \kappa$ y $\{\mu_\delta\}_{\delta < \lambda}$ es una sucesión creciente en K_α entonces $\bigcup_{\delta < \lambda} \mu_\delta \in K_\alpha$.

Ciertamente K_0 es una clase propia, pues para todo ordinal δ es claro que $\aleph_{\delta+\kappa^+} \in K_0$ y es mayor que δ .

Si $\text{cf } \lambda > \kappa$ y $\{\mu_\delta\}_{\delta < \lambda}$ es una sucesión creciente en K_0 entonces $\mu = \bigcup_{\delta < \lambda} \mu_\delta$ es claramente un cardinal límite y, como $\{\mu_\delta\}_{\delta < \lambda}$ es una sucesión cofinal creciente en μ , ha de ser $\kappa \leq \text{cf } \lambda \leq \text{cf } \mu$, luego $\mu \in K_0$.

Si K_α cumple estas propiedades, sea β un ordinal y sea $\mu_0 \in K_\alpha$ tal que $\mu_0 \geq \beta$. Definidos $\{\mu_\delta\}_{\delta < \gamma}$ tomamos $\mu_\gamma \in K_\alpha$ mayor que todos los anteriores y de modo que $|K_\alpha \cap \mu_\gamma| > \mu_\delta$ para todo $\delta < \gamma$. Sea $\mu = \bigcup_{\delta < \kappa^+} \mu_\delta \in K_\alpha$. Así

$\mu \geq |K_\alpha \cap \mu| \geq |K_\alpha \cap \mu_{\delta+1}| > \mu_\delta$, para todo $\delta < \kappa^+$, luego ha de ser $|K_\alpha \cap \mu| = \mu$ y por lo tanto $\mu \in K_{\alpha+1}$. Esto prueba que $K_{\alpha+1}$ no está acotado en Ω , luego es una clase propia.

Supongamos que $\{\mu_\delta\}_{\delta < \lambda}$ es una sucesión creciente en $K_{\alpha+1}$ con $\text{cf } \lambda > \kappa$ y sea $\mu = \bigcup_{\delta < \lambda} \mu_\delta$. Por la hipótesis de inducción $\mu \in K_\alpha$. Además se cumple que $|K_\alpha \cap \mu| \geq |K_\alpha \cap \mu_\delta| = \mu_\delta$, para todo $\delta < \lambda$, luego $|K_\alpha \cap \mu| = \mu$ y por consiguiente $\mu \in K_{\alpha+1}$.

Supongamos ahora la hipótesis de inducción para todo $\delta < \lambda$. Sea $\nu \in K_0$ tal que $\nu > \lambda$ y sea α un ordinal arbitrario. La aplicación $\nu \times \lambda \rightarrow \nu$ dada por

$(\beta, \delta) \mapsto \lambda \cdot \beta + \delta$ es biyectiva. Es fácil construir una sucesión creciente $\{\mu_\delta\}_{\delta < \nu}$ tal que $\alpha < \mu_0$ y $\mu_{\lambda \cdot \beta + \delta} \in K_\delta$. Sea $\mu = \bigcup_{\delta < \nu} \mu_\delta$.

Para cada $\delta < \lambda$ se cumple que $\mu = \bigcup_{\beta < \nu} \mu_{\lambda \cdot \beta + \delta}$ y, como $\text{cf } \mu \geq \text{cf } \nu > \kappa$, tenemos por hipótesis de inducción que $\mu \in K_\delta$ para todo $\delta < \lambda$, luego $\mu \in K_\lambda$ y $\mu \geq \alpha$. Así pues, K_λ es una clase propia. La segunda propiedad es obvia.

En lo sucesivo μ será un elemento fijo de K_{ω_1} . Notemos que, como $\mu \in K_0$, se cumple $j(\mu) = \mu$. Veamos que $j|_{L_\mu[x]} : L_\mu[x] \rightarrow L_\mu[x]$ es una inmersión elemental.

Ante todo, si $a \in L_\mu[x]$, tenemos que $(a \in L_\mu[x])^{L[x]}$ y, como j es elemental, $(j(a) \in L_{j(\mu)}[j(x)])^{L[x]}$, es decir, $j(a) \in L_\mu[x]$, luego ciertamente se cumple que $j|_{L_\mu[x]} : L_\mu[x] \rightarrow L_\mu[x]$.

Sea $\phi \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ y $s \in L_\mu[x]^n$. Si $L_\mu[x] \models \phi[s]$, entonces $(L_\mu[x] \models \phi[s])^{L[x]}$, luego $(L_{j(\mu)}[j(x)] \models j(\phi)[j(s)])^{L[x]}$, luego $L_{j(\mu)}[j(x)] \models j(\phi)[j(s)]$.

Sabemos que $j(x) = x$, $j(\mu) = \mu$ y, suponiendo que los signos de \mathcal{L}_R tienen rango finito, también $j(\phi) = \phi$. Además, si $s = (a_1, \dots, a_n)$, entonces $j(s) = (j(a_1), \dots, j(a_n))$. En definitiva, hemos probado que si $a_1, \dots, a_n \in L_\mu[x]$ entonces

$$L_\mu[x] \models \phi[a_1, \dots, a_n] \rightarrow L_\mu[x] \models \phi[j(a_1), \dots, j(a_n)].$$

Llamaremos $i = j|_{L_\mu[x]}$. Acabamos de probar que $i : L_\mu[x] \rightarrow L_\mu[x]$ es una inmersión elemental.

Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $X_\alpha = K_\alpha \cap \mu$. Como $\mu \in K_{\alpha+1}$ se cumple que $|X_\alpha| = \mu$. Sea $M_\alpha = N(\kappa \cup X_\alpha) \prec L_\mu[x]$ y sea $\pi_\alpha : M_\alpha \rightarrow N_\alpha$ la función colapsante. Transportando a través de π_α la interpretación del relator R , tenemos que N_α es un modelo transitivo de \mathcal{L}_R elementalmente equivalente a $L_\mu[x]$, luego por el teorema 13.27 ha de ser $N_\alpha = L_\lambda[x]$, para un cierto ordinal λ . Una simple inducción prueba que para todo $\delta \in M_\alpha$ se cumple $\pi_\alpha(\delta) \leq \delta$, luego ha de ser $\lambda \leq \mu$ (todo ordinal en $L_\lambda[x]$ ha de ser menor que μ), pero por otra parte

$$\mu = |X_\alpha| \leq |M_\alpha| = |N_\alpha| = |L_\lambda[x]| = |\lambda|,$$

de modo que $\lambda = \mu$. Así pues, $N_\alpha = L_\mu[x]$ y llamando $i_\alpha = \pi_\alpha^{-1}$ tenemos una inmersión elemental $i_\alpha : L_\mu[x] \rightarrow L_\mu[x]$. Como $\kappa \subset M_\alpha$, se cumple que $\pi_\alpha|_\kappa$ es la identidad, luego $i_\alpha|_\kappa$ también es la identidad. Definimos $\kappa_\alpha = i_\alpha(\kappa)$.

Hemos de probar que $\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es un conjunto de indiscernibles para $L_\mu[x]$. De momento demostramos lo siguiente:

- Si $\alpha < \omega_1$, entonces κ_α es el menor ordinal mayor que κ en M_α .
- Si $\alpha < \beta < \omega_1$ y $a \in M_\beta$, entonces $i_\alpha(a) = a$. En particular $i_\alpha(\kappa_\beta) = \kappa_\beta$.
- Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $\kappa_\alpha < \kappa_\beta$.

En efecto:

- $\kappa \leq i_\alpha(\kappa) = \kappa_\alpha \in M_\alpha$. Veamos que $\kappa \notin M_\alpha$ y así $\kappa < \kappa_\alpha$.

Si $a \in M_\alpha$, entonces $a = L_\mu[x](t)[\beta_1, \dots, \beta_n]$, para cierto término de Skolem t y ciertos ordinales $\beta_1, \dots, \beta_n \in \kappa \cup X_\alpha$. Ahora bien, j fija a todos los ordinales menores que κ y a todos los de X_0 , luego a los de X_α , de modo que $j(\beta_i) = \beta_i$, para todo i , con lo que $j(a) = a$. Como $j(\kappa) \neq \kappa$, no puede ser $\kappa \in M_\alpha$.

Si existiera un $\beta \in M_\alpha$ tal que $\kappa < \beta < \kappa_\alpha = i_\alpha(\kappa)$, entonces $\pi_\alpha(\beta) < \kappa$, de donde $\beta = i_\alpha(\pi_\alpha(\beta)) = \pi_\alpha(\beta) < \kappa$, contradicción. (Hemos usado que $i_\alpha|_\kappa$ es la identidad).

b) Si $a \in M_\beta$, entonces $a = L_\mu[x](t)[\beta_1, \dots, \beta_n]$, para cierto término de Skolem t y ciertos ordinales $\beta_1, \dots, \beta_n \in \kappa \cup X_\beta$. Si $\beta_i \in X_\beta \subset K_\beta \subset K_{\alpha+1}$, entonces $|K_\alpha \cap \beta_i| = \beta_i$, luego $|X_\alpha \cap \beta_i| = \beta_i$ y, como

$$\pi_\alpha|_{X_\alpha \cap \beta_i} : X_\alpha \cap \beta_i \longrightarrow \pi_\alpha(\beta_i)$$

es inyectiva, tenemos que $|\pi_\alpha(\beta_i)| \geq \beta_i$. Por otra parte es claro que $\pi_\alpha(\beta_i) \leq \beta_i$, luego $\pi_\alpha(\beta_i) = \beta_i$, y también $i_\alpha(\beta_i) = \beta_i$. Si $\beta_i \in \kappa$ sabemos que también $i(\beta_i) = \beta_i$. Por consiguiente $i_\alpha(a) = a$.

c) Tenemos que $K_\beta \subset K_\alpha$, luego $\mu \cap K_\beta \subset \mu \cap K_\alpha$, luego $\kappa \cup X_\beta \subset \kappa \cup X_\alpha$, luego $M_\beta \subset M_\alpha$ y, por a), $\kappa_\alpha \leq \kappa_\beta$.

Como $\kappa < \kappa_\alpha$, también $\kappa_\alpha = i_\alpha(\kappa) < i_\alpha(\kappa_\alpha)$, mientras que por b) se cumple que $i_\alpha(\kappa_\beta) = \kappa_\beta$. Así pues, $\kappa_\alpha \neq \kappa_\beta$.

Definimos ahora, para $\alpha < \beta < \omega_1$, los modelos $M_{\alpha\beta} = N(\kappa_\alpha \cup X_\beta) \prec L_\mu[x]$. Igual que con los M_α , probamos que el colapso de $M_{\alpha\beta}$ es $L_\mu[x]$. Sea $\pi_{\alpha\beta}$ la función colapsante y sea $i_{\alpha\beta}$ su inversa, de modo que $i_{\alpha\beta} : L_\mu[x] \longrightarrow L_\mu[x]$ es una inmersión elemental. También es claro que $\pi_{\alpha\beta}|_{\kappa_\alpha} = i_{\alpha\beta}|_{\kappa_\alpha}$ es la identidad en κ_α . Probemos:

d) Si $\alpha < \beta < \omega_1$ y $\gamma < \alpha$ o $\beta < \gamma < \omega_1$, entonces $i_{\alpha\beta}(\kappa_\gamma) = \kappa_\gamma$.

e) Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta$.

En efecto:

d) Si $\gamma < \alpha$ entonces $\kappa_\gamma < \kappa_\alpha$, luego sabemos que $i_{\alpha\beta}(\kappa_\gamma) = \kappa_\gamma$.

Si $a \in M_{\beta+1}$, entonces $a = L_\mu[x](t)[\delta_1, \dots, \delta_n]$, para un cierto término de Skolem t y ciertos ordinales $\delta_1, \dots, \delta_n \in \kappa \cup X_{\beta+1}$. Si $\delta_i \in X_{\beta+1} \subset K_{\beta+1}$, entonces $|K_\beta \cap \delta_i| = |X_\beta \cap \delta_i| = \delta_i$ y $\pi_{\alpha\beta}|_{X_\beta \cap \delta_i} : X_\beta \cap \delta_i \longrightarrow \pi_{\alpha\beta}(\delta_i)$ es inyectiva, luego $|\pi_{\alpha\beta}(\delta_i)| \geq \delta_i$. Por lo tanto $\pi_{\alpha\beta}(\delta_i) = \delta_i$ e $i_{\alpha\beta}(\delta_i) = \delta_i$. Lo mismo ocurre si $\delta_i \in \kappa < \kappa_\alpha$, luego $i_{\alpha\beta}(a) = a$.

Por consiguiente, si $\beta < \gamma < \omega_1$, tenemos que $\kappa_\gamma \in M_\gamma \subset M_{\beta+1}$, luego $i_{\alpha\beta}(\kappa_\gamma) = \kappa_\gamma$.

e) Claramente $\kappa_\alpha \leq i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha)$. Si $\kappa_\beta < i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha)$, entonces $\pi_{\alpha\beta}(\kappa_\beta) < \kappa_\alpha$ (esto es correcto, pues $\kappa_\beta \in M_\beta \subset M_{\alpha\beta}$). Así, $\kappa_\beta = i_{\alpha\beta}(\pi_{\alpha\beta}(\kappa_\beta)) = \pi_{\alpha\beta}(\kappa_\beta) < \kappa_\alpha$, contradicción. Por consiguiente $\kappa_\alpha \leq i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) \leq \kappa_\beta$. Sea $\delta = i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) \in M_{\alpha\beta}$.

Si fuera $\kappa_\alpha \leq \delta < \kappa_\beta$, tendríamos $\delta = L_\mu[x](t)[\epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \eta_1, \dots, \eta_n]$, donde t es un término de Skolem, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m < \kappa_\alpha$ y $\eta_1, \dots, \eta_n \in X_\beta$. Entonces

$$L_\mu[x] \models \bigvee x_1 \cdots x_m \in [\kappa_\alpha] [\kappa_\alpha] \leq t(x_1, \dots, x_m, [\eta_1], \dots, [\eta_n]) < [\kappa_\beta].$$

Puesto que $\kappa_\alpha = i_\alpha(\kappa)$, $\kappa_\beta = i_\alpha(\kappa_\beta)$ y $\eta_i = i_\alpha(\eta_i)$ para todo i , tenemos también que

$$L_\mu[x] \models \bigvee x_1 \cdots x_m \in [\kappa] \ [\kappa] \leq t(x_1, \dots, x_m, [\eta_1], \dots, [\eta_n]) < [\kappa_\beta].$$

Tomemos $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m < \kappa$ tales que $\gamma = L_\mu[x](t)[\epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \eta_1, \dots, \eta_n]$ cumpla $\kappa \leq \gamma < \kappa_\beta$. Entonces $\gamma \in M_\beta$, y en la prueba de a) hemos visto que $\kappa \notin M_\beta$, luego de hecho $\kappa < \gamma < \kappa_\beta$, en contradicción con a).

Ahora ya es fácil probar que $\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es un conjunto (no numerable) de indiscernibles para $L_\mu[x]$. Sea $\phi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ y $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$, $\beta_1 < \dots < \beta_n$ ordinales en ω_1 . Tomemos $\gamma_1 < \dots < \gamma_n < \omega_1$ de manera que $\alpha_n, \beta_n < \omega_1$. Aplicando la inmersión $i_{\alpha_n \gamma_n}$ obtenemos:

$$L_\mu[x] \models \phi[\kappa_{\alpha_1}, \dots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow L_\mu[x] \models \phi[\kappa_{\alpha_1}, \dots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \kappa_{\gamma_n}].$$

Aplicando sucesivamente $i_{\alpha_{n-1} \gamma_{n-1}}$, etc. llegamos a

$$L_\mu[x] \models \phi[\kappa_{\alpha_1}, \dots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow L_\mu[x] \models \phi[\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}].$$

Similarmente,

$$L_\mu[x] \models \phi[\kappa_{\beta_1}, \dots, \kappa_{\beta_n}] \leftrightarrow L_\mu[x] \models \phi[\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}],$$

luego

$$L_\mu[x] \models \phi[\kappa_{\alpha_1}, \dots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow L_\mu[x] \models \phi[\kappa_{\beta_1}, \dots, \kappa_{\beta_n}].$$

Por el teorema 14.17 existe x^\sharp . ■

Según 13.21, si κ es un cardinal débilmente compacto y $\kappa < \alpha < \kappa^+$ existe una inmersión elemental no trivial $j : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ para cierto β . Es fácil ver que la prueba vale igualmente para $L_\alpha[x]$, con $x \subset V_\omega$. Como los cardinales débilmente compactos son consistentes con el axioma de constructibilidad y los sostenidos no, concluimos que la existencia de una inmersión elemental no trivial $j : L_\alpha[x] \rightarrow L_\beta[x]$ no implica la existencia de x^\sharp . No ocurre lo mismo si añadimos una condición:

Teorema 14.34 *Sea $x \subset V_\omega$ y sea $j : L_\alpha[x] \rightarrow L_\beta[x]$ una inmersión elemental no trivial. Supongamos que el mínimo ordinal no fijado κ cumple $\kappa < |\alpha|$. Entonces existe x^\sharp .*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que si $X \in \mathcal{P}^{L[x]} \kappa$, entonces

$$X \in \mathcal{P}^{L[x]} L_\kappa[x] \subset L_{\kappa^+}[x] \subset L_\alpha[x]$$

por 13.18. En particular está definido $j(X)$, luego podemos definir

$$U = \{X \in \mathcal{P}^{L[x]} \kappa \mid \kappa \in j(X)\}.$$

Este conjunto U cumple (para $M = L[x]$) las propiedades a) – d) enumeradas en la página 367, las cuales bastan para construir la ultrapotencia $\text{Ult}_U^*(L[x])$ y la inmersión elemental (no trivial) $j_U^* : L[x] \rightarrow \text{Ult}_U^*(L[x])$.

El teorema quedará probado si demostramos que la relación de pertenencia R en la ultrapotencia es conjuntista y bien fundada, pues entonces podremos colapsarla a una clase transitiva $\text{Ult}_U(L[x])$ que necesariamente ha de ser $\text{Ult}_U(L[x]) = L[x]$, por lo que tendremos la inmersión natural no trivial $j_U : L[x] \rightarrow L[x]$ y podremos aplicar el teorema anterior.

La prueba de 11.15 vale igualmente en el contexto actual, por lo que la relación de pertenencia en $\text{Ult}_U^*(L[x])$ es conjuntista. Supongamos ahora que existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \omega}$ tal que $\bigwedge n \in \omega [f_{n+1}]^* R [f_n]^*$. Esto significa que

$$\{\delta < \kappa \mid f_{n+1}(\delta) \in f_n(\delta)\} \in U$$

para todo $n \in \omega$. Sea λ un ordinal límite tal que $\bigwedge n \in \omega f_n \in L_\lambda[x]$. Sea $M = N(\kappa + 1 \cup \{f_n \mid n \in \omega\}) \prec L_\lambda[x]$. El colapso transitivo de M ha de ser de la forma $L_\eta[x]$. Sea $\pi : M \rightarrow L_\eta[x]$ la función colapsante. Observemos que $|\eta| = |L_\eta[x]| = |M| = |\kappa| \leq \kappa < |\alpha|$, luego $\eta < \alpha$.

Sea $g_n = \pi(f_n)$. Claramente $\bigwedge \delta \leq \kappa \pi(\delta) = \delta$. Como f_n es una función de dominio κ , lo mismo se cumple en $L_\lambda[x]$ y en M , luego $g_n : \kappa \rightarrow V$. (Aquí usamos que $\pi(\kappa) = \kappa$.)

Si $\alpha < \kappa$, se cumple que $f_{n+1}(\delta) \in f_n(\delta)$ si y sólo si esto se cumple en $L_\lambda[x]$, si y sólo si se cumple en M , si y sólo si $g_{n+1}(\delta) \in g_n(\delta)$ se cumple en $L_\eta[x]$ si y sólo si esto se cumple (en V). Por consiguiente

$$X_n = \{\delta < \kappa \mid g_{n+1}(\delta) \in g_n(\delta)\} \in U$$

para todo $n \in \omega$. La diferencia es que ahora sabemos que $g_n \in L_\eta[x] \subset L_\alpha[x]$, luego está definido $j(g_n)$. El hecho de que $X_n \in U$ se traduce en que

$$\kappa \in j(X_n) = \{\delta < j(\kappa) \mid j(g_{n+1})(\delta) \in j(g_n)(\delta)\},$$

de modo que $\bigwedge n \in \omega j(g_{n+1})(\kappa) \in j(g_n)(\kappa)$, lo cual es absurdo. ■

Ejercicio: Probar el recíproco del teorema anterior.

Capítulo XV

Más sobre cardinales medibles

En los últimos capítulos hemos estudiado indirectamente los cardinales medibles a través del estudio de cardinales más débiles. Ahora volvemos a ocuparnos directamente de estos cardinales. En las dos primeras secciones desarrollamos una teoría de ultrapotencias más potente que la que hemos manejado hasta ahora. Con ella probaremos que si κ es un cardinal medible y U es una medida en κ , entonces κ sigue siendo un cardinal medible en $L[U]$. En otras palabras, demostraremos que la existencia de un cardinal medible es consistente con un axioma de constructibilidad relativa $V = L[U]$. Este modelo $L[U]$ satisface, por una parte, ciertas propiedades de unicidad que pueden tenerse por indicios de la consistencia de los cardinales medibles y, por otra parte, veremos que cumplen la hipótesis del continuo generalizada, con lo que tendremos la consistencia de la existencia de cardinales medibles con la determinación más simple de la función del continuo. Esto es el punto de partida para explorar —mediante extensiones genéricas— otras posibilidades. En las dos últimas secciones estudiaremos más a fondo la relación entre los cardinales medibles y los cardinales \mathbb{R} -medibles que introdujimos en el capítulo X.

15.1 Producto de medidas

En esta sección estudiamos un producto de medidas que nos hará falta en la sección siguiente para desarrollar la teoría de ultrapotencias iteradas. El producto que vamos a definir no es más que el usual en teoría de la medida reformulado en términos de ultrafiltros.

Recordemos que si κ es un cardinal medible y hemos fijado una medida U en κ , diremos que una propiedad $\phi(\alpha)$ se cumple “para casi todo α ” si

$$\{\alpha < \kappa \mid \phi(\alpha)\} \in U.$$

Lo abreviaremos por $\bigwedge^* \phi(\alpha)$.

Definición 15.1 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Sea $n \in \omega$, $n > 0$. Si $X \subset {}^n\kappa$ y $\alpha < \kappa$, llamamos

$$X_\alpha = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in {}^{n-1}\kappa \mid (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in X\}.$$

Para cada $n \geq 1$ definimos los conjuntos $U_n \subset \mathcal{P}({}^n\kappa)$ mediante

$$U_1 = U, \quad U_{n+1} = \{X \in \mathcal{P}({}^{n+1}\kappa) \mid \bigwedge^* \alpha X_\alpha \in U_n\}.$$

Teorema 15.2 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ .

- a) Para cada $n \geq 1$, se cumple que U_n es un ultrafiltro κ -completo no principal en ${}^n\kappa$.
- b) Si $Z_1, \dots, Z_n \in U$, entonces $Z_1 \times \dots \times Z_n \in U_n$.
- c) Un conjunto $C \in U_{n+1}$ si y sólo si

$$\{(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in {}^n\kappa \mid \{\beta < \kappa \mid (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta) \in C\} \in U\} \in U_n.$$

DEMOSTRACIÓN: a) Para $n = 1$ es obvio. Supongámoslo cierto para n . Si $\alpha < \kappa$, entonces $({}^{n+1}\kappa)_\alpha = {}^n\kappa \in U_n$, luego $\bigwedge^* \alpha ({}^{n+1}\kappa)_\alpha \in U_n$, lo que implica que ${}^{n+1}\kappa \in U_{n+1}$. Similarmente, $\emptyset_\alpha = \emptyset$, de donde se sigue que $\emptyset \notin U_{n+1}$.

Si $X \in U_{n+1}$ y $X \subset Y \subset {}^{n+1}\kappa$, entonces $\bigwedge^* \alpha X_\alpha \in U_n$ y $\bigwedge^* \alpha X_\alpha \subset Y_\alpha$, luego $\bigwedge^* \alpha Y_\alpha \in U_n$, lo que implica que $Y \in U_{n+1}$.

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha < \mu}$ una familia de $\mu < \kappa$ elementos de U_{n+1} . Entonces tenemos que $\bigwedge^* \alpha < \mu \bigwedge^* \beta (X_\alpha)_\beta \in U_n$ y, como la intersección de los μ elementos de U donde esto ocurre sigue estando en U , de hecho $\bigwedge^* \beta \bigwedge^* \alpha < \mu (X_\alpha)_\beta \in U_n$, luego $\bigwedge^* \beta \bigcap_{\alpha < \mu} (X_\alpha)_\beta \in U_n$, pero esto equivale a $\bigwedge^* \beta \left(\bigcap_{\alpha < \mu} X_\alpha \right)_\beta \in U_n$, luego $\bigcap_{\alpha < \mu} X_\alpha \in U_{n+1}$.

Con esto tenemos que U_{n+1} es un ultrafiltro κ -completo en ${}^{n+1}\kappa$.

SI $X \subset {}^{n+1}\kappa$, o bien $\bigwedge^* \alpha X_\alpha \in U_n$ o bien $\bigwedge^* \alpha X_\alpha \notin U_n$, luego $\bigwedge^* \alpha X_\alpha \in U_n$ o bien $\bigwedge^* \alpha {}^n\kappa \setminus X_\alpha \in U_n$, lo cual equivale a que $X \in U_{n+1}$ o ${}^{n+1}\kappa \setminus X \in U_{n+1}$. Así pues, U_{n+1} es un ultrafiltro.

Si $\{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)\} \in U_{n+1}$, entonces $\bigwedge^* \alpha \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)\}_\alpha \in U_n$, pero claramente $\{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)\}_\alpha \subset \{\alpha_0\}$, luego tendríamos que $\{\alpha_0\} \in U_n$ y así U_n sería principal. Por consiguiente U_{n+1} no es principal.

b) Observemos que

$$(Z_1 \times \dots \times Z_{n+1})_\alpha = \begin{cases} Z_2 \times \dots \times Z_{n+1} & \text{si } \alpha \in Z_1, \\ \emptyset & \text{si } \alpha \notin Z_1. \end{cases}$$

Así, si suponemos —por hipótesis de inducción— que $Z_2 \times \dots \times Z_{n+1} \in U_n$, entonces

$$\{\alpha < \kappa \mid (Z_1 \times \dots \times Z_{n+1})_\alpha \in U_n\} = Z_1 \in U,$$

luego $\bigwedge^* \alpha (Z_1 \times \cdots \times Z_{n+1})_\alpha \in U_n$ y, por lo tanto, $Z_1 \times \cdots \times Z_{n+1} \in U_{n+1}$.

c) Por inducción. Si $n = 1$ tenemos que

$$C \in U_2 \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha C_\alpha \in U \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha \beta \beta \in C_\alpha \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha \beta (\alpha, \beta) \in C \\ \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha \{ \beta < \kappa \mid (\alpha, \beta) \in C \} \in U \leftrightarrow \{ \alpha < \kappa \mid \{ \beta < \kappa \mid (\alpha, \beta) \in C \} \in U \} \in U.$$

Si vale para n , tenemos que $C \in U_{n+2} \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha_0 C_{\alpha_0} \in U_{n+1} \leftrightarrow$

$$\bigwedge^* \alpha_0 \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in {}^n \kappa \mid \{ \beta < \kappa \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) \in C_{\alpha_0} \} \in U \} \in U_n \\ \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha_0 \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in {}^n \kappa \mid \{ \beta < \kappa \mid (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) \in C \} \in U \} \in U_n \leftrightarrow \\ \bigwedge^* \alpha_0 \{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in {}^{n+1} \kappa \mid \{ \beta < \kappa \mid (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) \in C \} \in U \}_{\alpha_0} \in U_n \\ \leftrightarrow \{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in {}^{n+1} \kappa \mid \{ \beta < \kappa \mid (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) \in C \} \in U \} \in U_{n+1}.$$

■

De este modo tenemos que una medida U en un cardinal κ define de forma natural medidas U_n en los productos ${}^n \kappa$ sin más que establecer que un conjunto tiene medida 1 si y sólo si casi todas sus secciones tienen medida 1. Ahora hemos de trasladar estas medidas producto al caso en que el conjunto de índices es un conjunto arbitrario de ordinales, no necesariamente un número natural.

Definición 15.3 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Sea E un conjunto finito (no vacío) de ordinales. Sea $n = |E|$ y sea $\pi : E \rightarrow n$ la semejanza. Sea $\bar{\pi} : {}^n \kappa \rightarrow \kappa^E$ la biyección natural inducida por π mediante $\bar{\pi}(f) = \pi \circ f$. Sea

$$U_E = \{ \bar{\pi}[X] \mid X \in U_n \}.$$

En definitiva, U_E es la medida correspondiente a U_n en κ^E a través de la identificación entre κ^E y ${}^n \kappa$ resultante de hacer corresponder los índices de E y n en orden creciente.

Si $|E| > 1$ y α es su mínimo elemento, definimos $E' = E \setminus \{\alpha\}$ y para cada $X \subset \kappa^E$ y cada $\beta < \kappa$ definimos

$$X_\beta = \{ t|_{E'} \mid t \in X \wedge t(\alpha) = \beta \}.$$

El teorema siguiente es la traducción obvia del teorema anterior a conjuntos de índices arbitrarios:

Teorema 15.4 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Sea E un conjunto de ordinales finito no vacío. Entonces

- U_E es un ultrafiltro κ -completo no principal en κ^E .
- Si $|E| = 1$ entonces U_E se corresponde con U a través de la identificación obvia entre κ^E y κ .

c) Si $|E| > 1$, β es el mínimo de E y $E' = E \setminus \{\beta\}$, entonces

$$X \in U_E \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha X_\alpha \in U_{E'}.$$

d) Si $|E| > 1$, β es el máximo de E y $E' = E \setminus \{\beta\}$, entonces

$$C \in U_E \leftrightarrow \{t \in \kappa^{E'} \mid \{\alpha < \kappa \mid t \frown \alpha \in C\} \in U\} \in U_{E'},$$

donde $t \frown \alpha$ representa la aplicación que resulta de extender t asignándole a β el valor α .

Existe una relación sencilla entre las medidas que acabamos de definir:

Definición 15.5 Sean $E \subset F$ conjuntos de ordinales no vacíos y sea κ un cardinal. Definimos $i_{EF} : \mathcal{P}(\kappa^E) \rightarrow \mathcal{P}(\kappa^F)$ mediante

$$i_{EF}(X) = \{t \in \kappa^F \mid t|_E \in X\}.$$

Teorema 15.6 Sea κ un cardinal medible, U una medida en κ y $E \subset F$ conjuntos de ordinales finitos no vacíos. Sea $X \subset \kappa^E$. Entonces

$$X \in U_E \leftrightarrow i_{EF}(X) \in U_F.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero el caso en que $E = \{a\}$, donde a es el mínimo de F . Sea $F' = F \setminus \{a\}$. Podemos suponer que $F' \neq \emptyset$, pues en otro caso $E = F$ y el resultado es trivial. Sea $\bar{X} = \{f(a) \mid f \in X\} \subset \kappa$ (es el conjunto que se corresponde con X en la identificación entre κ^E y κ). Por el teorema anterior tenemos que $i_{EF}(X) \in U_F \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha i_{EF}(X)_\alpha \in U_{F'}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} i_{EF}(X)_\alpha &= \{t|_{F'} \mid t \in i_{EF}(X) \wedge t(a) = \alpha\} = \{t|_{F'} \mid t(a) \in \bar{X} \wedge t(a) = \alpha\} \\ &= \{t|_{F'} \mid \alpha \in \bar{X}\} = \begin{cases} \kappa^{F'} & \text{si } \alpha \in \bar{X}, \\ \emptyset & \text{si } \alpha \notin \bar{X}. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto $i_{EF}(X) \in U_F \leftrightarrow \bar{X} \in U \leftrightarrow X \in U_E$.

Ahora veamos el teorema por inducción sobre $|F|$. Si $E = F$ el resultado es obvio. Supongamos $|E| < |F|$. Sea a el mínimo de F y sea $F' = F \setminus \{a\}$. Supongamos que $a \in E$. Si $E = \{a\}$ estamos en el caso anterior. En caso contrario $E' = E \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Es fácil ver que $i_{EF}(X)_\alpha = i_{E'F'}(X_\alpha)$. Por consiguiente

$$i_{EF}(X) \in U_F \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha i_{EF}(X)_\alpha \in U_{F'} \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha i_{E'F'}(X_\alpha) \in U_{F'} \leftrightarrow$$

[por hip. de ind.] $\bigwedge^* \alpha X_\alpha \in U_{E'} \leftrightarrow X \in U_E$.

Finalmente, supongamos que $a \notin E$. Entonces $i_{EF}(X)_\alpha = i_{E'F'}(X)$ y

$$i_{EF}(X) \in U_F \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha i_{EF}(X)_\alpha \in U_{F'} \leftrightarrow \bigwedge^* \alpha i_{E'F'}(X) \in U_{F'} \leftrightarrow$$

[por hip. de ind.] $\bigwedge^* \alpha X \in U_E \leftrightarrow X \in U_E$. ■

Queremos definir productos infinitos de la medida U , es decir, medidas sobre subconjuntos de ${}^\alpha\kappa$, pero no es posible definir las sobre todos los subconjuntos de ${}^\alpha\kappa$, sino únicamente sobre un álgebra que definimos a continuación:

Definición 15.7 Sea κ un cardinal y α un ordinal. Un conjunto $Z \subset {}^\alpha\kappa$ tiene *soporte finito* si existe un $E \subset \alpha$ finito y un $X \subset \kappa^E$ de modo que $Z = i_{E\alpha}$. En tal caso diremos que E es un *soporte* de Z .

Claramente, si $Z = i_{E\alpha}(X)$ y $E \subset F$ son finitos, entonces $Z = i_{F\alpha}(i_{E\alpha}(X))$, con lo que F también es un soporte de Z .

Se cumple además que si $i_{E\alpha}(X) = i_{E\alpha}(Y)$ entonces $X = Y$.

Llamaremos \mathbb{B}_α al conjunto de todos los subconjuntos de ${}^\alpha\kappa$ con soporte finito.

La prueba del teorema siguiente no presenta ninguna dificultad:

Teorema 15.8 Sea κ un cardinal y α un ordinal. Entonces:

- a) Si $E \subset \alpha$ entonces $\emptyset = i_{E\alpha}(\emptyset)$ y ${}^\alpha\kappa = I_{E\alpha}(\kappa^E)$, luego $\emptyset, {}^\alpha\kappa \in \mathbb{B}_\alpha$.
- b) Si $X, Y \in \mathbb{B}_\alpha$ existen $E \subset \alpha$ finito y $A, B \subset \kappa^E$ tales que $X = i_{E\alpha}(A)$, $Y = i_{E\alpha}(B)$.
- c) $i_{E\alpha}(X) \cap i_{E\alpha}(Y) = i_{E\alpha}(X \cap Y)$, $i_{E\alpha}(X) \cup i_{E\alpha}(Y) = i_{E\alpha}(X \cup Y)$,
 $i_{E\alpha}(X) \setminus i_{E\alpha}(Y) = i_{E\alpha}(X \setminus Y)$.

- d) \mathbb{B}_α es un álgebra de subconjuntos de ${}^\alpha\kappa$.

Definición 15.9 Sea κ un cardinal medible, U una medida en κ y α un ordinal. Definimos $U_\alpha \subset \mathbb{B}_\alpha$ como sigue: Si $Z \in \mathbb{B}_\alpha$, $Z = i_{E\alpha}(X)$, con $E \subset \alpha$ finito y $X \subset \kappa^E$, entonces

$$Z \in U_\alpha \leftrightarrow X \in U_E.$$

Para que esta definición sea aceptable hemos de probar que no depende de la elección del soporte E , es decir, suponemos que $Z = i_{E\alpha}(X) = i_{F\alpha}(Y)$ y hemos de comprobar que $X \in U_E \leftrightarrow Y \in U_F$. Ahora bien:

$$X \in U_E \leftrightarrow i_{E E \cup F}(X) \in U_{E \cup F}, \quad Y \in U_F \leftrightarrow i_{F E \cup F}(Y) \in U_{E \cup F},$$

luego basta probar que $i_{E E \cup F}(X) = i_{F E \cup F}(Y)$. En efecto, si $f \in \kappa^{E \cup F}$ y $g \in {}^\alpha\kappa$ es cualquier extensión de f , se cumple

$$f \in i_{E E \cup F}(X) \leftrightarrow f|_E \in X \leftrightarrow g \in Z \leftrightarrow g|_F \in Y \leftrightarrow f|_F \in Y \leftrightarrow f \in i_{F E \cup F}(Y).$$

■

Esta “medida” en ${}^\alpha\kappa$ no es realmente una medida en el sentido que estamos dándole nosotros al término. No ya sólo porque no está definida en toda el álgebra $\mathcal{P}^\alpha\kappa$, sino porque no es ni siquiera σ -aditiva. No obstante, es un ultrafiltro, y esto bastará para nuestros fines:

Teorema 15.10 Si κ es un cardinal medible, U es una medida en κ y α es un ordinal, entonces U_α es un ultrafiltro en \mathbb{B}_α .

DEMOSTRACIÓN: ${}^\alpha\kappa = i_{E_\alpha}(\kappa^E)$ y $\kappa^E \in U_E$, luego ${}^\alpha\kappa \in U_\alpha$. Igualmente, $\emptyset = i_{E_\alpha}(\emptyset)$ y $\emptyset \notin U_E$, luego $\emptyset \notin U_\alpha$.

Si $i_{E_\alpha}(X), i_{E_\alpha}(Y) \in U_\alpha$, entonces $X, Y \in U_E$, luego $X \cap Y \in U_E$, luego $i_{E_\alpha}(X) \cap i_{E_\alpha}(Y) = i_{E_\alpha}(X \cap Y) \in U_\alpha$.

Si $i_{E_\alpha}(X) \in U_\alpha$, $i_{E_\alpha}(X) \subset i_{E_\alpha}(Y)$, entonces $X \in U_E$ y $X \subset Y$, luego $Y \in U_E$ y también $i_{E_\alpha}(Y) \in U_\alpha$.

Dado $i_{E_\alpha}(X) \in \mathbb{B}_\alpha$, o bien $X \in U_E$ o bien $\kappa^E \setminus X \in U_E$, luego $i_{E_\alpha}(X) \in U_\alpha$ o bien ${}^\alpha\kappa \setminus i_{E_\alpha}(X) = i_{E_\alpha}(\kappa^E \setminus X) \in U_\alpha$. ■

15.2 Ultrapotencias iteradas

Queremos definir ultrapotencias de V respecto de los filtros U_α que acabamos de definir, pero, como no son σ -completos, para garantizar que las ultrapotencias estén bien fundadas necesitamos introducir una condición de finitud en sus elementos acorde con la condición de finitud que cumplen los elementos de U_α .

Definición 15.11 Sea κ un cardinal medible y α un ordinal. Diremos que una función $f \in V^{<\alpha}$ tiene *soporte finito* $E \subset \alpha$ si existe una función $g \in V^{\kappa^E}$ tal que $\bigwedge t \in {}^\alpha\kappa f(t) = g(t|_E)$.

Es fácil ver que si E es un soporte de f y $E \subset F \subset \alpha$ (con F finito) entonces F es también un soporte de f .

Sea P_α la clase de las funciones de $V^{<\alpha}$ con soporte finito. Es claro que si $f, g \in P_\alpha$ tienen soporte E (y notemos que dos funciones siempre tienen un soporte común) entonces los conjuntos

$$\{t \in {}^\alpha\kappa \mid f(t) = g(t)\} \quad \text{y} \quad \{t \in {}^\alpha\kappa \mid f(t) \in g(t)\}$$

también tienen soporte E , luego están en el álgebra \mathbb{B}_α . Definimos en P_α la relación de equivalencia

$$f =_\alpha g \leftrightarrow \{t \in {}^\alpha\kappa \mid f(t) = g(t)\} \in U_\alpha,$$

y definimos $\text{Ult}_{U_\alpha}^*(V)$ como la clase formada por las clases de equivalencia restringidas (formadas por elementos de rango mínimo), como es usual. En $\text{Ult}_{U_\alpha}^*(V)$ definimos la relación

$$[f]_\alpha^* R_\alpha [g]_\alpha^* \leftrightarrow \{t \in {}^\alpha\kappa \mid f(t) \in g(t)\} \in U_\alpha.$$

Así mismo definimos $j_\alpha^* : V \longrightarrow \text{Ult}_{U_\alpha}^*(V)$ mediante $j_\alpha^*(a) = [c_a]_\alpha^*$. Es claro que la función constante c_a tiene soporte finito.

La prueba del teorema 11.14 se adapta fácilmente a este contexto. Únicamente hay que añadir la comprobación de que los conjuntos y funciones que aparecen tienen soporte finito. Por ejemplo, si ϕ es una fórmula y t es un término, es claro que un soporte finito común de f_1, \dots, f_n es también un soporte finito del conjunto

$$\{t \in {}^\alpha\kappa \mid \phi^V(f_1(t), \dots, f_n(t))\}$$

y de la función

$$g(t) = t^V(f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

El único punto de la prueba que requiere una comprobación adicional es la equivalencia entre (11.3) y (11.4). En nuestro contexto serían

$$\bigvee f \in P_\alpha \{t \in {}^\alpha\kappa \mid \alpha^V(f(t), f_1(t), \dots, f_n(t))\} \in U_\alpha. \quad (15.1)$$

y

$$\{t \in {}^\alpha\kappa \mid \bigvee x \in V\alpha^V(x, f_1(t), \dots, f_n(t))\} \in U_\alpha. \quad (15.2)$$

Por las observaciones anteriores ya sabemos que todos los conjuntos involucrados tienen soporte finito. La única cuestión es que en la prueba de que (11.4) implica (11.3) se construye una función f , y ahora hemos de comprobar que tiene soporte finito. Ahora bien, si E es un soporte finito común de f_1, \dots, f_n y del conjunto de (15.2), entonces existen funciones $g_i \in \kappa^E$ de modo que $f_i(t) = g_i(t|_E)$, así como un conjunto $A \in U_E$ tal que

$$\bigvee x \in V\alpha^V(x, g_1(t|_E), \dots, g_n(t|_E)) \leftrightarrow t|_E \in A.$$

Para cada $t \in A$ definimos $g(t)$ de modo que $\alpha^V(g(t), g_1(t), \dots, g_n(t))$ y tomamos $g(t) = \emptyset$ si $t \notin A$. Así, si $f \in V^{\alpha\kappa}$ viene dada por $f(t) = g(t|_E)$, resulta que f tiene soporte E y el conjunto

$$\{t \in {}^\alpha\kappa \mid \alpha^V(f(t), f_1(t), \dots, f_n(t))\}$$

contiene a $i_{E\alpha}(A)$, luego está en U_α .

Así pues, el teorema fundamental es válido para las ultrapotencias $\text{Ult}_{U_\alpha}^*(V)$. El paso siguiente es, naturalmente, colapsarlas.

Teorema 15.12 *En las condiciones de la definición anterior, la relación R_α es conjuntista en $\text{Ult}_{U_\alpha}^*(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $[f]_\alpha^* \in \text{Ult}_{U_\alpha}^*(V)$. Hemos de probar que la clase

$$C = \{[g]_\alpha^* \in \text{Ult}_{U_\alpha}^*(V) \mid [g]_\alpha^* R_\alpha [f]_\alpha^*\}$$

es un conjunto. Si $[g]_\alpha^*$ está en esta clase, entonces $\{t \in {}^\alpha\kappa \mid f(t) \in g(t)\} \in U_\alpha$. Sea E un soporte finito común de f y g y, por lo tanto, de este conjunto. Existe $X \in U_E$ de modo que

$$g(t) \in f(t) \leftrightarrow t|_E \in X.$$

Sea $h \in V^{\kappa^E}$ tal que $\bigwedge t \in {}^\alpha \kappa \ g(t) = h(t|_E)$. Sea h' la función que coincide con h en X y vale \emptyset fuera de X . Sea $g' \in V^{\alpha \kappa}$ dada por $g'(t) = h'(t|_E)$. Entonces g y g' coinciden sobre $i_{E\alpha}(X) \in U_\alpha$, luego $[g]_\alpha^* = [g']_\alpha^*$, y además $\bigwedge t \in {}^\alpha \kappa \ \text{rang } g'(t) \leq \text{rang } f(t)$. De aquí se sigue fácilmente que $\text{rang } g' \leq \text{rang } f$.

Si llamamos ρ al rango de f , la aplicación $P_\alpha \cap V_{\rho+1} \rightarrow C$ dada por $g \mapsto [g]_\alpha^*$ es suprayectiva, luego C es un conjunto. ■

Teorema 15.13 *En las condiciones anteriores, la relación R_α está bien fundada en $\text{Ult}_{U_\alpha}^*(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \omega}$ en P_α tal que $\bigwedge n \in \omega \ [f_{n+1}]_\alpha^* R_\alpha [f_n]_\alpha^*$. A su vez, esto significa que

$$X_n = \{t \in {}^\alpha \kappa \mid f_{n+1}(t) \in f_n(t)\} \in U_\alpha.$$

La intersección $\bigcap_{n \in \omega} X_n$ no tiene por qué ser un elemento de U_α (ni siquiera de \mathbb{B}_α), pero vamos a probar que es no vacía, con lo que si t es uno de sus elementos, tendremos que $\bigwedge n \in \omega \ f_{n+1}(t) \in f_n(t)$, lo cual es absurdo y el teorema quedará probado.

Vamos a construir una sucesión $\{t_\beta\}_{\beta < \alpha}$ que cumpla:

- $t_\beta : \beta \rightarrow \kappa$,
- $\bigwedge \beta \gamma (\beta < \gamma \rightarrow t_\beta \subset t_\gamma)$,
- Si $\alpha = \beta + \gamma$, entonces $\bigwedge n \in \omega \ \{s \in {}^\gamma \kappa \mid t_\beta \frown s \in X_n\} \in U_\gamma$,

donde $t_\beta \frown s$ representa a la yuxtaposición definida de forma natural.

Es claro que $t_0 = \emptyset$ cumple estas condiciones. Supongamos construido t_β y sea $\alpha = \beta + \gamma$. Por hipótesis $\{s \in {}^\gamma \kappa \mid t_\beta \frown s \in X_n\} = i_{E_n \gamma}(A_n)$, para cierto $E_n \subset \alpha$ finito y $A_n \in U_{E_n}$. No es restricción suponer que $0 \in E_n$. Llamemos $E'_n = E_n \setminus \{0\}$. Por el teorema 15.4, sabemos que $\bigwedge^* \delta (A_n)_\delta \in U_{E'_n}$, o sea, $B_n = \{\delta < \kappa \mid (A_n)_\delta \in U_{E'_n}\} \in U$. Podemos tomar $\delta \in \bigcap_{n \in \omega} B_n \in U$.

Definimos $t_{\beta+1} = t_\beta \frown \delta$ (es decir, extendemos t_β haciendo $t_{\beta+1}(\beta) = \delta$).

Si $n \in \omega$, sea F'_n el conjunto que resulta de restar 1 a cada uno de los números naturales que pueda haber en E'_n . Sea $A'_n \subset \kappa^{F'_n}$ el conjunto que se corresponde con $(A_n)_\delta$ a través de la semejanza entre E'_n y F'_n . Claramente $A'_n \in U_{F'_n}$, pues si $r = |E'_n| = |F'_n|$, los conjuntos A'_n y $(A_n)_\delta$ se corresponden con el mismo subconjunto de ${}^r \kappa$.

Si $\gamma < \omega$, tomamos $\gamma' = \gamma - 1$ (notemos que $\gamma > 0$ porque $\beta < \alpha$). Así $\alpha = (\beta + 1) + \gamma'$. Si $\gamma \geq \omega$ tomamos $\gamma' = \gamma$, y también $\alpha = (\beta + 1) + \gamma'$. En cualquier caso $F'_n \subset \gamma'$. Sea $X = i_{F'_n \gamma'}(A'_n) \in U_{\gamma'}$.

Así, si $s \in X$, tenemos que $s|_{F'_n} \in A'_n$, luego $(\delta \frown s)|_{E'_n} \in (A_n)_\delta$, luego $(\delta \frown s)|_{E_n} \in A_n$, luego $\delta \frown s \in i_{E_n \gamma}(A_n)$, luego $t_{\beta+1} \frown s = t_\beta \frown \delta \frown s \in X_n$. Esto prueba que $\{s \in {}^{\gamma'} \kappa \mid t_{\beta+1} \frown s \in X_n\} \in U_{\gamma'}$.

Supongamos definidos $\{t_\delta\}_{\delta < \lambda}$, con $\lambda < \alpha$, y sea $t_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} t_\delta$. Veamos que cumple lo pedido.

Sea $\alpha = \lambda + \gamma$ y sea $n \in \omega$. Como $X_n \in U_\alpha$, ha de ser $X_n = i_{E\alpha}(A)$, con $E \subset \alpha$ finito y $A \in U_E$. Sea $\lambda \cap E \subset \delta < \lambda$. Sea $\lambda = \delta + \epsilon$, de modo que $\alpha = \delta + (\epsilon + \gamma)$. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$Y = \{s \in {}^{\epsilon+\gamma}\kappa \mid t_\delta \widehat{s} \in X_n\} \in U_{\epsilon+\gamma}.$$

Se cumple que $s \in Y \leftrightarrow t_\delta \widehat{s} \in X_n \leftrightarrow (t_\delta \widehat{s})|_E \in A$, pero esto depende únicamente de la restricción de s al conjunto $\{\zeta < \epsilon + \gamma \mid \delta + \zeta \in E\}$. Pero si $\delta + \zeta \in E$, ha de ser $\delta + \zeta \geq \lambda = \delta + \epsilon$, luego $\zeta \geq \epsilon$, luego $\zeta = \epsilon + \eta$, con $\eta < \gamma$.

Por consiguiente, si llamamos $F = \{\eta < \gamma \mid \lambda + \eta \in E\}$, resulta que un soporte de Y es el conjunto $\epsilon + F = \{\epsilon + \eta \mid \eta \in F\}$.

Así pues, $Y = i_{\epsilon+F, \epsilon+\gamma}(\epsilon + B)$, para un cierto conjunto $\epsilon + B \in U_{\epsilon+F}$. Llamemos $B \in U_F$ al trasladado de B por la semejanza $\epsilon + : F \rightarrow \epsilon + F$ y sea $Z = i_{F\gamma}(B) \in U_\gamma$.

Sea $t_\lambda = t_\delta \widehat{t}$, con $t \in {}^\epsilon\kappa$. Entonces, si $s \in Z$, tenemos que $s|_F \in B$, luego $(t \widehat{s})|_{\epsilon+F} \in \epsilon + B$, luego $t \widehat{s} \in Y$, luego $t_\lambda \widehat{s} = t_\delta \widehat{t \widehat{s}} \in X_n$. Esto prueba que $Z \subset \{s \in {}^\lambda\kappa \mid t_\lambda \widehat{s} \in X_n\} \in U_\lambda$.

Tenemos, pues, construida la sucesión $\{t_\beta\}_{\beta < \alpha}$.

Si $\alpha = \beta + 1$, entonces $\{\delta < \kappa \mid t_\beta \widehat{\delta} \in X_n\} \in U$, luego tomando un δ en la intersección de estos conjuntos obtenemos un $t_\alpha = t_\beta \widehat{\delta} \in \bigcap_{\delta < \alpha} X_n$.

Si α es un límite, tomamos $t_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} t_\beta$ y se cumple lo mismo, pues si $n \in \omega$, como $X_n \in U_\alpha$, ha de ser de la forma $X_n = i_{E\alpha}(A)$, para un cierto $E \subset \alpha$ finito y $A \in U_E$. Existe $\beta < \alpha$ tal que $E \subset \beta$. Sea $\alpha = \beta + \gamma$. Entonces

$$\{s \in {}^\gamma\kappa \mid t_\beta \widehat{s} \in X_n\} \in U_\gamma,$$

pero si s es cualquier elemento de este conjunto, $t_\lambda|_E = (t_\beta \widehat{s})|_E \in A$, luego también $t_\lambda \in X_n$. ■

Definición 15.14 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Para cada ordinal α , llamaremos $\text{Ult}_U^\alpha(V)$ al colapso transitivo de $\text{Ult}_{U_\alpha}^*(V)$.

Así, si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula (metamatemática) y $f_1 \cdots f_n \in P_\alpha$ se cumple el teorema fundamental:

$$\phi^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}([f_1]_\alpha, \dots, [f_n]_\alpha) \leftrightarrow \{t \in {}^\alpha\kappa \mid \phi^V(f_1(t), \dots, f_n(t))\} \in U_\alpha.$$

En particular $\text{Ult}_U^\alpha(V)$ es un modelo transitivo de ZFC.

La aplicación $i_{0\alpha} : V \rightarrow \text{Ult}_U^\alpha(V)$ dada por $i_{0\alpha}(a) = [c_a]_\alpha$ es una inmersión elemental. La razón del doble subíndice es que podemos definir más inmersiones:

Teorema 15.15 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Si $1 \leq \alpha \leq \beta$, la aplicación $i_{\alpha\beta} : \text{Ult}_U^\alpha(V) \longrightarrow \text{Ult}_U^\beta(V)$ dada por $i_{\alpha\beta}([f]_\alpha) = [g]_\beta$, donde $g(s) = f(s|_\alpha)$, es una inmersión elemental.

DEMOSTRACIÓN: Hemos de comprobar que $i_{\alpha\beta}$ está bien definida. Tomamos f y $f' \in P_\alpha$ tales que $[f]_\alpha = [f']_\alpha$ y hemos de probar que $[g]_\beta = [g']_\beta$.

Por hipótesis $\{s \in {}^\alpha\kappa \mid f(s) = f'(s)\} = i_{E\alpha}(A)$, donde $E \subset \alpha$ finito y $A \in U_E$. Si $s \in i_{E\beta}(A)$, entonces $s|_\alpha \in i_{E\alpha}(A)$, luego $f(s|_\alpha) = f'(s|_\alpha)$, luego $g(s) = g'(s)$. Esto prueba que

$$i_{E\beta}(A) \subset \{s \in {}^\beta\kappa \mid g(s) = g'(s)\} \in U_\beta,$$

luego $[g]_\beta = [g']_\beta$.

Veamos que $i_{\alpha\beta}$ es una inmersión elemental. Para ello consideramos una fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ y clases $[f_1]_\alpha, \dots, [f_n]_\alpha \in \text{Ult}_U^\alpha(V)$.

Si $\phi^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}([f_1]_\alpha, \dots, [f_n]_\alpha)$, entonces

$$\{s \in {}^\alpha\kappa \mid \phi^V(f_1(s), \dots, f_n(s))\} = i_{E\alpha}(A),$$

con $E \subset \alpha$ finito y $A \in U_E$. Es fácil ver entonces que

$$i_{E\beta}(A) \subset \{s \in {}^\beta\kappa \mid \phi^V(g_1(s), \dots, g_n(s))\} \in U_\beta,$$

luego $\phi^{\text{Ult}_U^\beta(V)}([g_1]_\beta, \dots, [g_n]_\beta)$, es decir, $\phi^{\text{Ult}_U^\beta(V)}(i_{\alpha\beta}([f_1]_\alpha), \dots, i_{\alpha\beta}([f_n]_\alpha))$. ■

Notemos que $i_{\alpha\alpha}$ es simplemente la identidad en $\text{Ult}_U^\alpha(V)$. Si definimos $\text{Ult}_U^0(V) = V$ y tomamos como i_{00} la identidad en V , entonces tenemos inmersiones elementales $i_{\alpha\beta} : \text{Ult}_U^\alpha(V) \longrightarrow \text{Ult}_U^\beta(V)$ para todos los ordinales $0 \leq \alpha \leq \beta$. El teorema siguiente afirma esencialmente que las ultrapotencias iteradas con las inmersiones $i_{\alpha\beta}$ forman un sistema inductivo de modelos:

Teorema 15.16 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Entonces, para todos los ordinales $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ se cumple que $i_{\alpha\beta} \circ i_{\beta\gamma} = i_{\alpha\gamma}$.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer $\alpha < \beta < \gamma$. Veamos primero el caso $\alpha = 0$. Si $x \in V$, entonces $(i_{\alpha\beta} \circ i_{\beta\gamma})(x) = i_{\beta\gamma}([c_x]_\beta) = [g]_\gamma$, donde $g(s) = c_x(s|_\beta) = x$, es decir, $g = c_x$ y, por consiguiente, $(i_{\alpha\beta} \circ i_{\beta\gamma})(x) = [c_x]_\gamma = i_{\alpha\gamma}(x)$.

Supongamos ahora que $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Sea $[f]_\alpha \in \text{Ult}_U^\alpha(V)$. Entonces $(i_{\alpha\beta} \circ i_{\beta\gamma})([f]_\alpha) = i_{\beta\gamma}([g]_\beta) = [h]_\gamma$, donde $h(s) = g(s|_\beta) = s|_\alpha$. Por lo tanto $(i_{\alpha\beta} \circ i_{\beta\gamma})([f]_\alpha) = i_{\alpha\gamma}([f]_\alpha)$. ■

El teorema siguiente afirma que, para ordinales límite λ , la ultrapotencia $\text{Ult}_U^\lambda(V)$ es el límite inductivo de las ultrapotencias anteriores.

Teorema 15.17 Sea κ un cardinal medible, U una medida en κ y λ un ordinal límite. Entonces todo $[f]_\lambda \in \text{Ult}_U^\lambda(V)$ es de la forma $i_{\delta\lambda}([g]_\delta)$, para un $\delta < \lambda$ y un $[g]_\delta \in \text{Ult}_U^\delta(V)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $E \subset \lambda$ un soporte finito de f y sea $\delta < \lambda$ tal que $E \subset \delta$. Sea $h : \kappa^E \rightarrow V$ tal que $f(s) = h(s|_E)$ y sea $g : {}^\delta\kappa \rightarrow V$ dada por $g(s) = h(s|_E)$. De este modo $[g]_\delta \in \text{Ult}_U^\delta(V)$ y claramente $i_{\delta\lambda}([g]_\delta) = [f]_\lambda$. ■

Informalmente podemos pensar en las ultrapotencias iteradas como una sucesión creciente de modelos de ZFC, y entonces el teorema anterior dice que $\text{Ult}_U^\lambda(V)$ es la unión de los modelos anteriores. No obstante hemos de tener presente que desde un punto de vista conjuntista la situación es justo la contraria: pronto probaremos que las ultrapotencias forman una sucesión decreciente de clases propias.

Según comentamos en el capítulo XI, las ultrapotencias son definibles en ZFC, y lo mismo es válido para las ultrapotencias iteradas (y sus inmersiones elementales), es decir, las fórmulas $x = [f]_\alpha$, $x \in \text{Ult}_U^\alpha(V)$, $y = i_{\alpha\beta}(x)$, etc. pueden definirse sin hacer referencia a clases propias. Como consecuencia, si M es un modelo transitivo de ZFC, κ es un cardinal medible^M, U es una medida^M en κ y $\alpha \in M$ es un ordinal, podemos definir

$$\text{Ult}_U^\alpha(M) = \{x \in M \mid (x \in \text{Ult}_U^\alpha(V))^M\}.$$

Claramente, $\text{Ult}_U^\alpha(M)$ es un modelo transitivo de ZFC, pues si θ es un axioma de ZFC, se cumple $(\theta^{\text{Ult}_U^\alpha(V)})^M$, pero esto es lo mismo que $\theta^{\text{Ult}_U^\alpha(M)}$. Así mismo están definidas las inmersiones elementales $i_{\alpha\beta}^M : \text{Ult}_U^\alpha(M) \rightarrow \text{Ult}_U^\beta(M)$, para $\alpha \leq \beta \in \Omega^M$.

Ahora podemos probar que las ultrapotencias iteradas son realmente ultrapotencias iteradas en sentido literal:

Definición 15.18 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Definimos $\kappa_\alpha = i_{0\alpha}(\kappa)$ y $U^\alpha = i_{0\alpha}(U)$, de modo que κ_α es un cardinal medible ^{$\text{Ult}_U^\alpha(V)$} y U^α es una medida ^{$\text{Ult}_U^\alpha(V)$} en κ_α . Por consiguiente está definida la ultrapotencia $\text{Ult}_{U^\alpha}(\text{Ult}_U^\alpha(V))$.

Ahora probamos que ésta es simplemente la siguiente ultrapotencia de V :

Teorema 15.19 Sea κ un cardinal medible, U una medida en κ y α un ordinal. Entonces

$$\text{Ult}_U^{\alpha+1}(V) = \text{Ult}_{U^\alpha}(\text{Ult}_U^\alpha(V)) \quad y \quad i_{\alpha\alpha+1} = i_{01}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha = 0$ es obvio. Supongamos que $\alpha > 1$. Vamos a definir un isomorfismo

$$\Phi : \text{Ult}_U^{\alpha+1}(V) \rightarrow \text{Ult}_{U^\alpha}(\text{Ult}_U^\alpha(V)).$$

Con ello la primera parte del teorema estará probada, pues el único isomorfismo entre dos clases transitivas es la identidad.

Si $f \in P_{\alpha+1}$, para cada $t \in {}^\alpha\kappa$ sea $f_t : \kappa \rightarrow V$ la aplicación dada por $f_t(\beta) = f(t \frown \beta)$. Sea $F : {}^\alpha\kappa \rightarrow V$ dada por $F(t) = f_t$. Es claro que si f tiene soporte $E \cup \{\alpha\}$ entonces F tiene soporte E , luego $[F]_\alpha \in \text{Ult}_U^\alpha(V)$.

Como $\{t \in {}^\alpha \kappa \mid F(t) : c_\kappa(t) \longrightarrow V\} = {}^\alpha \kappa \in U_\alpha$, tenemos $[F]_\alpha : \kappa_\alpha \longrightarrow V$, luego podemos considerar $[[F]_\alpha] \in \text{Ult}_{U_\alpha}(\text{Ult}_V^\alpha(V))$.

Vamos a ver que $\Phi([f]_{\alpha+1}) = [[F]_\alpha]$ está bien definida.

Si $[f]_{\alpha+1} = [g]_{\alpha+1}$, sea $E \cup \{\alpha\}$ un soporte finito para f y g . Sea

$$A = \{t \in {}^\alpha + 1\kappa \mid f(t) = g(t)\} \in U_{\alpha+1}.$$

Claramente A tiene también soporte $E \cup \{\alpha\}$, luego $A = i_{E \cup \{\alpha\}}(C)$, para un cierto $C \in U_{E \cup \{\alpha\}}$. Por el teorema 15.4,

$$Y = \{t \in \kappa^E \mid \{\beta < \kappa \mid t \frown \beta \in C\} \in U\} \in U_E.$$

Tomemos $t \in i_{E \cup \{\alpha\}}(Y)$. Entonces $t|_E \in Y$, luego $\{\beta < \kappa \mid t|_E \frown \beta \in C\} \in U$. Para cada β en este conjunto, $(t \frown \beta)|_{E \cup \{\alpha\}} \in C$, luego $t \frown \beta \in A$, luego concluimos que $f(t \frown \beta) = g(t \frown \beta)$. Hemos probado que

$$\{\beta < \kappa \mid t|_E \frown \beta \in C\} \subset \{\beta < \kappa \mid f(t \frown \beta) = g(t \frown \beta)\} \in U.$$

Por consiguiente,

$$i_{E \cup \{\alpha\}}(Y) \subset \{t \in {}^\alpha \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid f(t \frown \beta) = g(t \frown \beta)\} \in U\} \in U_\alpha.$$

Por definición de F y G , esto equivale a que

$$\{t \in {}^\alpha \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid F(t)(\beta) = G(t)(\beta)\} \in U\} \in U_\alpha.$$

Por el teorema fundamental $\{\beta < [c_\kappa] \mid [F]_\alpha(\beta) = [G]_\alpha(\beta)\} \in [c_U]$, o sea, $\{\beta < \kappa_\alpha \mid [F]_\alpha(\beta) = [G]_\alpha(\beta)\} \in U^\alpha$, lo cual se cumple igualmente relativizado a $\text{Ult}_V^\alpha(V)$ y, el teorema fundamental relativizado a este modelo nos da que $[[F]_\alpha] = [[G]_\alpha]$, es decir, que $\Phi([f]_{\alpha+1}) = \Phi([g]_{\alpha+1})$.

Invirtiendo este razonamiento llegamos a la inyectividad de Φ . En efecto, si $\Phi([f]_{\alpha+1}) = \Phi([g]_{\alpha+1})$, entonces $[[F]_\alpha] = [[G]_\alpha]$, luego

$$\{\beta < [c_\kappa] \mid [F]_\alpha(\beta) = [G]_\alpha(\beta)\} \in [c_U],$$

de donde

$$\{t \in {}^\alpha \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid F(t)(\beta) = G(t)(\beta)\} \in U\} \in U_\alpha,$$

o también:

$$Y = \{t \in {}^\alpha \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid f(t \frown \beta) = g(t \frown \beta)\} \in U\} \in U_\alpha.$$

Sea $A = \{t \in {}^\alpha + 1\kappa \mid f(t) = g(t)\} = i_{E \cup \{\alpha\}}(C)$, para un cierto $C \subset \kappa^{E \cup \{\alpha\}}$. Basta probar que $C \in U_{E \cup \{\alpha\}}$.

Si $t \in Y$, entonces $\{\beta < \kappa \mid f(t \frown \beta) = g(t \frown \beta)\} \in U$. Si β está en este conjunto, entonces $t \frown \beta \in A$, luego $t|_E \frown \beta \in C$. Por consiguiente

$$\{\beta < \kappa \mid t|_E \frown \beta \in C\} \in U.$$

Esto prueba que

$$Y \subset Z = \{t \in {}^\alpha\kappa \mid \{\beta < \kappa \mid t|_E \frown \beta \in C\} \in U\} \in U_\alpha.$$

Sea $D = \{t \in \kappa^E \mid \{\beta < \kappa \mid t \frown \beta \in C\} \in U\}$. Claramente $Z = i_{E\alpha}(D)$, luego $D \in U_E$ y el teorema 15.4 nos da que $C \cup U_{E \cup \{\alpha\}}$, como había que probar.

Reemplazando el igualador por el relator de pertenencia en los dos argumentos anteriores obtenemos análogamente la relación

$$[f]_{\alpha+1} \in [g]_{\alpha+1} \leftrightarrow \Phi([f]_{\alpha+1}) \in \Phi([g]_{\alpha+1}).$$

Veamos que Φ es suprayectiva. Para ello tomamos $[h] \in \text{Ult}_{U^\alpha}(\text{Ult}_U^\alpha(V))$. Entonces $h \in \text{Ult}_U^\alpha(V)$ cumple que $h : \kappa_\alpha \longrightarrow \text{Ult}_U^\alpha(V)$. Sea $h = [F]_\alpha$. Como $([F]_\alpha : [c_\kappa] \longrightarrow V)^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}$, tenemos que $\{t \in {}^\alpha\kappa \mid F(t) : \kappa \longrightarrow V\} \in U_\alpha$ y, modificando F fuera de este conjunto, podemos suponer que

$$\bigwedge t \in {}^\alpha\kappa \ F(t) : \kappa \longrightarrow V.$$

Sea $f : {}^{\alpha+1}\kappa \longrightarrow V$ dada por $f(t) = F(t|_\alpha)(t(\alpha))$. Es fácil ver que si E es un soporte de F entonces $E \cup \{\alpha\}$ es un soporte de f , luego $f \in P_{\alpha+1}$ y $[f]_{\alpha+1} \in \text{Ult}_{U^{\alpha+1}}(V)$. Se comprueba inmediatamente que F es la función construida a partir de f en la definición de Φ , luego $\Phi([f]_{\alpha+1}) = [[F]_\alpha] = [h]$.

Con esto queda probada la igualdad $\text{Ult}_{U^{\alpha+1}}(V) = \text{Ult}_{U^\alpha}(\text{Ult}_U^\alpha(V))$. Más aún, tenemos que Φ es la identidad. Veamos ahora la correspondiente a las inmersiones.

Si $[f]_\alpha \in \text{Ult}_U^\alpha(V)$, entonces $i_{\alpha\alpha+1}([f]_\alpha) = [g]_{\alpha+1}$, donde $g(t) = f(t|_\alpha)$.

Por otro lado, $i_{01}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}([f]_\alpha) = [c_{[f]_\alpha}]^\alpha$, donde el superíndice denota clase módulo U^α .

Si $t \in {}^\alpha\kappa$ y $\beta < \kappa$, entonces $f(t) = f((t \frown \beta)|_\alpha) = g(t \frown \beta) = g_t(\beta) = G(t)(\beta)$. Así pues, $\{\beta < \kappa \mid f(t) = G(t)(\beta)\} = \kappa \in U$, luego

$$\{t \in {}^\alpha\kappa \mid \{\beta < \kappa \mid f(t) = G(t)(\beta)\} \in U\} = {}^\alpha\kappa \in U_\alpha,$$

pero esto equivale a que

$$\{t \in {}^\alpha\kappa \mid \{\beta < c_\kappa(t) \mid f(t) = G(t)(\beta)\} \in c_U(t)\} = {}^\alpha\kappa \in U_\alpha,$$

luego el teorema fundamental nos da que $\{\beta < \kappa_\alpha \mid [f]_\alpha = [G]_\alpha(\beta)\} \in U^\alpha$ o, lo que es lo mismo, $\{\beta < \kappa_\alpha \mid c_{[f]_\alpha}(\beta) = [G]_\alpha(\beta)\} \in U^\alpha$, lo cual sigue siendo cierto relativizado a $\text{Ult}_U^\alpha(V)$, con lo que

$$[c_{[f]_\alpha}]^\alpha = [[G]_\alpha] = \Phi([g]_{\alpha+1}) = [g]_{\alpha+1} = i_{\alpha\alpha+1}([f]_\alpha).$$

Por lo tanto $i_{\alpha\alpha+1} = i_{01}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}$. ■

Ahora podemos probar el resultado general sobre ultrapotencias iteradas:

Teorema 15.20 (Teorema de factorización) *Sea κ un cardinal medible, U una medida en κ y α, β ordinales. Entonces*

$$\text{Ult}_{U^\alpha}^\beta(\text{Ult}_U^\alpha(V)) = \text{Ult}_U^{\alpha+\beta}(V)$$

y si $\gamma \leq \beta$, entonces $i_{\alpha+\gamma}^{\alpha+\beta} = i_{\gamma\beta}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}$.

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre β . Para $\beta = 0$ es trivial. Si es cierto para β , relativizamos el teorema anterior a $\text{Ult}_U^\alpha(V)$, lo que nos da que¹

$$\text{Ult}_{U^\alpha}^{\beta+1}(\text{Ult}_U^\alpha(V)) = \text{Ult}_{(U^\alpha)^\beta}(\text{Ult}_{U^\alpha}^\beta(\text{Ult}_U^\alpha(V))),$$

donde $(U^\alpha)^\beta = i_{0\beta}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(U^\alpha) = i_{\alpha+\beta}(i_{0\alpha}(U)) = i_{0\alpha+\beta}(U) = U^{\alpha+\beta}$.

Aplicando la hipótesis de inducción y otra vez el teorema anterior, concluimos que

$$\text{Ult}_{U^\alpha}^{\beta+1}(\text{Ult}_U^\alpha(V)) = \text{Ult}_{U^{\alpha+\beta}}(\text{Ult}_U^{\alpha+\beta}(V)) = \text{Ult}_U^{\alpha+\beta+1}(V).$$

Para probar la relación entre las inmersiones elementales podemos suponer $\gamma < \beta + 1$, pues si se da la igualdad es trivial. Aplicando la relativización del teorema anterior, la hipótesis de inducción y de nuevo el teorema anterior, vemos que

$$\begin{aligned} i_{\gamma\beta+1}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)} &= (i_{\gamma\beta} \circ i_{\beta\beta+1})^{\text{Ult}_U^\alpha(V)} = i_{\alpha+\gamma}^{\alpha+\beta} \circ i_{01}^{\text{Ult}_{U^\alpha}^\beta(\text{Ult}_U^\alpha(V))} \\ &= i_{\alpha+\gamma}^{\alpha+\beta} \circ i_{01}^{\text{Ult}_U^{\alpha+\beta}(V)} = i_{\alpha+\gamma}^{\alpha+\beta} \circ i_{\alpha+\beta}^{\alpha+\beta+1} = i_{\alpha+\gamma}^{\alpha+\beta+1}. \end{aligned}$$

Supongamos el teorema para todo $\delta < \lambda$. Vamos a definir un isomorfismo

$$\Phi : \text{Ult}_{U^\alpha}^\lambda(\text{Ult}_U^\alpha(V)) \longrightarrow \text{Ult}_U^{\alpha+\lambda}(V),$$

que tendrá que ser la identidad.

Si $x \in \text{Ult}_{U^\alpha}^\lambda(\text{Ult}_U^\alpha(V))$, por el teorema 15.17 relativizado a $\text{Ult}_U^\alpha(V)$, existen un $\delta < \lambda$ y un $x' \in \text{Ult}_{U^\alpha}^\delta(\text{Ult}_U^\alpha(V)) = \text{Ult}_U^{\alpha+\delta}(V)$ tales que $x = i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x')$. Sea $\Phi(x) = i_{\alpha+\delta}^{\alpha+\lambda}(x')$.

Veamos en primer lugar que la definición de Φ no depende de la elección de δ . Si $x = i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x') = i_{\delta'\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x'')$ con $\delta < \delta'$, entonces

$$i_{\delta'\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x'') = x = i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x') = i_{\delta'\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(i_{\delta\delta'}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x')),$$

luego $x'' = i_{\delta\delta'}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x')$ y, por lo tanto,

$$i_{\alpha+\delta'}^{\alpha+\lambda}(x'') = i_{\alpha+\delta'}^{\alpha+\lambda}(i_{\delta\delta'}^{\alpha+\lambda}(x')) = i_{\alpha+\delta}^{\alpha+\lambda}(x').$$

¹Notemos que el α del teorema anterior es ahora β .

Si $x, y \in \text{Ult}_{U^\alpha}^\lambda(\text{Ult}_U^\alpha(V))$, podemos tomar el mismo δ para ambos, y

$$\begin{aligned} x = y &\leftrightarrow i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x') = i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(y') \leftrightarrow x' = y' \\ &\leftrightarrow i_{\alpha+\delta\ \alpha+\lambda}(x') = i_{\alpha+\delta\ \alpha+\lambda}(y') \leftrightarrow \Phi(x) = \Phi(y). \end{aligned}$$

Veamos ahora que Φ es suprayectiva. Si $a \in \text{Ult}_U^{\alpha+\lambda}(V)$, por el teorema 15.17 existe un $\delta < \lambda$ tal que $a = i_{\alpha+\delta\ \alpha+\lambda}(b)$, con $b \in \text{Ult}_U^{\alpha+\delta}(V) = \text{Ult}_{U^\alpha}^\delta(\text{Ult}_U^\alpha(V))$. Sea $x = i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(b)$. Es inmediato que $\Phi(x) = a$.

Esto nos da la igualdad de las ultrapotencias (y que Φ es la identidad). Por último,

$$i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x) = \Phi(i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}(x)) = i_{\alpha+\delta\ \alpha+\lambda}(x),$$

luego $i_{\delta\lambda}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)} = i_{\alpha+\delta\ \alpha+\lambda}$. ■

Ahora es claro que las ultrapotencias iteradas forman una sucesión decreciente de clases:

Teorema 15.21 *Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Si $\alpha \leq \beta$ son ordinales, se cumple que $\text{Ult}_U^\beta(V) \subset \text{Ult}_U^\alpha(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\beta = \alpha + \delta$, entonces

$$\text{Ult}_U^\beta(V) = \text{Ult}_{U^\alpha}^\delta(\text{Ult}_U^\alpha(V)) \subset \text{Ult}_U^\alpha(V). \quad \blacksquare$$

Terminamos con un par de resultados técnicos que nos serán necesarios en la sección siguiente.

Teorema 15.22 *Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ .*

- a) *Si $\alpha < \beta$ entonces κ_α es el menor ordinal no fijado por $i_{\alpha\beta}$.*
- b) *Si $x \in \text{Ult}_U^\alpha(V)$, $x \subset \kappa_\alpha$ y $\alpha \leq \beta$, entonces $x = i_{\alpha\beta}(x) \cap \kappa_\alpha$.*
- c) *La sucesión $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha \in \omega}$ es normal.*
- d) *Si μ es un cardinal tal que $2^\kappa < \mu$, entonces $\kappa_\mu = \mu$.*
- e) *Si μ es un cardinal tal que $\bigwedge \nu < \mu \nu^\kappa < \mu$ y $\text{cf } \mu > \kappa$ (en particular si μ es límite fuerte y $\text{cf } \mu > \kappa$), entonces $\bigwedge \alpha < \mu i_{0\alpha}(\mu) = \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: a) Es claro que $U_1 = U$ (salvo la identificación $\kappa = {}^1\kappa$) y que $\text{Ult}_U^1(V)$ es la ultrapotencia usual. Además $\kappa_0 = \kappa$, luego el teorema se cumple para i_{01} por el teorema 11.23.

Veamos que se cumple para $i_{0\beta}$ por inducción sobre β . Si vale para $i_{0\beta}$, entonces $i_{0\beta+1} = i_{0\beta} \circ i_{\beta\ \beta+1}$. Por el teorema anterior $i_{\beta\ \beta+1} = i_{01}^{\text{Ult}_U^\beta(V)}$, luego por el caso i_{01} relativizado a $\text{Ult}_U^\beta(V)$, tenemos que $\kappa_\beta = i_{0\beta}(\kappa)$ es el menor ordinal no fijado por $i_{\beta\ \beta+1}$ y, por hipótesis de inducción, κ es el menor ordinal no fijado por $i_{0\beta}$. De aquí se sigue claramente el caso de $i_{0\beta+1}$.

Si κ es el menor ordinal no fijado por cada $i_{0\delta}$, para $\delta < \lambda$, veamos que $i_{0\lambda}(\gamma) = \gamma$ para todo $\gamma < \kappa$ por inducción sobre γ . Si para todo $\epsilon < \gamma$ se cumple $i_{0\lambda}(\epsilon) = \epsilon$, por el teorema 15.17 existe un $\delta < \lambda$ tal que $\gamma = i_{\delta\lambda}(\epsilon)$, para un cierto $\epsilon \leq i_{\delta\lambda}(\epsilon) = \gamma < \kappa$. Por hipótesis de inducción (para δ) tenemos que $i_{0\delta}(\epsilon) = \epsilon$, luego $\gamma = i_{\delta\lambda}(\epsilon) = i_{\delta\lambda}(i_{0\delta}(\epsilon)) = i_{0\lambda}(\epsilon) = \epsilon$ (por hipótesis de inducción en γ). Así pues, $\gamma = i_{0\lambda}(\gamma)$.

Por otra parte, $i_{0\lambda}(\kappa) = i_{1\lambda}(i_{01}(\kappa)) \geq i_{01}(\kappa) > \kappa$.

Con esto tenemos probado a) para las inmersiones $i_{0\beta}$. En general, haciendo $\beta = \alpha + \gamma$, el teorema anterior nos da que $i_{\alpha\beta} = i_{0\gamma}^{\text{Ult}_U^\alpha(V)}$, luego, el resultado para $i_{\alpha\beta}$ es la relativización a $\text{Ult}_U^\alpha(V)$ del caso ya probado.

b) Si $\gamma \in x \subset \kappa_\alpha$, entonces $\gamma = i_{\alpha\beta}(\gamma) \in \kappa_\alpha \cap i_{\alpha\beta}(x)$. Si $\gamma \in \kappa_\alpha \cap i_{\alpha\beta}(x)$, entonces $\gamma = i_{\alpha\beta}(\gamma) \in i_{\alpha\beta}(x)$, luego $\gamma \in x$.

c) $\kappa_{\alpha+1} = i_{0\alpha+1}(\kappa) = i_{\alpha\alpha+1}(i_{0\alpha}(\kappa)) = i_{\alpha\alpha+1}(\kappa_\alpha) > \kappa_\alpha$.

Si $\delta < \lambda$, entonces $\kappa_\delta \leq i_{\delta\lambda}(\kappa_\delta) = \kappa_\lambda$, luego $\bigcup_{\delta < \lambda} \kappa_\delta \leq \kappa_\lambda$.

Si $\gamma < \kappa_\lambda$, entonces $\gamma = i_{\delta\lambda}(\alpha)$, para un $\delta < \lambda$ y un cierto α . Así $i_{\delta\lambda}(\alpha) = \gamma < \kappa_\lambda = i_{\delta\lambda}(\kappa_\delta)$, luego $\alpha < \kappa_\delta$. Por el apartado anterior $\gamma = i_{\delta\lambda}(\alpha) = \alpha < \kappa_\delta$.

Así pues, $\kappa_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \kappa_\delta$ y la sucesión es normal.

d) Obviamente $\mu \leq \kappa_\mu$. Si $\delta < \mu$ y $[f]_\delta \in \kappa_\delta$, podemos exigir que $f : {}^\delta\kappa \rightarrow \kappa$ (con soporte finito). A lo sumo hay $\aleph_0 \cdot |\delta|$ soportes posibles y, para cada uno de ellos, hay a lo sumo κ^κ funciones f posibles. En total tenemos $|\delta| 2^\kappa < \mu$ funciones posibles, luego $|\kappa_\delta| < \mu$, luego $\kappa_\delta < \mu$. Así pues, $\kappa_\mu = \bigcup_{\delta < \mu} \kappa_\delta \leq \mu$.

e) Si $[f]_\alpha \in i_{0\alpha}(\mu)$, entonces $f : {}^\alpha\kappa \rightarrow \mu$ con soporte finito. Como cf $\mu > \kappa$ existe un ordinal $\delta < \mu$ tal que $f : {}^\alpha\kappa \rightarrow \delta$ y, por tanto, $[f] \in i_{0\alpha}(\delta)$, es decir, $i_{0\alpha}(\mu) \subset \bigcup_{\delta < \mu} i_{0\alpha}(\delta)$.

Además hay a lo sumo $\aleph_0 \cdot |\alpha|$ soportes finitos posibles para f y, para cada uno de ellos, hay a lo sumo $|\delta|^\kappa$ funciones f posibles. En total $|i_{0\alpha}(\delta)| \leq |\alpha| \cdot |\delta|^\kappa < \mu$, luego $i_{0\alpha}(\delta) < \mu$. Por consiguiente $i_{0\alpha}(\mu) \leq \mu$. La otra desigualdad es obvia. ■

Teorema 15.23 *Sea D una medida normal en un cardinal medible κ , sea λ un ordinal límite y $x \in \text{Ult}_D^\lambda(V)$. Entonces*

$$x \in D^\lambda \leftrightarrow \bigvee \alpha < \lambda \{ \kappa_\delta \mid \alpha \leq \delta < \lambda \} \subset x.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $x \in D^\lambda$. Por el teorema 15.17 existe un $\alpha < \lambda$ tal que $x = i_{\alpha\lambda}(y)$, para cierto $y \in \text{Ult}_D^\alpha(V)$. Como $i_{\alpha\lambda}(y) \in i_{\alpha\lambda}(D^\alpha)$, se cumple que $y \in D^\alpha$.

Si $\alpha \leq \delta < \lambda$, sea $z = i_{\alpha\delta}(y)$. Entonces $z \in D^\delta$ y, como D^δ es una medida normal $\text{Ult}_D^\delta(V)$ en μ_δ , el teorema 11.26 (junto con el teorema de factorización) nos da que $\kappa_\delta \in i_{\delta\delta+1}(z)$, luego $\kappa_\delta = i_{\delta+1\lambda}(i_{\delta\delta+1}(z)) = i_{\delta\lambda}(z) = x$.

Recíprocamente, si $x \notin D^\lambda$, entonces $\kappa_\lambda \setminus x \in D^\lambda$, luego, por la parte ya probada, existe un $\beta < \lambda$ tal que $\{\kappa_\delta \mid \beta \leq \delta < \lambda\} \subset \kappa_\lambda \setminus x$, luego no se cumple la condición del enunciado. ■

15.3 El modelo $L[U]$

Finalmente estamos en condiciones de estudiar el modelo canónico de un cardinal medible. En realidad los primeros resultados no necesitan de ultrapotencias iteradas. En primer lugar observamos que un cardinal medible sigue siéndolo en el modelo $L[U]$. Omitimos la prueba, pues es una comprobación simplicísima.

Teorema 15.24 *Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Sea $\bar{U} = U \cap L[U]$. Entonces $\bar{U} \in L[U] = L[\bar{U}]$ y \bar{U} es una medida ^{$L[U]$} en κ . Si U es normal, entonces \bar{U} es normal ^{$L[U]$} .*

En particular tenemos que si es consistente la existencia de un cardinal medible, también lo es la existencia de un cardinal medible con una medida (normal, si queremos) U tal que $V = L[U]$.

El siguiente paso es probar que $L[U]$ cumple la hipótesis del continuo generalizada. Probaremos algunos resultados previos. El primero es un sencillo resultado general sobre constructibilidad relativa:

Teorema 15.25 *Sea M un modelo transitivo de ZF–AP y sea A un conjunto tal que $A \cap M \in M$. Entonces $\bigwedge \alpha \in \Omega^M L_\alpha[A] = L_\alpha[A \cap M]$. En particular, si $\Omega \subset M$ se cumple $L[A] = L[A \cap M]$.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre α . Para $\alpha = 0$ es claro. Si vale para α , entonces $L_\alpha[A] = L_\alpha[A \cap M] = L_\alpha[A \cap M]^M \in M$, luego $L_\alpha[A] \subset M$ y así $A \cap L_\alpha[A] = A \cap M \cap L_\alpha[A \cap M]$, de donde

$$\begin{aligned} L_{\alpha+1}[A] &= \mathcal{D}_A(L_\alpha[A]) = \mathcal{D}_{A \cap L_\alpha[A]}(L_\alpha[A]) = \mathcal{D}_{(A \cap M \cap L_\alpha[A \cap M])}(L_\alpha[A \cap M]) \\ &= \mathcal{D}_{A \cap M}(L_\alpha[A \cap M]) = L_{\alpha+1}[A \cap M]. \end{aligned}$$

El caso límite es trivial. ■

Teorema 15.26 *Sean $\kappa \leq \mu$ cardinales infinitos, con μ no numerable, y sea $U \subset \mathcal{P}\kappa$ tal que $U \in L_\mu[U]$. Sea $M \prec L_\mu[U]$ tal que $\kappa \cup \{U\} \subset M$. Entonces el colapso transitivo de M es $L_\lambda[U]$, para cierto $\lambda \leq \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\pi : M \rightarrow N$ la función colapsante. Obviamente π fija a todos los ordinales menores que κ , luego también a todos los subconjuntos de κ (que están en M), luego $\pi(U) = \pi[U \cap M] = U \cap N \in N$.

Como no estamos suponiendo que μ sea regular, no podemos asegurar que $L_\mu[U] \models \text{ZFC–AP}$, pero a pesar de ello el teorema 13.24 nos dice que tiene

sentido afirmar que $L_\mu[U] \models V = L[U]$. Concretamente, si $\phi(f, Y, \alpha)$ es la fórmula del teorema 13.24, tenemos que

$$L_\mu[U] \models \bigwedge x \bigvee \alpha fY(\phi(f, Y, \alpha) \wedge x \in Y).$$

Lo mismo se cumple en M y en N , lo cual se traduce en que

$$\bigwedge x \in N \bigvee \alpha \in \Omega^N \ x \in L_\alpha[U \cap N],$$

de donde $N = L_\lambda[U \cap N]$, para cierto ordinal límite $\lambda = \Omega^N$. El teorema anterior nos da que $L_\lambda[U \cap N] = L_\lambda[U]$. Notemos que éste exige que M (en nuestro caso N) sea un modelo transitivo de ZF-AP, pero esto sólo lo hemos usado para asegurar que $L_\alpha[A \cap M] \subset M$, (para $\alpha \in M$), pero en nuestro caso es $L_\alpha[U \cap N] \subset L_\lambda[U \cap N]$ (para $\alpha < \lambda$), lo cual es obvio.

Se cumple que $\lambda \leq \mu$ porque $\bigwedge \alpha \in M \ \pi(\alpha) \leq \alpha$, luego N tiene a lo sumo los mismos ordinales que M . ■

Descomponemos la prueba de la HCG ^{$L[U]$} en dos partes, la primera de las cuales es un simple argumento de condensación que no requiere la medibilidad.

Teorema 15.27 *Si κ es un cardinal infinito y $V = L[U]$ para cierto $U \subset \mathcal{P}\kappa$, entonces $\bigwedge \mu \geq \kappa \ 2^\mu = \mu^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Como μ cumple la misma hipótesis que κ , basta probarlo para κ . Fijemos un $x \subset \kappa$ y sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal no numerable tal que $U, x \in L_\mu[U]$. Sea $M = N(\kappa \cup \{U, x\}) \prec L_\mu[U]$. Claramente $|M| = \kappa$. Por el teorema anterior, el colapso transitivo de M es $L_\lambda[U]$, para cierto $\lambda \leq \mu$. Además la función colapsante fija a los ordinales menores que κ , luego $x \in L_\lambda[U]$.

Por otra parte, $|\lambda| = |L_\lambda[U]| = |M| = \kappa$, luego $\lambda < \kappa^+$. Con esto hemos probado que $\mathcal{P}\kappa \subset L_{\kappa^+}[U]$, luego $2^\kappa \leq |L_{\kappa^+}[U]| = \kappa^+$. ■

Para probar la HCG bajo κ hemos de usar un argumento de condensación más delicado, basado en el teorema 12.30. Aunque suponemos una medida normal, luego veremos que el teorema es válido para medidas cualesquiera (porque, según veremos, el modelo $L[U]$ no depende de la medida U).

Teorema 15.28 (Silver) *Sea κ un cardinal medible y D una medida normal en κ . Entonces $L[D]$ cumple la HCG.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $V = L[D]$. En vista del teorema anterior, sólo hemos de probar que si $\aleph_0 \leq \mu < \kappa$ entonces $2^\mu = \mu^+$.

Supongamos que $2^\mu > \mu^+$, para cierto cardinal $\mu < \kappa$. El conjunto $\mathcal{P}\mu$ está bien ordenado por \trianglelefteq_D . Sea $f : \gamma \rightarrow \mathcal{P}\mu$ la semejanza. Obviamente $\mu^+ < \gamma$. Sea $x = f(\mu^+)$. Sea α el mínimo ordinal tal que $x \in L_\alpha[D]$.

Si $\beta < \mu^+$, entonces $f(\beta) \trianglelefteq_D f(\mu^+)$, luego $f(\beta) \in L_\alpha[D]$ (recordemos que los conjuntos $L_\alpha[D]$ son segmentos iniciales para el buen orden constructible). Por lo tanto $|\mathcal{P}\mu \cap L_\alpha[D]| \geq \mu^+$.

Sea ν un cardinal regular tal que $\kappa, \alpha < \nu$ y $D \in L_\nu[D]$. Aplicamos el teorema 12.30 a $M = L_\nu[D]$, $P = \mathcal{P}\mu \cap M$ y $X = \mu \cup \{D, x, \alpha\}$ (y el lenguaje

\mathcal{L}_0 de la teoría de conjuntos). Ciertamente $|P| \leq 2^\mu < \kappa$ y $|X| = \mu$. Así pues, existe un submodelo elemental $N \prec M$ tal que $|N| = \kappa$, $\mu \cup \{D, x, \alpha\} \subset N$, $|P \cap \mu| \leq \mu$ y $\kappa \cap N \in D$.

Sea $\pi : N \rightarrow N'$ el colapso transitivo de N . Claramente $N' = L_\lambda[\pi[D]]$, para cierto ordinal límite λ . Veamos que $\pi[D] = D \cap N'$.

Como $\bigwedge \delta \in N \pi(\delta) \leq \delta$, podemos definir $g : \kappa \rightarrow \kappa$ mediante

$$g(\delta) = \begin{cases} \pi(\delta) & \text{si } \delta \in \kappa \cap N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De este modo, $\bigwedge \delta < \kappa g(\delta) \leq \delta$. Si $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) < \delta\} \in D$, por el teorema 11.26 existiría un cierto ordinal $\gamma < \kappa$ tal que $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) = \gamma\} \in D$ y, como también $\kappa \cap N \in D$, la intersección, es decir, el conjunto $\{\delta \in \kappa \cap N \mid \pi(\delta) = \delta\}$ está en D , pero esto es imposible, porque π es inyectiva.

Así pues, $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) = \delta\} \in D$ y, cortando de nuevo con $\kappa \cap N$, concluimos que $Z = \{\delta \in \kappa \cap N \mid \pi(\delta) = \delta\} \in D$.

Si $y \in D \cap N$, entonces $\pi(y) \supset \pi(y \cap Z) = y \cap Z \in D$, luego $\pi(y) \in D \cap N'$.

Si $y \in D \cap N'$ entonces $y = \pi(w)$, con $w \in N$, pero $y \cap Z \subset w$ y además $y \cap Z \in D$, luego $w \in D \cap N$ y, por lo tanto, $y \in \pi(D)$. De aquí se sigue que, en efecto, $\pi(D) = \pi[D \cap N] = D \cap N'$.

De este modo, llegamos a que $N' = L_\lambda[D \cap N'] = L_\lambda[D]$ por el teorema 15.25. Como $\mu \subset N$ es obvio que $\bigwedge \delta < \mu \pi(\delta) = \delta$. De aquí que $\mathcal{P}\mu \cap N = \mathcal{P}\mu \cap N'$ y, en particular, $x \in N' = L_\lambda[D]$. Por minimalidad de α ha de ser $\alpha \leq \lambda$, luego $|\mathcal{P}\mu \cap N| = |\mathcal{P}\mu \cap N'| \geq |\mathcal{P}\mu \cap L_\alpha[D]| \geq \mu^+$.

Sin embargo, también tenemos que $|\mathcal{P}\mu \cap N| = |\mathcal{P}\mu \cap M \cap N| = |P \cap N| \leq \mu$, contradicción. ■

Con esto tenemos una determinación de la función del continuo consistente con un cardinal medible. Ahora vamos a probar varios resultados de unicidad sobre el modelo $L[D]$. El primero es el siguiente:

Teorema 15.29 *Sea D una medida normal en un cardinal κ . Entonces κ es el único cardinal medible ^{$L[D]$} .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $V = L[D]$. Supongamos que existe otro cardinal medible μ . Sea $j : V \rightarrow M$ la inmersión correspondiente a su ultrapotencia asociada y veamos que $M = V$, en contradicción con 11.23.

Como $\bigwedge x x \in L[D]$, ha de ser $(\bigwedge x x \in L[j(D)])^M$, luego $M = L[j(D)]$.

Si $\kappa < \mu$ entonces $j(D) = D$ y llegamos a que $M = L[D] = V$. Supongamos, pues, que $\mu < \kappa$. Sea $Z = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ es fuertemente inaccesible } \wedge \mu < \alpha\} \in D$. Por el teorema 11.23 k) tenemos que $j(\kappa) = \kappa$ y $\bigwedge \alpha \in Z j(\alpha) = \alpha$.

Veamos que $j(D) = D \cap M$, para lo cual basta ver que $j(D) \subset D \cap M$, ya que $j(D)$ es un ultrafiltro ^{M} y $D \cap M$ es un filtro ^{M} . Sea $x \in j(D)$, $x = [f]$. Podemos suponer que $f : \mu \rightarrow D$. Sea $Y = \bigcap_{\delta < \mu} f(\delta) \in D$.

Como $\{\delta < \mu \mid \bigwedge x \in Y x \in f(\delta)\} = \mu \in U$, el teorema fundamental de las ultrapotencias nos da que $\bigwedge x \in j(Y) x \in [f]$, o sea, $j(Y) \subset [f] = x$.

Ahora, $Y \cap Z \in D$ y j fija a todos sus elementos, luego

$$Y \cap Z = j[Y \cap Z] \subset j(Y) \subset x,$$

con lo que $x \in D$.

Consecuentemente, $M = L[j(D)] = L[D \cap M] = L[D] = V$. ■

El siguiente resultado, debido a Kunen, es más delicado y requiere algunos pasos previos. Aquí es donde necesitamos las ultrapotencias iteradas. Consideramos a los modelos $L_\lambda[A]$ como modelos del lenguaje formal \mathcal{L}_R . Se entiende que los núcleos de Skolem se calculan respecto a las funciones de Skolem definibles.

Teorema 15.30 *Sea $D \subset \mathcal{P}\kappa$ tal que $D \in L[D]$. Sea A un conjunto de ordinales tal que $\kappa^+ \leq |A|$. Sea μ un cardinal tal que $D \in L_\mu[D]$ y $A \subset L_\mu[D]$. Sea $M = N(\kappa \cup A \cup \{D\}) \prec L_\mu[D]$. Entonces $\mathcal{P}^{L[D]}\kappa \subset M$ y, por tanto, todo conjunto $x \subset \kappa$, $x \in L[D]$ es definible en $L_\mu[D]$ a partir de $\kappa \cup A$, es decir, existe un término de Skolem t tal que para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n < \kappa$ y $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in A$,*

$$L_\mu[D] \models [x] = t[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m].$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 15.26, el colapso transitivo de M es de la forma $L_\lambda[D]$, para cierto ordinal λ . Como $A \subset M$, ha de ser $(\kappa^+)^{L[D]} \leq \kappa^+ \leq \lambda$. En la prueba del teorema 15.27 hemos visto que

$$\mathcal{P}^{L[D]}\kappa \subset (L_{\kappa^+}[D])^{L[D]} \subset L_{\kappa^+}[D] \subset L_\lambda[D] = \pi[M]$$

y, como π fija a los ordinales menores que κ , también $\mathcal{P}^{L[D]}\kappa \subset M$. ■

Ahora probamos que si partimos de un modelo $L[D]$ y construimos una ultrapotencia de orden μ suficientemente grande, el modelo al que llegamos, así como la medida $D^\mu = i_{0\mu}(D)$, son independientes de D .

Teorema 15.31 *Sea κ un ordinal y $D \subset \mathcal{P}\kappa$ tal que $D \in L[D]$, κ es un cardinal $^{L[D]}$ y D es una medida normal $^{L[D]}$ en κ . Sea $\mu > \kappa^+$ un cardinal regular y sea F el filtro de los conjuntos cerrados no acotados en μ . Entonces*

- a) $D^\mu = F \cap \text{Ult}_D^\mu(L[D])$.
- b) $\text{Ult}_D^\mu(L[D]) = L[F]$.
- c) $D^\mu = F \cap L[F]$.

DEMOSTRACIÓN: a) Tenemos que $\mu > \kappa^+ \geq (\kappa^+)^{L[D]} = (2^\kappa)^{L[D]}$. Sea $M = \text{Ult}_D^\mu(L[D])$. Por el teorema 15.22 d) se cumple $i_{0\mu}(\kappa) = \kappa_\mu = \mu$, por lo que D^μ es un ultrafiltro M en μ .

Si $x \in D^\mu$, por 15.23 sabemos que $\bigvee \alpha < \mu \{ \kappa_\delta \mid \alpha \leq \delta < \mu \} \subset x$, y este conjunto es c.n.a. en μ porque la sucesión $\{ \kappa_\delta \}_{\delta < \mu}$ es normal. Por lo tanto $x \in F$. Vemos así que $D^\mu \subset F \cap M$ y, como D^μ es un ultrafiltro M , ha de ser $D^\mu = F \cap M$.

b) Tenemos que $(V = L[D])^{L[D]}$ y, como $i_{0\mu}$ es una inmersión elemental, $(V = L[D^\mu])^M$, es decir, $M = L[D^\mu]$. Consecuentemente,

$$\text{Ult}_D^\mu(L[D]) = L[D^\mu] = L[F \cap M] = L[F].$$

c) es trivial. ■

Teorema 15.32 Sean $D_1, D_2 \subset \mathcal{P}\kappa$, de manera que $D_j \in L[D_j]$ y D_j es una medida normal ^{$L[D_j]$} en κ (para $j = 1, 2$). Entonces $D_1 = D_2$.

DEMOSTRACIÓN: Por simetría basta probar que $D_1 \subset D_2$. Sea μ un cardinal regular mayor que κ^+ y F el filtro generado por los conjuntos c.n.a. de μ . Sean $M_j = \text{Ult}_{D_j}^\mu(L[D_j])$ y sean $i_{0\mu}^j : L[D_j] \rightarrow M_j$ las inmersiones elementales naturales. Por el teorema anterior

$$M_1 = L[F] = M_2 \quad \text{y} \quad i_{0\mu}^1(D_1) = i_{0\mu}^2(D_2) = F \cap L[F] = \overline{F}.$$

Sea A un conjunto de ordinales tal que $|A| = \kappa^+$ y de modo que todo $\alpha \in A$ cumpla $\mu \leq \alpha$, $i_{0\mu}^1(\alpha) = i_{0\mu}^2(\alpha) = \alpha$. Existe por el teorema 15.22 e). Sea ν un cardinal tal que $A \subset \nu$, $D \in L_\nu[D_j]$ y $i_{0\mu}^j(\nu) = \nu$, para $j = 1, 2$ (de nuevo por 15.22).

Si $x \in D_1$, entonces $x \subset \kappa$ y por el teorema 15.30 existe un término de Skolem t tal que para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n < \kappa$, $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in A$ se cumple

$$L_\nu[D_1] \models [x] = t[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m] \quad (15.3)$$

Sea $y \in L_\nu[D_2]$ tal que

$$L_\nu[D_2] \models [y] = t[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m] \quad (15.4)$$

Veamos que $x = y$, para lo cual probamos primero que $z_1 = i_{0\mu}^1(x)$ coincide con $z_2 = i_{0\mu}^2(y)$. Tenemos que $i_{0\mu}^1$ fija a ν y a todos los parámetros de t en (15.3), y que $i_{0\mu}^1(D_1) = \overline{F}$. Por lo tanto, al aplicar $i_{0\mu}^1$ a (15.3), obtenemos

$$L_\nu[\overline{F}] \models [z_1] = t[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m],$$

y al aplicar $i_{0\mu}^2$ a (15.4) obtenemos

$$L_\nu[\overline{F}] \models [z_2] = t[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m],$$

luego $z_1 = z_2$ y por 15.22 es

$$x = \kappa \cap i_{0\mu}^1(x) = \kappa \cap z_1 = \kappa \cap z_2 = \kappa \cap i_{0\mu}^2(y) = y.$$

Ahora, $i_{0\mu}^2(y) = z_2 = z_1 = i_{0\mu}^1(x) \in i_{0\mu}^1(D_1) = i_{0\mu}^2(D_2)$, luego $x = y \in D_2$. Así pues, $D_1 \subset D_2$. ■

El teorema siguiente es la parte técnica del teorema de Kunen, que probamos inmediatamente después:

Teorema 15.33 Sean κ y D tales que $D \in L[D]$ y D es una medida normal ^{$L[D]$} en κ . Sea $\kappa < \alpha < i_{01}(\kappa)$. Entonces no existe ningún $U \subset \mathcal{P}\alpha$ de modo que U es una medida normal ^{$L[U]$} en α .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe tal U . Sea

$$j : L[U] \longrightarrow \text{Ult}_U(L[U]) = L[j(U)]$$

la inmersión natural. Sea μ un cardinal regular mayor que α^{+++} . Sea F el filtro generado por los c.n.a. en μ . Sea $\bar{F} = F \cap L[F]$.

Se cumple que $j(\mu) = \mu$, pues si $\beta < \mu$ y $\gamma \in j(\beta)$, entonces γ es de la forma $[f]$, para cierta $f : \alpha \longrightarrow \beta$ tal que $f \in L[U]$. Por lo tanto

$$|j(\beta)|^{L[U]} \leq |\alpha\beta|^{L[U]} < \mu,$$

pues $L[U]$ cumple la HCG. Por el teorema 11.23 j), $j(\mu) = \bigcup_{\beta < \mu} j(\beta) \leq \mu$.

Por el teorema 15.31, $\bar{F} = (U^\mu)^{L[U]}$. Por otra parte, $j(U)$ es una medida normal ^{$L[j(U)]$} en $j(\alpha)$, y por 11.23,

$$j(\alpha) < ((2^\alpha)^+)^{L[U]} \leq (\alpha^{++})^{L[U]} \leq \alpha^{++},$$

luego $j(\alpha)^+ \leq \alpha^{+++} < \mu$. Podemos aplicar también el teorema 15.31, que nos da que $\bar{F} = (j(U)^\mu)^{L[j(U)]}$.

Aplicando j a $\bar{F} = (U^\mu)^{L[U]}$ obtenemos que $j(\bar{F}) = (j(U)^\mu)^{L[j(U)]}$, luego concluimos que $j(\bar{F}) = \bar{F}$.

Sea $\alpha = [f]_D$ (respecto a $\text{Ult}_D(L[D])$). Como $\alpha < i_{01}(\kappa)$, podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \kappa$. Como D es normal ^{$L[D]$} , tenemos que $\kappa = [d]$, donde d es la identidad en κ . Así, $\bigwedge \delta < \kappa c_f(\delta)(d(\delta)) = f(\delta)$, de donde $i_{01}(f)([d]) = [f]$, es decir, $i_{01}(f)(\kappa) = \alpha$.

Sabemos que $\kappa_1 = i_{01}(\kappa)$ es el menor ordinal no fijado por $i_{1\mu}$, y puesto que $\alpha, \kappa < i_{01}(\kappa)$, se cumple que $i_{1\mu}(\alpha) = \alpha$ e $i_{1\mu}(\kappa) = \kappa$. Aplicando $i_{1\mu}$ a la igualdad $i_{01}(f)(\kappa) = \alpha$ obtenemos que $i_{0\mu}(f)(\kappa) = \alpha$.

Sea A un conjunto de ordinales tal que $|A| = \kappa^+$ y

$$\bigwedge \delta \in A (i_{0\mu}(\delta) = \delta = j(\delta)).$$

Existe por los teoremas 15.22 y 11.23. Igualmente sea ν un cardinal tal que $A \subset \nu$, $i_{0\mu}(\nu) = \nu = j(\nu)$, $f, D \in L_\nu[D]$.

Sea $g_\kappa : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$ la semejanza respecto al orden canónico en $\kappa \times \kappa$. Por el teorema 15.30, el conjunto $g_\kappa[f]$ es definible en $L_\nu[D]$ a partir de $A \cup \kappa$, luego f también lo es (pues la fórmula $g_\kappa(u, v) = w$ es equivalente a una fórmula relativizada a $L_\nu[D]$). Por lo tanto $i_{0\mu}(f)$ es definible en $\text{Ult}_D^\mu(L[D]) = L[\bar{F}]$ a partir de $A \cup \kappa$ y $\alpha = i_{0\mu}(f)(\kappa)$ es definible a partir de $A \cup (\kappa + 1)$, o sea,

$$L_\nu[\bar{F}] \models [\alpha] = t[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m, \kappa],$$

donde t es un término de Skolem, $\alpha_1, \dots, \alpha_n < \kappa$ y $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in A$. Aplicando j obtenemos que

$$L_\nu[\overline{F}] \models [j(\alpha)] = t[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m, \kappa],$$

luego $j(\alpha) = \alpha$, cuando según 11.23 habría de ser $\alpha < j(\alpha)$. ■

Finalmente podemos probar:

Teorema 15.34 (Kunen)

- a) Sea D una medida normal en un cardinal κ . Si $V = L[D]$ entonces κ es el único cardinal medible y D es la única medida normal en κ .
- b) Si κ es un ordinal, $D \subset \mathcal{P}\kappa$ y D es una medida normal ^{$L[D]$} en κ , entonces D es el único subconjunto de κ que cumple esto.
- c) Si $\kappa_1 < \kappa_2$ son ordinales y para $i = 1, 2$ se cumple que $D_i \in L[D_i]$ y D_i es una medida normal ^{$L[D_i]$} en κ_i , entonces existe un ordinal α tal que $L[D_2] = \text{Ult}_{D_1}^\alpha(L[D_1])$ y $D_2 = i_{0_\alpha}(D_1)$. En particular los modelos $L[D_1]$ y $L[D_2]$ son elementalmente equivalentes.

DEMOSTRACIÓN: a) Sabemos que κ es el único cardinal medible por el teorema 15.29. Si D' es otra medida normal en κ , entonces $D \cap L[D]$ y $D' \cap L[D']$ son medidas normales en κ (en $L[D]$ y $L[D']$ respectivamente), luego el teorema 15.32 nos dice que $D \cap L[D] = D' \cap L[D']$, pero, como $V = L[D]$, concluimos que $D \subset D'$, y como son ultrafiltros ha de ser $D = D'$.

b) es el teorema 15.32.

c) Sea α el único ordinal tal que $i_{0_\alpha}(\kappa_1) \leq \kappa_2 < i_{0_{\alpha+1}}(\kappa_1)$. Existe porque la sucesión $\{i_{0_\alpha}(\kappa)\}$ es normal (teorema 15.22).

Aplicamos el teorema anterior tomando $\kappa = i_{0_\alpha}(\kappa_1)$, $D = i_{0_\alpha}(D_1)$ y como α (del teorema anterior) a κ_2 . En efecto, por el teorema de factorización se cumple que $(\kappa \leq \kappa_2 < i_{0_1}(\kappa))^{L[D]}$ y D es una medida normal ^{$L[D]$} en κ .

Como también se cumple que D_2 es una medida normal ^{$L[D_2]$} en κ_2 , ha de ser $\kappa_2 = i_{0_\alpha}(\kappa_1)$ o, de lo contrario, $U = D_2$ contradiría el teorema anterior.

Consecuentemente, $i_{0_\alpha}(D_1)$ es una medida normal ^{$L[i_{0_\alpha}(D_1)]$} en κ_2 , luego por b) ha de ser $i_{0_\alpha}(D_1) = D_2$.

Ahora, como $L[D_1]$ cumple $V = L[D_1]$, aplicando i_{0_α} obtenemos que la ultrapotencia $\text{Ult}_D^\alpha(L[D_1])$ cumple $V = L[D_2]$, luego $\text{Ult}_D^\alpha(L[D_1]) = L[D_2]$. ■

Casi estamos a punto de probar la unicidad de todos los modelos $L[U]$. Nos falta un último paso previo:

Teorema 15.35 Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ . Sea D una medida normal ^{$L[U]$} en κ . Entonces $L[U] = L[D]$.

DEMOSTRACIÓN: Claramente $L[D] \subset L[U]$. Sea $\overline{D} = D \cap L[D]$. Tenemos que $\overline{D} \in L[\overline{D}] = L[D]$. Vamos a probar que $U \cap L[\overline{D}] \in L[\overline{D}]$, con lo que el teorema 15.25 nos dará que $L[U] = L[U \cap L[\overline{D}]] \subset L[\overline{D}] = L[D]$.

Sea $j : V \rightarrow \text{Ult}_U(V)$ la inmersión natural. Sea $\alpha = j(\kappa)$, sea d la identidad en κ y $\delta = [d]_U$. Se comprueba inmediatamente que si $x \subset \kappa$ entonces

$$x \in U \leftrightarrow \delta \in j(x).$$

Como \overline{D} es una medida normal ^{$L[\overline{D}]$} en κ , también se cumple que $j(\overline{D})$ es una medida normal ^{$L[j(\overline{D})]$} en α , luego por el teorema anterior existe un ordinal β tal que $\alpha = i_{0\beta}(\kappa)$, $j(\overline{D}) = i_{0\beta}(\overline{D})$ y $L[j(\overline{D})] = \text{Ult}_D^\beta(L[\overline{D}])$.

Vamos a probar que si $x \subset \kappa$ y $x \in L[\overline{D}]$, entonces $j(x) = i_{0\beta}(x)$. De este modo podremos concluir que

$$\begin{aligned} U \cap L[\overline{D}] &= \{x \in L[\overline{D}] \mid x \subset \kappa \wedge \delta \in j(x)\} \\ &= \{x \in L[\overline{D}] \mid x \subset \kappa \wedge \delta \in i_{0\beta}(x)\} \in L[\overline{D}], \end{aligned}$$

con lo que el teorema quedará probado.

Sea A un conjunto de ordinales tal que $|A| = \kappa^+$ y

$$\bigwedge \gamma \in A (\beta \leq \gamma \wedge i_{0\beta}(\gamma) = \gamma = j(\gamma)).$$

Sea μ un cardinal tal que $A \subset \mu$, $\overline{D} \in L_\mu[\overline{D}]$ e $i_{0\beta}(\mu) = \mu = j(\mu)$.

Ahora, si $x \subset \kappa$ y $x \in L[\overline{D}]$, por el teorema 15.30 existe un término de Skolem t tal que

$$L_\mu[\overline{D}] \models [x] = t[\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m],$$

para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n < \kappa$ y $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in A$. Aplicando $i_{0\beta}$ y j obtenemos que $i_{0\beta}(x) = j(x)$. ■

He aquí el teorema de unicidad del modelo canónico:

Teorema 15.36 *Sea κ un cardinal medible y U_1, U_2 dos medidas en κ . Entonces $L[U_1] = L[U_2]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea D_i una medida normal ^{$L[U_i]$} en κ . Por el teorema anterior $L[U_i] = L[D_i]$ y por el teorema de Kunen (apartado b) $D_1 = D_2$, luego $L[U_1] = L[U_2]$. ■

Combinando este teorema con los anteriores vemos que si κ es un cardinal medible y U es una medida en κ , entonces $L[U]$ es un modelo de ZFC+HCG independiente de U , en el que κ es el único cardinal medible, en el que existe una única medida normal y además si κ' es otro cardinal medible con otra medida U' , entonces los modelos $L[U]$ y $L[U']$ son elementalmente equivalentes.

El hecho de que dispongamos de un modelo “tan concreto” con un cardinal medible puede verse como una evidencia (no concluyente, por supuesto) de la

consistencia de los cardinales medibles, pues nos proporciona una teoría muy simple en la que el cardinal medible no es “una cosa extraña” cuya existencia postulamos, sino que tenemos una descripción muy detallada de él, de sus medidas y de “su entorno” (por ejemplo, de la función del continuo). La descripción de las medidas a la que nos referimos es la que proporciona el teorema siguiente:

Teorema 15.37 *Sea κ un cardinal medible, D una medida normal en κ y supongamos que $V = L[D]$. Sea $i_{0\omega} : V \rightarrow \text{Ult}_D^\omega(V)$ la inmersión natural. Para cada medida U en κ existe un ordinal $\delta < \kappa_\omega$ tal que*

$$U = \{x \subset \kappa \mid \delta \in i_{0\omega}(x)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \rightarrow \text{Ult}_U(V)$ la inmersión natural. Sea $\delta = [d]_U$, donde d es la identidad en κ . Por el teorema anterior $V = L[U]$. Con la notación empleada en la prueba del teorema 15.35, ahora tenemos que $\bar{D} = D$ y existe un ordinal β tal que $\delta < j(\kappa) = i_{0\beta}(\kappa)$, $j(D) = i_{0\beta}(D)$, $U = \{x \subset \kappa \mid \delta \in i_{0\beta}(x)\}$.

Observemos que, como $V = L[D] = L[U]$, se cumple $\text{Ult}_D^\beta(V) = L[i_{0\beta}(D)]$ y $\text{Ult}_U(V) = L[j(D)]$, luego $\text{Ult}_D^\beta(V) = \text{Ult}_U(V)$.

Veamos que $\beta < \omega$. Si fuera $\beta \geq \omega$, como κ es un cardinal medible, κ_ω es medible $\text{Ult}_D^\omega(V)$, luego κ_ω es regular $\text{Ult}_D^\omega(V)$ y $\text{Ult}_D^\omega(V) \subset \text{Ult}_D^\beta(V)$, luego κ_ω es regular $\text{Ult}_D^\beta(D)$. Sin embargo, κ_ω tiene cofinalidad numerable $\text{Ult}_U(V)$, ya que la sucesión $\{\kappa_n\}_{n < \omega}$ está en $\text{Ult}_U(V)$ por 11.23 c) y no está acotada en κ_ω por 15.22 c), contradicción.

Así pues, $\beta < \omega$, de donde $\delta < i_{0\beta}(\kappa) = \kappa_\beta < \kappa_\omega$. El mínimo ordinal no fijado por $i_{\beta\omega}$ es κ_β , luego $i_{\beta\omega}(\delta) = \delta$. Por consiguiente, para todo $x \subset \kappa$ se cumple

$$x \in U \leftrightarrow \delta \in i_{0\beta}(x) \leftrightarrow \delta \in i_{0\omega}(x).$$

■

Ejercicio: En las condiciones del teorema anterior, demostrar que todos los conjuntos $U_\delta = \{x \subset \kappa \mid \delta \in i_{0\omega}(x)\}$, con $\kappa \leq \delta < \kappa_\omega$ son medidas en κ .

Teorema 15.38 *Sea κ un cardinal medible, D una medida normal en κ y supongamos que $V = L[D]$. Entonces hay exactamente κ^+ medidas en κ .*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior el número de medidas es a lo sumo $|\kappa_\omega| = |i_{0\omega}(\kappa)|$ y a su vez éste es a lo sumo igual al número de aplicaciones de ${}^\omega\kappa$ en κ , que por la HCG es a lo sumo κ^+ . De hecho hay exactamente κ^+ por la HCG y el siguiente teorema general. ■

Teorema 15.39 *Si κ es un cardinal medible, entonces existen al menos 2^κ medidas en κ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea C el conjunto de los subconjuntos acotados de κ . Un sencillo cálculo muestra que $|C| = \kappa$. Para cada $x \subset \kappa$, sea $A_x = \{x \cap \alpha \mid \alpha < \kappa\}$.

Así, si $|x| = \kappa$ se cumple que $|A_x| = \kappa$ y si $x \neq y$ son subconjuntos de κ entonces $|A_x \cap A_y| < \kappa$, pues si $\beta \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ entonces $A_x \cap A_y \subset \{x \cap \alpha \mid \alpha \leq \beta\}$.

Sea $A = \{A_x \mid x \subset \kappa \wedge |x| = \kappa\}$. Entonces $A \subset \mathcal{P}\mathcal{C}$, $|A| = 2^\kappa$, y

$$\bigwedge x \in A \ |x| = \kappa, \quad \bigwedge xy \in A (x \neq y \rightarrow |x \cap y| < \kappa).$$

A través de una biyección entre C y κ obtenemos una familia $B \subset \kappa$ tal que $|B| = 2^\kappa$, $\bigwedge x \in B \ |x| = \kappa$ y $\bigwedge xy \in B (x \neq y \rightarrow |x \cap y| < \kappa)$. Además $\bigwedge x \in B \ |\kappa \setminus x| = \kappa$, pues en caso contrario, si $y \in B$ es distinto de x , tendríamos que $|x \cap y| < \kappa$ y $|(\kappa \setminus x) \cap y| < \kappa$, luego $|y| < \kappa$, contradicción.

Sea U una medida en κ . Fijemos una partición

$$\kappa = P \cup Q, \quad P \cap Q = \emptyset, \quad |P| = |Q| = \kappa.$$

Entonces $P \in U$ o $Q \in U$. Pongamos que $P \in U$. Para cada $x \in B$ sea $f_x : \kappa \rightarrow \kappa$ biyectiva tal que $f_x[P] = x$. Sea $U_x = f_x[U]$ (en el sentido de 11.6). Precisamente por 11.6 tenemos que U_x es una medida en κ y además $x \in U_x$.

Si $x, y \in B$ son distintos, entonces se cumple $U_x \neq U_y$, pues en caso contrario $x \cap y \in U_x$, lo cual es imposible porque $|x \cap y| < \kappa$. Por lo tanto $\{U_x\}_{x \in B}$ es una familia de 2^κ medidas en κ . ■

Terminamos el capítulo con una aplicación interesante:

Teorema 15.40 *Si κ es un cardinal medible y cumple $2^\kappa > \kappa^+$, entonces existe un conjunto transitivo M tal que $M \models \text{ZFC} + \bigvee_{\kappa} \kappa$ es un cardinal medible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea D una medida normal en κ y sea $\bar{D} = D \cap L[D]$. Sean

$$j : V \rightarrow \text{Ult}_D(V) \quad \text{y} \quad i_{0\omega} : L[\bar{D}] \rightarrow \text{Ult}_D^\omega(L[\bar{D}])$$

las inmersiones naturales. Por comodidad llamaremos $N = \text{Ult}_D(V)$. Consideramos la sucesión $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ definida en $L[\bar{D}]$ a partir de la medida \bar{D} .

Notemos que en $L[\bar{D}]$, se cumple $|\kappa_\omega| \leq \kappa^+$ (hay a lo sumo κ^+ aplicaciones de ${}^\omega \kappa$ en κ), luego también (en V) $|i_{0\omega}(\kappa)| \leq \kappa^+$. Por consiguiente $\kappa_\omega \leq \kappa^{++}$.

Por otro lado, según 11.23 h) se cumple $j(\kappa) > 2^\kappa \geq \kappa^{++}$, de modo que $\kappa_\omega < j(\kappa)$.

Sea $F = \{x \subset \kappa_\omega \mid \bigvee m \in \omega \ \{\kappa_n \mid m \leq n < \omega\} \subset x\}$. Por el teorema 15.23 relativizado a $L[\bar{D}]$ tenemos que

$$\bigwedge x (x \in \bar{D}^\omega \leftrightarrow x \in L[\bar{D}^\omega] \cap F),$$

pues $\text{Ult}_D^\omega(L[\bar{D}]) = L[\bar{D}^\omega]$. En otras palabras, $L[\bar{D}^\omega] \cap F = \bar{D}^\omega \in L[\bar{D}^\omega]$.

Por otro lado, $\bar{F} = F \cap N \in N$, ya que $\{\kappa_n\}_{n \in \omega} \in N$. Por consiguiente:

$$L[\bar{D}^\omega] = L[L[\bar{D}^\omega] \cap F] = L[F] = L[F \cap N] = L[\bar{F}] \subset N.$$

Además, $\bar{D}^\omega = L[\bar{D}^\omega] \cap F = L[\bar{F}] \cap F \cap N = \bar{F}$. Así, (\bar{F}) es una medida normal en κ_ω , luego también $((\bar{F})$ es una medida normal en κ_ω) $^{L[\bar{F}]}$. En particular,

$$(\bigvee \alpha < j(\kappa) \bigvee U \subset \mathcal{P}\alpha (U \text{ es una medida normal en } \alpha)^{L[U]})^N.$$

Ahora usamos que j es elemental, con lo que

$$\forall \alpha < \kappa \forall U \subset \mathcal{P}\alpha (U \text{ es una medida normal en } \alpha)^{L[U]}.$$

Claramente κ es (fuertemente) inaccesible ^{$L[U]$} , luego $M = V_\kappa \cap L[U]$ es un modelo transitivo de ZFC y además $M \models [\alpha]$ es un cardinal medible. ■

Esto significa que la consistencia de que exista un cardinal medible κ tal que $2^\kappa > \kappa^+$ no puede probarse ni siquiera suponiendo la consistencia de que exista un cardinal medible. Así pues, aunque tenemos ya la existencia de un cardinal medible es consistente con la HCG, este teorema nos advierte que la consistencia de otras variantes no puede probarse tan fácilmente como podría pensarse. De hecho, un teorema de Kunen prueba que bajo la hipótesis del teorema anterior puede construirse un modelo con cualquier cantidad prefijada de cardinales medibles.

15.4 Cardinales débilmente medibles

En el capítulo X introdujimos los cardinales \mathbb{R} -medibles en relación con el problema de si es posible extender la medida de Lebesgue a todos los subconjuntos de \mathbb{R} . Recordemos que un cardinal κ es \mathbb{R} -medible si existe una medida fuerte en κ , es decir, una medida κ -aditiva en $\mathcal{P}\kappa$ respecto a la cual los puntos tienen medida nula. El teorema 10.26, junto con las observaciones de la sección 11.1, muestra que los cardinales \mathbb{R} -medibles mayores que 2^{\aleph_0} son precisamente los cardinales medibles, mientras que los cardinales \mathbb{R} -medibles $\leq 2^{\aleph_0}$ son los que permiten extender la medida de Lebesgue (teorema 10.27). Sucede que las propiedades principales de los cardinales \mathbb{R} -medibles se siguen de una propiedad más débil que conviene estudiar separadamente:

Definición 15.41 Una *medida débil* en un cardinal κ es un ideal I en κ que cumple las propiedades siguientes:

- a) $\bigwedge \alpha \in \kappa \{ \alpha \} \in I$,
- b) I es κ -completo (definición 11.1),
- c) I cumple la condición de cadena numerable (definición 7.42 con $\mathbb{B} = \mathcal{P}\kappa$).

Diremos que κ es un cardinal *débilmente medible*² si existe una medida débil en κ .

Así, si μ es una medida fuerte en κ en el sentido de 10.25, el ideal I_μ de los conjuntos nulos para μ es una medida débil en κ . En efecto, que μ sea no trivial equivale a la propiedad a), que μ sea κ -aditiva equivale a b) (teorema 10.17) y la condición de cadena numerable se cumple por el teorema 10.2 f).

Por consiguiente, todo cardinal \mathbb{R} -medible es débilmente medible.

²No existe un nombre estándar para estos cardinales. Lo más frecuente es referirse a ellos como “cardinales con un ideal κ -completo σ -saturado”.

Si I es una medida débil en un cardinal κ , podemos hablar de conjuntos nulos en κ (los de I), conjuntos de medida 1 (los del filtro dual de I , es decir, los de complementario nulo) y conjuntos de medida positiva (los que no son nulos), si bien —naturalmente— la medida de un conjunto no está definida.

En estos términos las condiciones de la definición de medida débil pueden parafrasearse diciendo que los puntos tienen medida nula, la unión de menos de κ conjuntos nulos es nula y toda familia de conjuntos de medida positiva disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Notemos que, de hecho, las dos primeras propiedades implican que todo subconjunto de κ de cardinal menor que κ es nulo (pues es unión de menos de κ puntos).

Ejercicio: Probar que si existe un cardinal κ con un ideal I que cumple la definición de medida débil salvo que es σ -completo en vez de κ -completo, el menor de tales cardinales es débilmente medible.

El teorema 10.26 es válido en realidad para cardinales débilmente medibles:

Teorema 15.42 *Sea κ un cardinal débilmente medible. Entonces κ es débilmente inaccesible y si $\kappa > 2^{\aleph_0}$ entonces es un cardinal medible.*

DEMOSTRACIÓN: El argumento empleado en el teorema 10.26 en virtud del cual los cardinales \mathbb{R} -medibles son débilmente inaccesibles es válido literalmente para cardinales débilmente medibles (nos referimos, concretamente, a la prueba de que son regulares, al principio de la demostración, y a la de que son cardinales límite, al final de la misma. Obviamente un cardinal débilmente medible ha de ser no numerable.)

El resto de la prueba es una combinación de la parte correspondiente de 10.26 y un refinamiento del argumento de 10.23:

Sea I una medida débil en un cardinal κ . Supongamos que existe un conjunto $X \in \kappa$ de medida positiva (y, por consiguiente, de cardinal κ) tal que

$$I|_X = \{A \subset X \mid A \in I\}$$

sea un ideal primo en X .

Es claro que $I|_X$ es un ideal κ -completo de X que contiene a los puntos, luego su filtro dual es un ultrafiltro κ -completo no principal en X . A través de una biyección con κ podemos obtener un ultrafiltro análogo en κ , es decir, una medida en κ . Concluimos, pues, que en este caso κ es un cardinal medible.

El teorema quedará demostrado si probamos en el caso contrario $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. El caso contrario es que para todo $X \subset \kappa$ de medida positiva el ideal $I|_X$ no es primo, de modo que existe un $Y \subset X$ tal que tanto Y como $X \setminus Y$ tienen medida positiva. En definitiva, estamos suponiendo que todo conjunto de medida positiva puede partirse en dos subconjuntos de medida positiva.

Definimos un árbol A de subconjuntos de κ , donde el orden es la relación inversa de la inclusión. Cada nivel de A estará formado por subconjuntos de κ de medida positiva disjuntos dos a dos. Empezamos por $\text{Niv}_0 A = \{\kappa\}$. Supuesto definido $\text{Niv}_\alpha A$, partimos cada uno de sus elementos en dos conjuntos disjuntos

de medida positiva. Los conjuntos obtenidos forman $\text{Niv}_{\alpha+1}A$, de modo que cada elemento de $\text{Niv}_\alpha A$ tiene exactamente dos extensiones en el nivel siguiente. Supuestos definidos $\text{Niv}_\delta A$ para todo $\delta < \lambda$, definimos $\text{Niv}_\lambda A$ como el conjunto de todas las intersecciones $X = \bigcap_{\delta < \lambda} X_\delta$, donde $X_\delta \in \text{Niv}_\delta A$ y X tiene medida positiva.

Toda rama de A tiene altura numerable. En efecto, si $\{X_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ es una rama, entonces $\{X_\alpha \setminus X_{\alpha+1}\}_{\alpha+1 < \beta}$ es una familia de conjuntos de medida positiva disjuntos dos a dos, luego ha de ser numerable. Por consiguiente la altura de A es a lo sumo ω_1 .

Así mismo, cada nivel de A es una familia de conjuntos disjuntos de medida positiva, luego los niveles son numerables. Por consiguiente, el número de ramas de altura $\alpha < \omega_1$ es a lo sumo $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, luego en total A tiene a lo sumo $\aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ ramas.

Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha < \mu}$, $\mu \leq 2^{\aleph_0}$, una enumeración de todas las ramas de A tales que $Z_\alpha = \bigcap_{X \in C_\alpha} X \neq \emptyset$.

El conjunto Z_α ha de tener medida nula, o de lo contrario la rama se podría prolongar. Más aún, $\{Z_\alpha\}_{\alpha < \mu}$ es una partición de κ en conjuntos nulos disjuntos dos a dos. Por consiguiente I no es μ -completo, luego $\kappa \leq \mu \leq 2^{\aleph_0}$. ■

Así pues, para cardinales $> 2^{\aleph_0}$ las propiedades “ser débilmente medible”, “ser \mathbb{R} -medible” y “ser medible” son equivalentes.

El concepto de medida normal tiene sentido igualmente para cardinales débilmente medibles:

Definición 15.43 Diremos que una medida débil en un cardinal κ es *normal* si para toda familia $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ de conjuntos de medida 1 se cumple que la intersección diagonal $\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ tiene también medida 1.

Como en el caso de los cardinales medibles, las medidas normales se caracterizan en términos de funciones regresivas:

Teorema 15.44 Una medida débil en un cardinal κ es normal si y sólo si cuando $f : \kappa \rightarrow \kappa$ cumple que el conjunto $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\}$ tiene medida positiva, entonces existe un $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\}$ tiene medida positiva.

DEMOSTRACIÓN: El argumento de 11.26 se adapta de forma obvia para probar una implicación. Supongamos ahora que una medida débil I cumple la propiedad del enunciado y veamos que es normal. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ una familia de subconjuntos de κ de medida 1 y supongamos que su intersección diagonal X no tiene medida 1. Entonces $\kappa \setminus X$ tiene medida positiva.

Para cada $\alpha \in \kappa \setminus X$ tenemos que $\alpha \notin \bigcap_{\delta < \alpha} X_\delta$, luego existe un $f(\alpha) < \alpha$ tal que $\alpha \notin X_{f(\alpha)}$. Si $\alpha \in X$ definimos $f(\alpha) = \alpha$. Así tenemos una aplicación $f : \kappa \rightarrow \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} = \kappa \setminus X$ tiene medida positiva. Por hipótesis existe un $\delta < \kappa$ tal que $Y = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \delta\}$ tiene medida positiva. Ahora bien, es claro que $Y \subset \kappa \setminus X_\delta$, luego Y debería ser nulo. ■

Teorema 15.45 *Todo cardinal débilmente medible tiene una medida débil normal.*

DEMOSTRACIÓN: Diremos que una función $g : X \rightarrow \kappa$, definida sobre un conjunto $X \subset \kappa$ es *fuertemente no acotada* si no existe ningún $\gamma < \kappa$ ni un $Y \subset X$ de medida positiva tal que $\bigwedge \alpha \in Y g(\alpha) < \gamma$, es decir, si g no está acotada en ningún conjunto de medida positiva. Sea \mathcal{F} la familia de todas las funciones fuertemente no acotadas en κ . Como todo conjunto de medida positiva no está acotado en κ , la identidad en κ pertenece a \mathcal{F} que es, pues, no vacío.

Si $g, h \in \mathcal{F}$, diremos que $g < h$ (resp. $g \leq h$) si $\text{Dominio}(g) \subset \text{Dominio}(h)$ y para todo α en el dominio de g se cumple $g(\alpha) < h(\alpha)$ (resp. $g(\alpha) \leq h(\alpha)$).

Notemos que $g \leq h$ no significa $g < h \vee g = h$.

Diremos que $g \in \mathcal{F}$ es *minimal* si no existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $h < g$. Vamos a probar que \mathcal{F} tiene un elemento minimal. En caso contrario, para cada $g \in \mathcal{F}$ existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $h < g$. Tomemos $g \in \mathcal{F}$ arbitraria. Sea W una familia maximal de funciones $h < g$ con dominios disjuntos dos a dos. Como I cumple la condición de cadena numerable, W es numerable, de donde se sigue que la unión f de las funciones de W cumple $f \in \mathcal{F}$. (Dado un subconjunto X de su dominio de medida positiva, la intersección de X con el dominio de alguna de las funciones $h \in W$ ha de tener medida positiva (por la numerabilidad), luego h no está acotada en (una parte de) X y f no está acotada en X). Además es claro que $f < g$ y $X = \text{Dominio}(g) \setminus \text{Dominio}(f)$ ha de ser nulo, pues en caso contrario $f|_X \in \mathcal{F}$ y existiría $h \in \mathcal{F}$ tal que $h < f|_X$, con lo que $W \cup \{h\}$ contradiría la maximalidad de W .

Como g era arbitraria, podemos construir una sucesión de funciones de \mathcal{F} tal que $g_0 > g_1 > g_2 > \dots$ y de modo que $\text{Dominio}(g_n) \setminus \text{Dominio}(g_{n+1}) \in I$ para todo n . Entonces $\bigcap_{n < \omega} \text{Dominio}(g_n)$ tiene medida positiva (en caso contrario todas las g_n tendrían dominio nulo) y esto es absurdo porque un α en esta intersección cumple $g_0(\alpha) > g_1(\alpha) > g_2(\alpha) > \dots$

Este argumento prueba en realidad que para toda $g \in \mathcal{F}$ existe $h \in \mathcal{F}$ minimal tal que $h \leq g$. Por consiguiente, si W es una familia maximal de funciones minimales de \mathcal{F} con dominios disjuntos dos a dos y $f : X \rightarrow \kappa$ es la unión de todas ellas, entonces $f \in \mathcal{F}$ y X tiene medida 1.

De hecho, si sustituimos una función de W por la extensión resultante de asignarle el valor 0 en (el conjunto nulo) $\kappa \setminus X$, la familia W sigue cumpliendo lo mismo, pero ahora $f : \kappa \rightarrow \kappa$.

Veamos que si $g : Y \rightarrow \kappa$ es una función definida en un conjunto $Y \subset \kappa$ de medida positiva tal que $\bigwedge \alpha \in Y g(\alpha) < f(\alpha)$, entonces g es constante en un conjunto de medida positiva.

En efecto, ha de existir $h \in W$ tal que la intersección de Y con el dominio de h tenga medida positiva (porque W es numerable). Si Z es esta intersección, no puede ser que $g|_Z \in \mathcal{F}$, pues entonces sería $g|_Z < h$, en contra de la minimalidad de h , luego $g|_Z$ está acotada por un cierto $\gamma < \kappa$ en un subconjunto de Z de medida positiva. Equivalentemente, $g^{-1}[\gamma]$ tiene medida positiva, pero por la

κ -completitud de I , alguno de los conjuntos $\{g^{-1}[\{\alpha\}]\}_{\alpha < \gamma}$ ha de tener medida positiva.

Sea $J = f[I]$ en el sentido del teorema 11.6 (que vale igualmente para ideales). Tenemos que J es un ideal κ -completo en κ . Para cada $\gamma < \kappa$ tenemos que f está acotada en $Y = f^{-1}[\{\gamma\}]$, luego Y ha de ser nulo (si tuviera medida positiva, $X \cap Y$ también la tendría y f estaría acotada en él). Por consiguiente $\{\gamma\} \in J$.

Una familia no numerable de subconjuntos de κ de medida positiva módulo J daría lugar a una familia análoga módulo I sin más que aplicar f^{-1} , luego J cumple la condición de cadena numerable y es, por lo tanto, una medida débil en κ .

Finalmente, para probar que J es normal tomamos $g : \kappa \rightarrow \kappa$ tal que el conjunto $Z = \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) < \alpha\} \notin J$. Entonces $Y = f^{-1}[Z] \notin I$, y para todo $\alpha \in Y$ se cumple que $g(f(\alpha)) < f(\alpha)$. Por la construcción de f concluimos que $f \circ g$ es constante en un conjunto de medida positiva módulo I , luego g es constante en un conjunto de medida positiva módulo J . ■

Ejercicio: Probar que todo cardinal \mathbb{R} -medible tiene una medida fuerte μ tal que I_μ es una medida (débil) normal.

Necesitamos un par de propiedades de las medidas débiles normales:

Teorema 15.46 *Sea I una medida débil normal en un cardinal κ .*

- a) *Los conjuntos cerrados no acotados en κ tienen medida 1.*
- b) *Si $g : X \rightarrow \kappa$ cumple que $\bigwedge \alpha \in X g(\alpha) < \alpha$ y X tiene medida positiva, entonces g está acotada casi por todas partes, es decir, existe un $\gamma < \kappa$ tal que el conjunto $\{\alpha \in X \mid g(\alpha) \geq \gamma\}$ es nulo.*

DEMOSTRACIÓN: a) El teorema de Fodor [15.15] afirma que si un conjunto E cumple que toda aplicación $f : E \rightarrow \kappa$ tal que $\bigwedge \alpha \in E f(\alpha) < \alpha$ es constante en un conjunto no acotado, entonces E es estacionario.

Si E es un conjunto de medida positiva, ciertamente cumple esta propiedad (f ha de ser constante en un conjunto de medida positiva, en particular no acotado), luego todo conjunto de medida positiva es estacionario. Esto implica que todo conjunto c.n.a. C ha de tener medida 1, pues $\kappa \setminus C$ no es estacionario, luego ha de ser nulo.

b) Todo $Y \subset X$ de medida positiva tiene un subconjunto de medida positiva donde g es constante. En efecto, para probarlo basta aplicar el teorema 15.44 a la función $\tilde{g} : \kappa \rightarrow \kappa$ dada por

$$\tilde{g}(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha) & \text{si } \alpha \in Y, \\ \alpha & \text{si } \alpha \in \kappa \setminus Y. \end{cases}$$

Sea W una familia maximal de subconjuntos de X de medida positiva disjuntos dos a dos en los que g es constante y sea Z la unión de todos ellos. Claramente $X \setminus Z$ tiene medida 0 (por la maximalidad de W) y como W es numerable y κ es regular, existe un $\gamma < \kappa$ tal que $\bigwedge \alpha \in Z g(\alpha) < \gamma$. ■

Como aplicación probamos lo siguiente:

Teorema 15.47 *Todo cardinal débilmente medible es débilmente de Mahlo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un cardinal débilmente medible y sea I una medida débil normal en κ . Basta probar que el conjunto de los cardinales regulares menores que κ tiene medida 1, pues entonces, como el conjunto de los cardinales límite menores que κ es c.n.a., la intersección tendrá también medida 1, luego en particular será estacionaria, pero dicha intersección es el conjunto de los cardinales débilmente inaccesibles menores que κ .

Supongamos, por el contrario, que el conjunto X de los ordinales límite $\lambda < \kappa$ tales que $\text{cf } \lambda < \lambda$ tiene medida positiva. Entonces existe un conjunto $Y \subset X$ de medida positiva y un $\lambda_0 < \kappa$ tales que $\bigwedge \lambda \in Y \text{ cf } \lambda = \lambda_0$.

Para cada $\lambda \in Y$, sea $\{\alpha_{\lambda\delta}\}_{\delta < \lambda_0}$ una sucesión cofinal creciente en λ . Para cada $\delta < \lambda_0$, podemos aplicar el teorema anterior a la aplicación $\lambda \mapsto \alpha_{\lambda\delta} < \lambda$, lo que nos da un $\gamma_\delta < \kappa$ tal que $\alpha_{\lambda\delta} < \gamma_\delta$ para casi todo $\lambda \in Y$. Sea $\gamma = \bigcup_{\delta < \lambda_0} \gamma_\delta < \kappa$. Entonces, por la κ -completitud de Y tenemos que $\alpha_{\lambda\delta} < \gamma$ para casi todo $\lambda \in Y$ y todo $\delta < \lambda_0$. Pero entonces $\lambda \leq \gamma$ para casi todo $\lambda \in Y$, lo cual es absurdo, pues Y tiene medida positiva y, por consiguiente, no está acotado. ■

En realidad puede probarse que si κ es débilmente medible y E tiene medida positiva, entonces $E \cap \lambda$ es estacionario en λ para casi todo λ . De aquí se sigue que los cardinales débilmente medibles son en realidad débilmente κ -Mahlo. La prueba requiere el uso de ultrapotencias genéricas (una mezcla de ultrapotencias y extensiones genéricas) que no vamos a estudiar aquí.

Ejercicio: Probar que si κ es un cardinal débilmente medible entonces no existen κ -árboles de Aronszajn, por lo que en 12.10 no puede eliminarse la hipótesis de que κ sea fuertemente inaccesible. AYUDA: Adaptar la prueba de 12.11.

Vemos que los cardinales débilmente medibles se parecen a los cardinales medibles en que son débilmente κ -Mahlo (en lugar de fuertemente κ -Mahlo) y que son casi débilmente compactos. Ahora vamos a probar que son casi cardinales de Ramsey:

Teorema 15.48 *Sea I una medida débil normal en un cardinal κ , sea $\gamma < \kappa$ y sea $f : [\kappa]^{<\omega} \rightarrow \gamma$ una partición. Entonces existe $H \subset \kappa$ de medida 1 tal que la imagen de $[H]^{<\omega}$ por f es numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que para cada n existe un conjunto $H_n \subset \kappa$ de medida 1 tal que la imagen de $[H_n]^n$ por f es a lo sumo numerable. Entonces la intersección de todos los H_n cumplirá el teorema. Equivalentemente, podemos suponer una partición $f : [\kappa]^n \rightarrow \gamma$ y encontrar $H \subset \kappa$ de medida 1 tal que f tome una cantidad numerable de valores en $[H]^n$. Razonamos por inducción sobre n .

Para $n = 1$ tenemos $f : \kappa \rightarrow \gamma$. Sea W una familia maximal de subconjuntos de κ de medida positiva disjuntos dos a dos donde f sea constante y sea H

su unión. Como W es numerable, $f[H]$ también lo es, y H tiene medida 1 por la maximalidad de W (si $\kappa \setminus H$ tuviera medida positiva, se podría descomponer en γ conjuntos donde f es constante, luego alguno tendría medida positiva por la κ -completitud de I).

Supongamos que el teorema vale para n y sea $f : [\kappa]^{n+1} \rightarrow \gamma$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $f_\alpha : [\kappa \setminus \{\alpha\}]^n \rightarrow \gamma$ dada por $f_\alpha(x) = f(\{\alpha\} \cup x)$. Por hipótesis de inducción existe un conjunto $X_\alpha \subset \kappa \setminus \{\alpha\}$ de medida 1 tal que la imagen de $[X_\alpha]^n$ por f_α es numerable. Sea $A_\alpha \subset \gamma$ esta imagen y sea $X = \bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$, que tiene medida 1 porque la medida es normal.

Si $\alpha < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ están en X , entonces $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in [X_\alpha]^n$, luego

$$f(\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = f_\alpha(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \in A_\alpha.$$

Sea $A_\alpha = \{a_{\alpha m} \mid m < \omega\}$. Aplicamos el caso $n = 1$ a la función $g_m : X \rightarrow \gamma$ dada por $g_m(\alpha) = a_{\alpha m}$. Existe un conjunto $H_m \subset X$ de medida 1 tal que $g_m[H_m]$ es numerable. Sea $H = \bigcap_{m \in \omega} H_m \subset X$, que tiene medida 1 y

$$\bigcup_{\alpha \in H} A_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} g_n[H]$$

es numerable. La imagen por f de $[H]^{n+1}$ está en esta unión, luego es numerable. ■

Esta propiedad es suficiente para demostrar los apartados a) y c) del teorema 12.30:

Teorema 15.49 *Sea I una medida débil normal en un cardinal κ y $\mu < \kappa$ un cardinal infinito, sea \mathcal{L} un lenguaje formal tal que $|\mathcal{L}| \leq \mu$ y M un modelo de \mathcal{L} con $\kappa \subset M$. Sean $P, X \subset M$ tales que $|P| < \kappa$ y $|X| \leq \mu$. Entonces existe un submodelo elemental $N \prec M$ tal que*

$$|N| = \kappa, \quad X \subset N, \quad |P \cap N| \leq \mu \quad \text{y} \quad N \cap \kappa \text{ tiene medida 1.}$$

DEMOSTRACIÓN: Añadamos a \mathcal{L} un relator monádico cuya interpretación en M sea la pertenencia a P , así como un conjunto de constantes que nombren a cada elemento de X . Se sigue cumpliendo que $|\mathcal{L}| \leq \mu$. Sea ahora $\overline{\mathcal{L}}$ la extensión de \mathcal{L} que resulta de añadirle funtores de Skolem según la definición 1.11. Se sigue cumpliendo $|\overline{\mathcal{L}}| \leq \mu$. Podemos considerar a M como modelo de $\overline{\mathcal{L}}$ sin más que interpretar los funtores de Skolem con unas funciones de Skolem prefijadas.

Para cada término de Skolem $t(x_1, \dots, x_n)$ de $\overline{\mathcal{L}}$, sea $f_t : [\kappa]^n \rightarrow P \cup \{0\}$ la función dada por

$$f_t(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} M(t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n] & \text{si } M(t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in P, \\ 0 & \text{si } M(t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \notin P. \end{cases}$$

Por el teorema anterior existe $H_t \subset \kappa$ de medida 1 tal que $f_t[[H_t]^n]$ es numerable. Como hay a lo sumo $\mu < \kappa$ términos de Skolem, $H = \bigcap_t H_t \subset \kappa$ tiene también medida 1.

Sea $N = N(H) \prec M$. Es claro que $|N| = \kappa$, así como que $X \subset N$ y, como $H \subset N \cap \kappa$, tenemos también que $N \cap \kappa$ tiene medida 1. Falta ver que $|P \cap N| \leq \mu$. Ahora bien, si $x \in P \cap M$ entonces $x = M(t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ para cierto término de Skolem t y ciertos $\alpha_1 < \dots < \alpha_n \in H$, luego $x \in f_t[[H]^n]$, que es un conjunto numerable. Vemos así que $P \cap N$ está contenido en una unión de μ conjuntos numerables, luego su cardinal es a lo sumo μ . ■

Si I es una medida débil normal en un cardinal κ y llamamos D a su filtro dual, el argumento del teorema de Silver 15.28 es válido punto por punto para probar el teorema siguiente:

Teorema 15.50 *Si I es una medida débil normal en un cardinal κ , entonces $L[I]$ cumple la hipótesis del continuo generalizada.*

A su vez, de aquí deducimos un teorema muy interesante:

Teorema 15.51 (Solovay) *Si κ es un cardinal débilmente medible e I es una medida débil normal en κ , entonces κ es un cardinal medible $^{L[I]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\bar{I} = I \cap L[I]$. Es inmediato comprobar que \bar{I} es una medida débil normal $^{L[I]}$ en κ , luego κ es débilmente medible $^{L[I]}$. Ahora bien, como $L[I]$ cumple la HCG, ha de ser $(\kappa > 2^{\aleph_0})^{L[I]}$, luego por el teorema 15.42 concluimos que κ es medible $^{L[I]}$. ■

Esto significa que si es consistente la existencia de un cardinal débilmente medible (en particular la de un cardinal \mathbb{R} -medible), también es consistente la existencia de un cardinal medible o, leído al revés, que si queremos probar que es consistente que exista un cardinal débilmente medible (o \mathbb{R} -medible) tendremos que suponer al menos que es consistente la existencia de un cardinal medible.

Otra consecuencia es que si κ es un cardinal débilmente medible, entonces en $L[I]$ existen los sostenidos, luego existen los sostenidos (en V).

En la sección siguiente probaremos que la consistencia de que exista un cardinal medible implica la consistencia de que 2^{\aleph_0} sea \mathbb{R} -medible, pero antes terminaremos esta sección con otra consecuencia de los resultados que hemos probado. Necesitamos un último resultado técnico.

Recordemos que dos funciones f y g en un cardinal regular μ son *casi disjuntas* si existe $\gamma < \mu$ tal que $\bigwedge \alpha (\gamma \leq \alpha < \mu \rightarrow f(\alpha) \neq g(\alpha))$. Una familia \mathcal{F} de funciones en μ es *casi disjunta* si sus elementos son funciones casi disjuntas dos a dos.

Teorema 15.52 *Sea κ un cardinal débilmente medible y $\mu < \kappa$ un cardinal regular. Entonces toda familia $\mathcal{F} \subset {}^\mu \kappa$ de funciones casi disjuntas cumple que $|\mathcal{F}| \leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $|\mathcal{F}| > \kappa$, como cada $f : \mu \rightarrow \kappa$ está acotada por un $\beta < \kappa$, existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tal que $|\mathcal{G}| = \kappa$ y $\mathcal{G} \subset {}^\mu \beta$, para cierto $\beta < \kappa$.

Sea $F : [\mathcal{G}]^2 \rightarrow \mu$ la partición dada por $F(\{f, g\}) = \text{un } \gamma < \mu \text{ tal que } \bigwedge \alpha (\gamma \leq \alpha < \mu \rightarrow f(\alpha) \neq g(\alpha))$.

Por el teorema 15.48 existe $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ de cardinal κ tal que $A = F[[\mathcal{H}]^2] \subset \mu$ es numerable. Sea $A \subset \alpha < \mu$. Entonces $f(\alpha) \neq g(\alpha)$, para todo par de funciones distintas $f, g \in \mathcal{H}$. Esto nos da una aplicación inyectiva $\mathcal{H} \rightarrow \beta$, lo cual es imposible pues $|\mathcal{H}| = \kappa$ y $\beta < \kappa$. ■

Teorema 15.53 (Prikry) *Si 2^{\aleph_0} es débilmente medible, entonces todo cardinal infinito $\mu < 2^{\aleph_0}$ cumple que $2^\mu = 2^{\aleph_0}$.*

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre μ . Supongamos que para todo cardinal infinito $\nu < \mu$ se cumple $2^\nu = 2^{\aleph_0}$. Si μ es singular, entonces

$$2^\mu = (2^{<\mu})^{\text{cf } \mu} = (2^{\aleph_0})^{\text{cf } \mu} = 2^{\text{cf } \mu} = 2^{\aleph_0}.$$

Supongamos que μ es regular. Para cada $X \subset \mu$, sea $f_X = \{X \cap \alpha\}_{\alpha < \mu}$. Es claro que $\mathcal{F} = \{f_X\}_{X \in \mathcal{P}_\mu}$ es una familia casi disjunta de 2^μ funciones definidas en μ .

Para cada $\alpha < \mu$, el conjunto $A_\alpha = \{f_X(\alpha) \mid X \subset \mu\}$ tiene cardinal menor o igual que $|\mathcal{P}_\alpha| = 2^{|\alpha|} \leq 2^{\aleph_0}$ (por hipótesis de inducción), luego el cardinal de $A = \bigcup_{\alpha < \mu} A_\alpha$ es a lo sumo $\mu \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

A través de una inyección de A en 2^{\aleph_0} la familia \mathcal{F} da lugar a una familia casi disjunta de 2^μ funciones $\mu \rightarrow 2^{\aleph_0}$, luego por el teorema anterior $2^\mu \leq 2^{\aleph_0}$. ■

Así pues, el hecho de que 2^{\aleph_0} sea débilmente medible tiene repercusiones sobre la función del continuo. Por ejemplo, ya sabíamos que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ no existen cardinales débilmente medibles (en particular \mathbb{R} -medibles), pero ahora podemos decir que en realidad basta con que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ (una hipótesis mucho más débil) para que no los haya.

15.5 Más sobre cardinales \mathbb{R} -medibles

Todos los resultados de la sección anterior sobre cardinales débilmente medibles valen obviamente para cardinales \mathbb{R} -medibles. Terminamos el capítulo con algunos resultados específicos sobre éstos. En primer lugar veremos que la consistencia de que exista un cardinal \mathbb{R} -medible $\leq 2^{\aleph_0}$ es equivalente a la de que exista un cardinal medible. Para ello nos basamos en el teorema siguiente:

Teorema 15.54 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC. En M , sea κ un cardinal medible y U una medida en κ tal que $(V = L[U])^M$. Sea (\mathbb{B}, m) un álgebra medida completa. Si G es un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M , entonces κ es un cardinal \mathbb{R} -medible en $M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Todo lo que sigue ha de entenderse relativizado a M . Para cada $a \in \mathbb{B}$, $a \neq \emptyset$, cada $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $a \Vdash \tau \subset \check{\kappa}$ y cada $\alpha < \kappa$, sea

$$f_a(\tau, \alpha) = \frac{m(a \wedge \|\check{\alpha} \in \tau\|)}{m(a)} \in [0, 1].$$

Como $2^{\aleph_0} < \kappa$, existe un único número real $0 \leq r \leq 1$ tal que $f_a(\tau, \alpha) = r$ para casi todo α (módulo U). Definimos

$$\mu_a(\tau) = r \mid \{\alpha \in \kappa \mid f_a(\tau, \alpha) = r\} \in U.$$

1) Si $a \Vdash \sigma \subset \tau \subset \check{\kappa}$, entonces $\mu_a(\sigma) \leq \mu_a(\tau)$.

En efecto, $a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\| \leq a \wedge \|\check{\alpha} \in \tau\|$, luego $f_a(\sigma, \alpha) \leq f_a(\tau, \alpha)$. Claramente,

$$\{\alpha \in \kappa \mid \mu_a(\sigma) = f_a(\sigma, \alpha) \wedge \mu_a(\tau) = f_a(\tau, \alpha)\} \in U,$$

luego existe un $\alpha < \kappa$ tal que

$$\mu_a(\sigma) = f_a(\sigma, \alpha) \leq f_a(\tau, \alpha) = \mu_a(\tau).$$

2) En particular, si $a \Vdash \sigma = \tau \subset \check{\kappa}$, entonces $\mu_a(\sigma) = \mu_a(\tau)$.

3) Si $x \subset \kappa$ (suponiendo $x \in M$) entonces

$$\mu_a(\check{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

En efecto, $\|\check{\alpha} \in \check{x}\| = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in x, \\ 0 & \text{si } \alpha \notin x, \end{cases}$ luego $f_a(\check{x}, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in x, \\ 0 & \text{si } \alpha \notin x. \end{cases}$

4) Sea $\gamma < \kappa$ y $\{\sigma_\delta\}_{\delta < \gamma} (\in M)$ tal que $a \Vdash \sigma_\delta \subset \check{\kappa}$ y, para todo $\delta < \epsilon < \gamma$, $a \Vdash \sigma_\delta \cap \sigma_\epsilon = \emptyset$. Sea $\tau = \{(p.o.(\check{\delta}, \sigma_\delta), \mathbb{1}) \mid \delta \in \gamma\}$ y sea $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $a \Vdash \sigma = \bigcup_{\delta < \gamma} \tau(\delta)$. Entonces $\mu_a(\sigma) = \sum_{\delta < \gamma} \mu_a(\sigma_\delta)$.

En efecto, si $\delta < \epsilon < \gamma$ tenemos que

$$a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta\| \wedge a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\epsilon\| = a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta \cap \sigma_\epsilon\| \leq \|\check{\alpha} \in \emptyset\| = 0.$$

Por lo tanto $\{a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta\|\}_{\delta < \gamma}$ es una anticadena en \mathbb{B} (quizá con términos nulos). Por otra parte

$$\begin{aligned} a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\| &= a \wedge \|\bigvee \delta < \check{\gamma} \check{\alpha} \in \tau(\delta)\| \\ &= a \wedge \bigvee_{\delta < \gamma} \|\check{\alpha} \in \tau(\check{\delta})\| = \bigvee_{\delta < \gamma} a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta\|. \end{aligned}$$

Así pues,

$$f_a(\sigma, \alpha) = \sum_{\delta < \gamma} \frac{m(a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta\|)}{m(a)} = \sum_{\delta < \gamma} f_a(\sigma_\delta, \alpha).$$

Sea $X_\delta = \{\alpha < \kappa \mid f_a(\sigma_\delta, \alpha) = \mu_a(\sigma_\delta)\} \in U$. Sea $X = \bigcap_{\delta < \gamma} X_\delta \in U$. Si $\alpha \in X$, entonces $f_a(\sigma, \alpha) = \sum_{\delta < \gamma} \mu_a(\sigma_\delta)$, luego $\mu_a(\sigma) = \sum_{\delta < \gamma} \mu_a(\sigma_\delta)$.

5) Sea $r \in [0, 1]$ ($r \in M$). Si $D = \{c \in \mathbb{B} \mid \mathbb{0} < c \leq a \wedge \mu_c(\sigma) < r\}$ es denso bajo a , entonces $\mu_a(\sigma) < r$. Lo mismo vale para las desigualdades $> r$, $\leq r$ y $\geq r$.

En efecto, sea $\{a_n\}_{n \in \omega}$ una anticadena maximal en D (podría ser finita, pero el razonamiento que sigue vale igual). Claramente $a = \bigvee_{n \in \omega} a_n$.

Como $\mu_{a_n}(\sigma) < r$, para casi todo $\alpha < \kappa$ se cumple

$$m(a_n \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\|) < r m(a_n).$$

Por la completitud de U , esto se cumple para todo $n < \omega$ para casi todo α . Así pues, para casi todo $\alpha < \kappa$,

$$\begin{aligned} m(a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\|) &= m\left(\bigvee_{n \in \omega} (a_n \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\|)\right) \\ &= \sum_{n \in \omega} m(a_n \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\|) < \sum_{n \in \omega} r m(a_n) = r m(a). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $f(\sigma, \alpha) < r$ para casi todo α , luego $\mu_a(\sigma) < r$.

- Si $b \in \mathbb{B}$, $b \neq \mathbb{0}$, $b \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$, definimos

$$\mu_b^*(\sigma) = \inf_{a \leq b} \mu_a(\sigma).$$

6) Las propiedades siguientes son obvias:

- Si $b \Vdash \sigma \subset \tau \subset \check{\kappa}$ entonces $\mu_b^*(\sigma) \leq \mu_b^*(\tau)$,
- Si $b_1 \leq b_2$, entonces $\mu_{b_2}^*(\sigma) \leq \mu_{b_1}^*(\sigma)$,
- Si $x \subset \kappa$ entonces $\mu_b^*(\check{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$
- Sea $\gamma < \kappa$ y $\{\sigma_\delta\}_{\delta < \gamma} (\in M)$ tal que $b \Vdash \sigma_\delta \subset \check{\kappa}$ y, para todo $\delta < \epsilon < \gamma$, $b \Vdash \sigma_\delta \cap \sigma_\epsilon = \emptyset$. Sea $\tau = \{(p.o.(\delta, \sigma_\delta), \mathbb{1}) \mid \delta \in \gamma\}$ y sea $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $b \Vdash \sigma = \bigcup_{\delta < \check{\gamma}} \tau(\delta)$. Entonces $\mu_b^*(\sigma) \geq \sum_{\delta < \gamma} \mu_b^*(\sigma_\delta)$.

• Trabajamos ahora en $M[G]$. Notemos que como $(V = L[U])^M$, se cumple que $M = L[U]^{M[G]}$, luego $\mu_a(\sigma)$ y $\mu_b^*(\sigma)$ son definibles en $M[G]$ (relativizando las definiciones a $L[U]$).

Sea $\mu : \mathcal{P}\kappa \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\mu(A) = \sup_{b \in G} \mu_b^*(\sigma),$$

donde $A = \sigma_G$. (El supremo se toma en realidad sobre los $b \in G$ tales que $b \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$.)

7) La definición de μ no depende de la elección de σ .

En efecto, supongamos que $A = \sigma_G = \tau_G$. Entonces, si $b \in G$ cumple $b \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$, existe $b' \in G$ tal que $b' \leq b$ y $b' \Vdash \tau \subset \check{\kappa} \wedge \sigma = \tau$. Entonces

$$\mu_b^*(\sigma) \leq \mu_{b'}^*(\sigma) = \mu_{b'}^*(\tau) \leq \mu^{(\tau)}(A),$$

luego $\mu^{(\sigma)}(A) \leq \mu^{(\tau)}(A)$, e igualmente se prueba la desigualdad contraria.

En realidad acabamos de probar algo más general:

8) Si $A_1 \subset A_2 \subset \kappa$, entonces $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.

Otro hecho obvio es el siguiente:

9) Si $A \in M$, $A \subset \kappa$, entonces $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in U, \\ 0 & \text{si } A \notin U. \end{cases}$

• Claramente

$$\|\bigvee \mu : \mathcal{P}\check{\kappa} \longrightarrow [0, 1] \wedge \bigwedge A \in \mathcal{P}\check{\kappa} \bigvee x (x \text{ es un } \check{\mathbb{B}}\text{-nombre} \wedge x \in L[\check{U}])$$

$$\wedge A = x_\Gamma \wedge \mu(A) = \sup_{b \in \Gamma} (\mu_b^*(x))^{L[\check{U}]} \|\| = \mathbf{1},$$

donde Γ es el nombre canónico de G . Por consiguiente existe $\bar{\mu} \in M^{\mathbb{B}}$ tal que

$$\|\bar{\mu} : \mathcal{P}\check{\kappa} \longrightarrow [0, 1] \wedge \bigwedge A \in \mathcal{P}\check{\kappa} \bigvee x (x \text{ es un } \check{\mathbb{B}}\text{-nombre} \wedge x \in L[\check{U}])$$

$$\wedge A = x_\Gamma \wedge \bar{\mu}(A) = \sup_{b \in \Gamma} (\mu_b^*(x))^{L[\check{U}]} \|\| = \mathbf{1}.$$

En particular $\mu = \bar{\mu}_G$.

10) Sea $r \in [0, 1] \cap M$ y sea $b \in \mathbb{B}$ tal que $b \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$. Entonces

$$\mu_b^*(\sigma) \geq r \leftrightarrow b \Vdash \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}.$$

En efecto, si $\mu_b^*(\sigma) \geq r$ y H es un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M con $b \in H$, entonces $\bar{\mu}_H(\sigma_H) \geq \mu_b^*(\sigma) \geq r$, luego $b \Vdash \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}$.

Supongamos ahora que $b \Vdash \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}$. Hemos de probar que $\mu_b^*(\sigma) \geq r$, para lo cual basta probar que para todo $s < r$ se cumple $\mu_b^*(\sigma) \geq s$. Por la definición de μ_b^* , para ello basta a su vez con demostrar que para todo $c \leq b$ (no nulo) se cumple $\mu_c(\sigma) \geq s$. Por 5) basta probar que el conjunto

$$D = \{d \in \mathbb{B} \mid \emptyset < d \leq c \wedge \mu_d(\sigma) \geq s\}$$

es denso bajo c . En efecto, dado $d \leq c$, tomamos un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico H tal que $d \in H$. Como $d \Vdash \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}$, tenemos que

$$\sup_{e \in H} \mu_e^*(\sigma) = \bar{\mu}_H(\sigma_H) \geq r,$$

luego existe un $e \in H$ tal que $e \leq d$ y $\mu_e(\sigma) \geq \mu_e^*(\sigma) \geq s$. Así pues, $e \in D$ y $e \leq d$.

11) Sean $A_1, A_2 \subset \kappa$ (en $M[G]$), $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Entonces $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

En efecto, sean $A_1 = \sigma_{1G}$, $A_2 = \sigma_{2G}$, $A = \sigma_G$. Sea $c \in G$ tal que

$$c \Vdash \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \wedge \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset \wedge \sigma_1 \subset \check{\kappa} \wedge \sigma_2 \subset \check{\kappa}.$$

Tomemos $r_1, r_2 \in [0, 1] \cap M$ tales que $\mu(A_1) \geq r_1$, $\mu(A_2) \geq r_2$. Sea $b \in G$, $b \leq c$ tal que $b \Vdash (\bar{\mu}(\sigma_1) \geq \check{r}_1 \wedge \bar{\mu}(\sigma_2) \geq \check{r}_2)$.

De 10) se sigue que $\mu_b^*(\sigma_1) \geq r_1$, $\mu_b^*(\sigma_2) \geq r_2$ y, por (un caso particular de) 6d), también

$$\mu_b^*(\sigma) \geq \mu_b^*(\sigma_1) + \mu_b^*(\sigma_2) \geq r_1 + r_2.$$

Por consiguiente, $\mu(A) \geq \mu_b^*(\sigma) \geq r_1 + r_2$. Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^M \subset M$, al tomar supremos en r_1 y r_2 concluimos que $\mu(A) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Supongamos que $\mu(A) > \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Existen $r_1, r_2 \in [0, 1] \cap M$ tales que $\mu(A_1) < r_1$, $\mu(A_2) < r_2$ y $\mu(A) \geq r_1 + r_2$. Sea $b \in G$, $b \leq c$ tal que

$$b \Vdash (\bar{\mu}(\sigma_1) < \check{r}_1 \wedge \bar{\mu}(\sigma_2) < \check{r}_2 \wedge \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}_1 + \check{r}_2).$$

Vamos a ver que $\mu_b(\sigma_1) < r_1$. Por 5) basta ver que el conjunto

$$D = \{d \in \mathbb{B} \mid \emptyset < d \leq b \wedge \mu_d(\sigma_1) < r_1\}$$

es denso bajo b . En efecto, si $e \leq b$, existe un $d' \leq e$ tal que $d' \Vdash \bar{\mu}(\sigma_1) < \check{r}_1$, luego por 10) $\mu_{d'}^*(\sigma_1) < r_1$ y por definición de $\mu_{d'}^*$ existe un $d \leq d'$ tal que $\mu_d(\sigma_1) < r_1$. Así, $d \in D$ y $d \leq e$.

Igualmente $\mu_b(\sigma_2) < r_2$, luego por (un caso particular de) 4),

$$\mu_b^*(\sigma) \leq \mu_b(\sigma) = \mu_b(\sigma_1) + \mu_b(\sigma_2) < r_1 + r_2,$$

pero 10) nos da también que $\mu_b^*(\sigma) \geq r_1 + r_2$, contradicción.

12) Sean $\{A_\delta\}_{\delta < \gamma}$ (en $M[G]$) con $\gamma < \kappa$ subconjuntos de κ disjuntos dos a dos. Sea $A = \bigcup_{\delta < \gamma} A_\delta$. Entonces $\mu(A) = \sum_{\delta < \gamma} \mu(A_\delta)$.

Por 11) se cumple que $\mu(A) \geq \sum_{\delta < \gamma} \mu(A_\delta)$.

Sea $A_\delta = \sigma_{\delta G}$. Podemos suponer que $\{\sigma_\delta\}_{\delta < \gamma} \in M$. En efecto, tenemos que $\{A_\delta\}_{\delta < \gamma} = \tau_G$. Para cada $\delta < \gamma$, es claro que $\|\bigvee x \tau(\check{\delta}) = x\| = \mathbb{1}$, luego existe un $\sigma_\delta \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $\|\tau(\check{\delta}) = \sigma_\delta\| = \mathbb{1}$, y la elección puede hacerse en M . Definimos σ según 4), con lo que $A = \sigma_G$. Podemos cambiar τ por el definido en 4). Sea $c \in G$ tal que

$$c \Vdash \bigwedge \delta \epsilon < \check{\gamma} (\delta \neq \epsilon \rightarrow \tau(\delta) \cap \tau(\epsilon) = \emptyset).$$

En particular, si $\delta < \epsilon < \gamma$, se cumple que $c \Vdash \sigma_\delta \cap \sigma_\epsilon = \emptyset$.

Supongamos que $\mu(A) > \sum_{\delta < \gamma} \mu(A_\delta)$. Entonces existe $r \in [0, 1] \cap M$ y $b \in G$, $b \leq c$ de modo que

$$b \Vdash \sum_{\delta < \gamma} \bar{\mu}(\tau(\delta)) < \check{r} \leq \bar{\mu}(\sigma).$$

Sea $E \subset \gamma$ finito. Como $\|\bigvee x = \bigcup_{\delta \in \check{E}} \tau(\delta)\| = \mathbf{1}$, existe $\sigma_E \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $\|\sigma_E = \bigcup_{\delta \in \check{E}} \tau(\delta)\| = \mathbf{1}$. Claramente entonces $b \Vdash \bar{\mu}(\sigma_E) < \check{r}$ y, como el en apartado anterior, de aquí se sigue que $\mu_b(\sigma_E) < r$. Por 4) $\mu_b(\sigma_E) = \sum_{\delta \in E} \mu_b(\sigma_\delta) < r$. Como esto vale para todo E finito, también por 4) concluimos que

$$\mu_b^*(\sigma) \leq \mu_b(\sigma) = \sum_{\delta < \gamma} \mu_b(\sigma_b) \leq r.$$

Pero por otra parte 10) implica que $\mu_b^*(\sigma) \geq r$, contradicción.

Con esto tenemos probado que (en $M[G]$) μ es una medida unitaria κ -aditiva en κ . Además por 9) es no trivial, luego κ es \mathbb{R} -medible $^{M[G]}$. ■

Ahora es fácil convertir a 2^{\aleph_0} en un cardinal \mathbb{R} -medible:

Teorema 15.55 (Solovay) *Si es consistente la existencia de un cardinal medible, también es consistente que 2^{\aleph_0} sea \mathbb{R} -medible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC en el que exista un cardinal medible κ con una medida fuerte U tal que $(V = L[U])^{M[G]}$. Consideremos el álgebra de Cantor $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\kappa \times \omega}$ (definición 10.14). Sea G un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M . Las cuentas del teorema 10.20 prueban que $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$. Basta observar que en ellas no se usa que el modelo base cumple $V = L$, sino únicamente que cumple la HCG, cosa que también sucede en nuestro modelo. Por el teorema anterior κ es \mathbb{R} -medible $^{M[G]}$. ■

En particular tenemos que si es consistente que exista un cardinal medible, también lo es que exista una medida 2^{\aleph_0} -aditiva en \mathbb{R} que extienda a la medida de Lebesgue.

Este teorema, junto con el otro teorema de Solovay que hemos visto en la sección anterior, prueba que la consistencia de que exista un cardinal medible es equivalente a la de que exista un cardinal \mathbb{R} -medible $\leq 2^{\aleph_0}$ y a la de que exista un cardinal débilmente medible $\leq 2^{\aleph_0}$.

Ahora vamos a probar que un cardinal débilmente medible no tiene por qué ser \mathbb{R} -medible. Para ello probamos un análogo al teorema 15.54 pero para cardinales débilmente medibles. Para que un cardinal medible siga siendo débilmente medible en una extensión genérica no necesitamos un álgebra medida, sino que sirve cualquier álgebra —y, por consiguiente, cualquier c.p.o.— con la condición de cadena numerable:

Teorema 15.56 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC. En M , sea κ un cardinal medible y U una medida en κ tal que $(V = L[U])^M$. Sea \mathbb{P} un c.p.o. que cumpla la condición de cadena numerable M y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces κ es débilmente medible $^{M[G]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $I \in M$ el ideal primo dual de U . Sea

$$J = \{X \in M[G] \mid \forall Y \in I \ X \subset Y\} \in M[G].$$

Claramente J es un ideal ^{$M[G]$} en κ (es el ideal generado por I). Además es claro que $\bigwedge \alpha \in \kappa \ \{\alpha\} \in J$. Veamos que J es κ -completo ^{$M[G]$} .

Sea $\{X_\delta\}_{\delta < \gamma} = \sigma_G \in M[G]$ una familia de $\gamma < \kappa$ elementos de J . Sea $p_0 \in \mathbb{P}$ tal que

$$p_0 \Vdash \sigma : \check{\gamma} \longrightarrow \mathcal{P}\check{\kappa} \wedge \bigwedge \delta < \check{\gamma} \forall Y \in \check{I} \ \sigma(\delta) \subset Y.$$

Para cada $\delta < \gamma$ y cada $p \leq p_0$ existe un $q \leq p$ y un $Y \in I$ de modo que $q \Vdash \sigma(\delta) \subset \check{Y}$. Sea (en M) W_δ una anticadena maximal de condiciones $q \leq p_0$ para las cuales existe un $Y_{\delta q} \in I$ tal que $q \Vdash \sigma(\delta) \subset \check{Y}_{\delta q}$. Por hipótesis W_δ es numerable ^{M} , luego

$$Y = \bigcup_{\delta < \gamma} \bigcup_{q \in W_\delta} Y_{\delta q} \in I.$$

Tenemos que toda extensión de p_0 ha de ser compatible con algún elemento de W_δ (o de lo contrario la anticadena se podría extender), luego el teorema 4.8 nos da que $G \cap W_\delta \neq \emptyset$. Si $q \in G \cap W_\delta$, entonces $X_\delta \subset Y_{\delta q} \subset Y$, luego $\bigcup_{\delta < \gamma} X_\delta \subset Y$, lo que prueba que la unión está en J .

Falta probar que J cumple la condición de cadena numerable ^{$M[G]$} . Supongamos que $\{X_\delta\}_{\delta < \omega_1} = \sigma_G$ es una familia de subconjuntos disjuntos de κ de medida positiva (módulo J). Por simplicidad, aquí ω_1 representa al ordinal numerable $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$. Sea $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \sigma : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}\check{\kappa} \wedge \bigwedge \delta \epsilon < \omega_1 (\delta < \epsilon \rightarrow \sigma(\delta) \cap \sigma(\epsilon) = \emptyset)$$

$$\wedge \bigwedge \delta < \omega_1 \bigwedge Y \in \check{I} \ \sigma(\delta) \not\subset Y.$$

Para cada $\delta < \omega_1$, sea

$$Y_\delta = \{\alpha < \kappa \mid \forall q \in \mathbb{P} (q \leq p \wedge q \Vdash \check{\alpha} \in \sigma(\delta))\} \in M.$$

Claramente $p \Vdash \sigma(\delta) \subset \check{Y}_\delta$, luego $Y_\delta \notin I$. Como I es κ -completo ^{M} , tenemos que $Y = \bigcap_{\delta < \omega_1} Y_\delta \notin I$, luego en particular $Y \neq \emptyset$.

Sea $\alpha \in Y$. Para cada $\delta < \omega_1$, sea $q_\delta \in \mathbb{P}$, $q_\delta \leq p$ tal que $q_\delta \Vdash \check{\alpha} \in \sigma(\delta)$. Como \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable ^{M} , ha de haber dos condiciones compatibles q_δ y q_ϵ . Si $q \leq q_\delta \wedge q \leq q_\epsilon$, entonces $q \Vdash \check{\alpha} \in \sigma(\delta) \cap \sigma(\epsilon)$, contradicción. ■

Observemos que la consistencia del axioma de Martin se demuestra mediante una extensión genérica con un c.p.o. que cumple la condición de cadena numerable (teorema 9.25). Combinando esto con el teorema anterior obtenemos:

Teorema 15.57 *Si es consistente la existencia de un cardinal medible, también es consistente $\text{ZFC} + \text{AM} + 2^{\aleph_0}$ es débilmente medible.*

Ahora sólo nos falta demostrar que el axioma de Martin implica que no existen cardinales \mathbb{R} -medibles $\leq 2^{\aleph_0}$. Necesitamos un resultado previo, que a su vez requiere una definición:

Definición 15.58 Consideramos en ${}^\omega\omega$ el orden parcial dado por

$$f \prec g \leftrightarrow \exists n_0 \in \omega \forall n \geq n_0 f(n) < g(n).$$

Una *escala* de longitud κ es una sucesión $\{f_\alpha\}_{\alpha < \kappa} \subset {}^\omega\omega$ tal que

$$\bigwedge \alpha \beta (\alpha < \beta < \kappa \rightarrow f_\alpha \prec f_\beta) \quad \text{y} \quad \bigwedge g \in {}^\omega\omega \bigvee \alpha < \kappa g \prec f_\alpha.$$

Teorema 15.59 (AM) Si $H \subset {}^\omega\omega$, $|H| < 2^{\aleph_0}$, entonces existe $f \in {}^\omega\omega$ tal que $\bigwedge h \in H h \prec f$. Por consiguiente existe una escala de longitud 2^{\aleph_0} .

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathbb{P} el conjunto de pares (s, E) con $s \in 2^{<\omega}$ y $E \subset H$ finito. Consideramos en \mathbb{P} el orden parcial dado por

$$(s, E) \leq (s', E') \leftrightarrow s' \subset s \wedge E' \subset E$$

$$\wedge \bigwedge k \in \text{Dominio}(s) \setminus \text{Dominio}(s') \bigwedge h \in E' h(k) < s(k).$$

Dos condiciones (s, E_1) y (s, E_2) son obviamente compatibles, pues una extensión común es $(s, E_1 \cup E_2)$. Una familia no numerable de condiciones ha de tener necesariamente dos con la misma primera componente, luego no puede ser una anticadena. Así pues, \mathbb{P} cumple la condición de cadena numerable.

Para cada $h \in H$, sea $D_h = \{(s, E) \in \mathbb{P} \mid h \in E\}$, denso en \mathbb{P} . Para cada $n \in \omega$ sea $F_n = \{(s, E) \in \mathbb{P} \mid n \in \text{Dominio}(s)\}$, también denso en \mathbb{P} . Sea G un filtro en \mathbb{P} que corte a todos estos conjuntos. Sea f la unión de las primeras componentes de las condiciones en G . El hecho de que G corte a los conjuntos F_n se traduce en que $f : \omega \rightarrow \omega$.

Si $h \in H$, existe $(s, E) \in G \cap D_h$, es decir, $h \in E$. Así, si $k \in \omega \setminus \text{Dominio}(s)$, existe un $(s', E') \in G$ tal que $k \in \text{Dominio}(s')$. Tomando una extensión común podemos suponer que $(s', E') \leq (s, E)$, con lo que $f(k) = s'(k) > h(k)$. Esto prueba que $h \prec f$.

Para construir una escala de longitud 2^{\aleph_0} numeramos ${}^\omega\omega = \{g_\alpha\}_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$. Supuesto definido $\{f_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ para $\beta < 2^{\aleph_0}$ aplicamos lo que acabamos de probar a $H = \{f_\alpha\}_{\alpha < \beta} \cup \{g_\beta\}$, con lo que obtenemos una función $f_\beta \in {}^\omega\omega$ tal que $f_\alpha \prec f_\beta$ para todo $\alpha < \beta$ y $g_\beta < f_\beta$. De este modo, $\{f_\alpha\}_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ es una escala. ■

Teorema 15.60 (AM) No existen cardinales \mathbb{R} -medibles $\leq 2^{\aleph_0}$.

DEMOSTRACIÓN: Si existe un cardinal \mathbb{R} -medible $\leq 2^{\aleph_0}$, entonces existe una medida μ en \mathbb{R} que extiende a la medida de Lebesgue (teorema 10.27). Como la medida de Lebesgue es 2^{\aleph_0} -aditiva (teorema 10.18) tenemos que todo $x \subset \mathbb{R}$ con $|x| < 2^{\aleph_0}$ cumple $\mu(x) = 0$.

Sea $\kappa = 2^{\aleph_0}$. Biyectando el intervalo $[0, 1]$ con κ obtenemos una medida unitaria m en κ con esta propiedad, es decir, todo conjunto de medida positiva tiene cardinal 2^{\aleph_0} .

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ una escala de longitud κ . Sea $A_{nm} = \{\alpha < \kappa \mid f_\alpha(n) = m\}$. Así $\kappa = \bigcup_{m < \omega} A_{nm}$, para todo $n < \omega$.

Para cada $n < \omega$, sea $m_n < \omega$ tal que

$$m\left(\bigcup_{m=0}^{m_n} A_{mn}\right) \geq 1 - \frac{1}{2^{n+2}}$$

y sea $B_n = \bigcup_{m=0}^{m_n} A_{mn}$. Sea $B = \bigcap_{n < \omega} B_n$. Así

$$\begin{aligned} m(B) &= 1 - m(\kappa \setminus B) = 1 - m\left(\bigcup_{n < \omega} \kappa \setminus B_n\right) \geq 1 - \left(\sum_{n < \omega} m(\kappa \setminus B_n)\right) \\ &= 1 - \left(\sum_{n < \omega} 1 - m(B_n)\right) \geq 1 - \sum_{n < \omega} \frac{1}{2^{n+2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sea $g : \omega \rightarrow \omega$ la función dada por $g(n) = m_n$. De este modo, si $n \in \omega$ y $\alpha \in B$, se cumple que $\alpha \in B_n$, luego $\alpha \in A_{nm}$ para cierto $m \leq m_n$, luego $f_\alpha(n) = m \leq m_n = g(n)$. Esto significa que $g \not\prec f_\alpha$.

Por otra parte, como $m(B) > 0$, ha de ser $|B| = 2^{\aleph_0}$, luego B es cofinal en κ . Por definición de escala debe existir un $\beta < \kappa$ tal que $g \prec f_\beta$ y, como B es cofinal, existe un $\alpha \in B$, $\alpha > \beta$, pero entonces $g \prec f_\beta \prec f_\alpha$, contradicción. ■

Combinando este teorema con 15.57 concluimos finalmente:

Teorema 15.61 *Si es consistente que exista un cardinal (débilmente) medible, entonces es consistente que 2^{\aleph_0} sea débilmente medible y no \mathbb{R} -medible.*

Ejercicio: Demostrar que si existe una escala de longitud κ entonces κ no es un cardinal \mathbb{R} -medible.

Capítulo XVI

Otros cardinales grandes

Los cardinales medibles son los mayores cardinales que hemos estudiado hasta ahora, pero existen (o pueden existir) muchos otros tipos de cardinales mayores aún. En este capítulo estudiaremos los más importantes, entre los que destacan los cardinales compactos y los supercompactos.

16.1 Cardinales compactos

Los cardinales compactos los definimos incidentalmente en el capítulo XII al caracterizar los cardinales débilmente compactos como aquellos cardinales fuertemente inaccesibles κ tales los lenguajes formales de tipo (κ, κ) o (κ, \aleph_0) satisfacen el teorema de compacidad débil. Allí anticipamos que si en lugar de considerar el teorema de compacidad débil consideramos el teorema de compacidad fuerte, obtenemos los cardinales (fuertemente) compactos. No obstante, conviene definir estos cardinales con una propiedad más simple que no involucre lenguajes infinitos.

Definición 16.1 Diremos que un cardinal regular no numerable κ es (*fuertemente*) *compacto* si todo filtro κ -completo sobre todo conjunto A se extiende a un ultrafiltro κ -completo en A .

Es claro que todo cardinal compacto κ es medible, pues, al ser regular, el filtro

$$F = \{x \subset \kappa \mid |\kappa \setminus x| < \kappa\}$$

es κ -completo que contiene a los subconjuntos cofinitos de κ , luego un ultrafiltro κ -completo que lo extienda será necesariamente no principal, es decir, será una medida en κ .

Si A es un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$, definimos

$$\mathcal{P}^{<\kappa}(A) = \{P \subset A \mid |P| < \kappa\}.$$

Para cada $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ sea $\hat{P} = \{Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid P \subset Q\}$. Es fácil ver que el conjunto

$$F = \{X \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid \forall P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \hat{P} \subset X\} \quad (16.1)$$

es un filtro κ -completo en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$.

Una *medida fina* en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ es un ultrafiltro κ -completo U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ que extiende a F , es decir, tal que $\bigwedge P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \hat{P} \in U$.

En realidad, para que un ultrafiltro κ -completo U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ sea una medida fina es suficiente con que $\bigwedge a \in A \widehat{\{a\}} \in U$, pues el caso general se sigue por la κ -completitud.

Si U es una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$, entonces U es un ultrafiltro no principal, pues para todo $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ existe un $a \in A \setminus P$, luego $\{a\} \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A)$, luego $\widehat{\{a\}} \in U$, pero $P \notin \widehat{\{a\}}$, luego $\widehat{\{a\}} \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \setminus \{P\} \in U$, luego $\{P\} \notin U$.

Ahora podemos probar que los cardinales compactos son lo que hemos anticipado que son:

Teorema 16.2 *Sea κ un cardinal regular no numerable. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- κ es compacto.
- Para todo conjunto A tal que $|A| \geq \kappa$, existe una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$.
- Todo lenguaje formal de tipo (κ, κ) cumple el teorema de compacidad.
- Todo lenguaje formal de tipo (κ, \aleph_0) cumple el teorema de compacidad.

DEMOSTRACIÓN: a) \rightarrow b) es inmediato, pues el filtro F definido en (16.1) se extiende a una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$.

b) \rightarrow c) Sea \mathcal{L} un lenguaje formal de tipo (κ, κ) y Σ un conjunto de sentencias de \mathcal{L} tal que todo subconjunto $S \subset \Sigma$ con $|S| < \kappa$ tiene un modelo M_S . Sea U una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)$ y sea M el ultraproducto de los modelos $\{M_S\}_{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)}$. Entonces M es un modelo de \mathcal{L} y el teorema de los ultraproductos 11.9 es válido para fórmulas de tipo (κ, κ) con el enunciado siguiente: Si

$$v : \text{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow \prod_{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)} M_S,$$

definimos $v^* : \text{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M$ mediante $v^*(x) = [v(x)]$ y para cada $S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)$ definimos $v_S : \text{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M_S$ mediante $v_S(x) = v(x)(S)$. Entonces

$$M \models \phi[v^*] \leftrightarrow \{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \models \phi[v_S]\} \in U.$$

La demostración es la misma de 11.9 (ahora por inducción sobre el rango de ϕ) salvo que hay que añadir dos casos más, correspondientes al conjuntor infinito y al generalizador infinito:

$$M \models \bigwedge_{\delta < \beta} \phi_\delta[v^*] \leftrightarrow \bigwedge \delta < \beta M \models \phi_\delta[v^*]$$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow \bigwedge_{\delta < \beta} \{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \models \phi_\delta[v_S]\} \in U \\
&\leftrightarrow \bigcap_{\delta < \beta} \{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \models \phi_\delta[v_S]\} \in U \\
&\leftrightarrow \{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \models \bigwedge_{\delta < \beta} \phi_\delta[v_S]\} \in U.
\end{aligned}$$

Para el caso del generalizador infinito probamos la coimplicación de las negaciones. Si $\neg M \models \bigwedge_{\delta < \beta} x_\delta \phi[v^*]$, entonces existe $w : \text{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow \prod_{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)} M_S$ tal que la correspondiente w^* coincide con v^* sobre las variables distintas de las x_δ y $M \models \neg\phi[w^*]$. Podemos exigir, de hecho, que v y w coincidan sobre las variables distintas de las x_δ .

Por hipótesis de inducción para $\neg\phi$ (aquí usamos el caso del negador, probado en 11.9),

$$\{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \models \neg\phi[w_S]\} \in U, \quad (16.2)$$

luego

$$\{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid \neg M_S \models \bigwedge_{\delta < \beta} x_\delta \phi[w_S]\} \in U \quad (16.3)$$

(pues este conjunto contiene al anterior). En consecuencia,

$$\{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \models \bigwedge_{\delta < \beta} x_\delta \phi[w_S]\} \notin U.$$

Recíprocamente, si se cumple esto último, y por consiguiente (16.3), definimos $w : \text{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow \prod_{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)} M_S$ de manera que coincida con v sobre las variables distintas de las x_δ y para cada S en el conjunto de (16.3) se cumpla $M_S \models \neg\phi[w_S]$. Por hipótesis de inducción (para $\neg\phi$) se cumple (16.2), luego $\neg M \models \bigwedge_{\delta < \beta} x_\delta \phi[v^*]$.

En particular, para toda sentencia ϕ de \mathcal{L} tenemos que

$$M \models \phi \leftrightarrow \{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \models \phi\} \in U.$$

Ahora bien, si $\phi \in \Sigma$, como U es una medida fina,

$$\{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid \phi \in S\} \in U,$$

luego $\{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \models \phi\} \in U$, pues este conjunto contiene al anterior, luego $M \models \phi$. Así pues, $M \models \Sigma$ y se cumple el teorema de compacidad.

c) \rightarrow d) es evidente.

d) \rightarrow a). Sea A un conjunto y F un filtro κ -completo en A . Consideremos un lenguaje formal de tipo (κ, \aleph_0) que conste de un relator monádico R_x para cada $x \in A$ y de una constante c . Sea \mathcal{L}^* como \mathcal{L} pero sin la constante.

Llamemos M al modelo de \mathcal{L}^* de universo A y en el que cada relator R_x se interpreta como la pertenencia a x . Sea Δ el conjunto de las sentencias de \mathcal{L}^* verdaderas en M . Sea $\Sigma = \Delta \cup \{R_x c \mid x \in F\}$. Vamos a probar que todo $S \subset \Sigma$

con $|S| < \kappa$ tiene un modelo. Dado S , sea $Y = \{x \in F \mid R_x c \in S\}$. Entonces $|Y| < \kappa$, luego al ser F un filtro κ -completo, tenemos que $\bigcap_{x \in Y} x \in F$. Claramente

M se convierte en un modelo de S sin más que interpretar la constante c como cualquier elemento de esta intersección.

Por hipótesis Σ tiene un modelo N . Sea $U = \{x \in \mathcal{P}A \mid M \models R_x c\}$. Vamos a probar que U es un ultrafiltro κ -completo en A que extiende a F .

Si $x \in F$, entonces $R_x c \in \Sigma$, luego $N \models R_x c$, luego $x \in U$. Así pues, $F \subset U$. En particular $A \in U$.

Como $M \models \bigwedge u \neg R_{\emptyset} u$, lo mismo vale para N , luego $N \models \neg R_{\emptyset} c$ y, por consiguiente $\emptyset \notin U$.

Si $x \in U$ y $x \subset y \subset A$, entonces $M \models \bigwedge u (R_x u \rightarrow R_y u)$, luego lo mismo vale para N y, como $N \models R_x c$, también $N \models R_y c$, luego $y \in U$.

Supongamos que $\{x_\delta\}_{\delta < \beta} \subset U$, con $\beta < \kappa$. Sea $x = \bigcap_{\delta < \beta} x_\delta$. Entonces

$$M \models \bigwedge u \left(\bigwedge_{\delta < \beta} R_{x_\delta} u \rightarrow R_x u \right),$$

luego N cumple lo mismo y, como para todo $\delta < \beta$ se cumple $N \models R_{x_\delta} c$, también $N \models \bigwedge_{\delta < \beta} R_{x_\delta} c$, luego $N \models R_x c$ y $x \in U$.

Finalmente, si $x \subset A$, entonces $M \models \bigwedge u (R_x u \vee R_{A \setminus x} u)$, luego N cumple lo mismo y, en particular, $N \models R_x c \vee R_{A \setminus x} c$, luego $x \in U \vee A \setminus x \in U$. ■

Veamos ahora algunas de las implicaciones que tiene la existencia de un cardinal compacto. Varias de ellas se deducen fácilmente del teorema siguiente:

Teorema 16.3 (Vopenka-Hrbacek) *Sea κ un cardinal compacto y A un conjunto de ordinales. Entonces, para todo cardinal $\mu \geq \kappa$ tal que $A \subset \mu$ se cumple que μ^+ es débilmente compacto $^{L[A]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F = \{x \subset \mu^+ \mid |\mu^+ \setminus x| \leq \mu\}$. Claramente F es un filtro κ -completo en μ^+ , que por compacidad se extiende a un ultrafiltro κ -completo U tal que $\bigwedge x \in U |x| = \mu^+$.

Definimos una ultrapotencia $\text{Ult}_U^*(L[A])$ construida a partir de la clase de todas las funciones $f : \mu^+ \rightarrow L[A]$ (sin exigir que $f \in L[A]$). El teorema fundamental se demuestra sin ningún cambio y tampoco hay ningún inconveniente en probar que la ultrapotencia está bien fundada, luego podemos considerar su colapso transitivo $M = \text{Ult}_U(L[A])$. Sea $j : L[A] \rightarrow M$ la inmersión natural.

Por otra parte, consideramos la clase $P = \{f \in L[A]^{\mu^+} \mid |f[\mu^+]| \leq \mu\}$ y sobre ella construimos una ultrapotencia $\text{Ult}_U^{*-}(L[A])$. Esta vez, en la prueba del teorema fundamental hay que observar que la función f que se construye en el caso del generalizador puede tomarse en P . Por lo demás la prueba es la misma, y así mismo se comprueba sin cambio alguno que la ultrapotencia está bien fundada, por lo que podemos considerar su colapso transitivo $N = \text{Ult}_U^-(L[A])$. Llamaremos $i : L[A] \rightarrow N$ a la inmersión natural.

Sea $k : N \rightarrow M$ dada por $k([f]^-) = [f]$. Es claro que k está bien definida, es una inmersión elemental y además $i \circ k = j$.

Si $f : \mu^+ \rightarrow \alpha$, para un $\alpha < \mu^+$, entonces $k|_{[f]^-} : [f]^- \rightarrow [f]$ biyectiva, pues es inyectiva por ser elemental y todo elemento de $[f]$ es de la forma $[g]$, con $g : \mu^+ \rightarrow \alpha$, luego $g \in P$, $[g]^- \in [f]^-$ y $k([g]^-) = [g]$. Como además k conserva la pertenencia y tanto $[f]^-$ como $[f]$ son ordinales, ha de ser $[f]^- = [f]$.

De aquí se sigue que $j(A) = i(A)$, pues si $[f] \in j(A)$ podemos exigir que $f : \mu^+ \rightarrow A$, luego $f : \mu^+ \rightarrow \mu$, luego $[f] = [f]^- \in i(A)$. Igualmente se prueba la otra inclusión.

Por consiguiente, $M = L[j(A)] = L[i(A)] = N$, luego $k : N \rightarrow N$. Si probamos que $i(\mu^+)$ es el menor ordinal no fijado por k , el teorema 12.18 nos dará que $i(\mu^+)$ es débilmente compacto^N, y al ser i elemental, μ^+ será débilmente compacto^{L[A]}.

Para ello observemos que $i(\mu^+) = \bigcup_{\alpha < \mu^+} i(\alpha)$. En efecto, si $[f]^- \in i(\mu^+)$ podemos exigir que $f : \mu^+ \rightarrow \mu^+$ y, como $|f[\mu^+]| \leq \mu$, existe un $\alpha < \mu^+$ tal que $f : \mu^+ \rightarrow \alpha$, con lo que $[f]^- \in i(\alpha)$.

Así pues, si $\beta < i(\mu^+)$, se cumple que $\beta < i(\alpha)$, para un $\alpha < \mu^+$, luego $\beta = [f]^-$, para un cierta $f : \mu^+ \rightarrow \alpha$, luego $k(\beta) = k([f]^-) = [f] = [f]^- = \beta$.

Por otra parte, si d es la identidad en μ^+ , es claro que todo $\alpha < \mu^+$ cumple $i(\alpha) = j(\alpha) < [d]$, luego $i(\mu^+) = \bigcup_{\alpha < \mu^+} i(\alpha) \leq [d]$, pero también es obvio que $[d] < j(\mu^+)$, luego en efecto, $i(\mu^+) < j(\mu^+) = k(i(\mu^+))$, es decir, $i(\mu^+)$ es el menor ordinal no fijado por k . ■

Con la noción de constructibilidad relativa habíamos conseguido hacer consistente la constructibilidad con los cardinales medibles. Esto ya no vale para los cardinales compactos:

Teorema 16.4 *Si κ es un cardinal compacto y A es un conjunto cualquiera, entonces $V \neq L[A]$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 13.10 existe un conjunto de ordinales A' tal que $L[A] = L[A']$. Sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal tal que $A' \subset \mu$. Por el teorema anterior μ^+ es débilmente compacto^{L[A]}, pero obviamente no es débilmente compacto, luego $V \neq L[A]$. ■

Si κ es un cardinal medible y U es una medida en κ , entonces $L[U]$ es un modelo donde κ es medible pero, por el teorema anterior, no es compacto. Así pues:

Teorema 16.5 *Si es consistente que exista un cardinal medible, también lo es que exista un cardinal medible no compacto.*

Más aún, no es posible demostrar la consistencia de que exista un cardinal compacto ni siquiera suponiendo la consistencia de que exista un cardinal medible:

Teorema 16.6 *Si κ es un cardinal compacto, existe un conjunto transitivo M tal que $M \models \text{ZFC} + \bigvee \kappa$ es un cardinal medible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U una medida en κ , sea A un conjunto de ordinales tal que $L[U] = L[A]$, sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal tal que $A \subset \mu$. Por el teorema 16.3 se cumple que μ^+ es débilmente compacto $^{L[U]}$, luego $M = (V_{\mu^+})^{L[U]}$ es un modelo transitivo de ZFC en el que κ es un cardinal medible. ■

En realidad, un teorema de Kunen prueba que si existe un cardinal compacto entonces existen conjuntos transitivos que son modelos de ZFC y contienen muchos cardinales medibles (un conjunto con cualquier ordinal prefijado de ellos). Por lo tanto, la consistencia de que exista un cardinal compacto no puede probarse ni siquiera suponiendo la consistencia de muchos cardinales medibles.

Pasamos ahora a probar un teorema de Solovay sobre el efecto de los cardinales compactos sobre la función del continuo. Se trata de que los cardinales singulares mayores que un cardinal compacto cumplen necesariamente la hipótesis de los cardinales singulares. El grueso de la prueba es el teorema siguiente, que tiene interés en sí mismo:

Teorema 16.7 *Si κ es un cardinal compacto y $\mu \geq \kappa$ es regular, entonces $\mu^{<\kappa} = \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $j_U : V \rightarrow \text{Ult}_U(V)$ la inmersión natural. Sea $[f]$ el menor ordinal en $\text{Ult}_U(V)$ tal que

$$\bigcup_{\alpha < \mu} j_U(\alpha) \leq [f].$$

Sea $g : \mathcal{P}^{<\kappa} \rightarrow \mu$ la aplicación dada por $g(P) = \bigcup_{\alpha \in P} \alpha$. Como U es una medida fina, para todo $\alpha < \mu$ se cumple que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U,$$

luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \leq g(P)\} \in U$. Esto se traduce en que $j_U(\alpha) \leq [g]$, luego $[f] \leq [g] < j_U(\mu)$. Por consiguiente podemos exigir que $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \mu$.

Sea $D = f[U] = \{X \subset \mu \mid f^{-1}[X] \in U\}$. Por 11.6 sabemos que D es un ultrafiltro κ -completo en μ . Veamos que todos sus elementos tienen cardinal μ . En efecto, si $\alpha < \mu$ entonces $j_U(\alpha) \leq [f]$, luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \leq f(P)\} \in U$, luego $\{\beta < \mu \mid \alpha \leq \beta\} \in D$. De aquí se concluye que los elementos de D no están acotados en μ , luego tienen ciertamente cardinal μ .

Veamos ahora que $\{\alpha < \mu \mid \text{cf } \alpha < \kappa\} \in D$, lo cual equivale¹ a que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \text{cf } f(P) < \kappa\} \in U.$$

Teniendo en cuenta que $|P \cap f(P)| < \kappa$, basta probar que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = \bigcup_{\alpha \in P \cap f(P)} \alpha\} \in U.$$

¹No suponemos que α sea un ordinal límite. Recordemos que $\text{cf } 0 = 0$ y $\text{cf}(\alpha + 1) = 1$.

Si llamamos $h : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \mu$ a la aplicación dada por $h(P) = \bigcup_{\alpha \in P \cap f(P)} \alpha$, lo que hemos de probar es que $[f] = [h]$. Obviamente, $[h] \leq [f]$.

Sea $\alpha < \mu$. Como U es una medida fina, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U$ y, como $j_U(\alpha) < [f]$, también $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in f(P)\} \in U$. Tomando la intersección tenemos que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P \cap f(P)\} \in U$, es decir, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \leq h(P)\} \in U$, lo cual se traduce en que $j_U(\alpha) \leq [h]$, para todo $\alpha < \mu$, luego $[f] \leq [h]$.

En resumen, D es un ultrafiltro κ -completo en μ cuyos elementos tienen todos cardinal μ y tal que casi todos los ordinales menores que μ (módulo D) tienen cofinalidad menor que κ . Consideremos ahora la ultrapotencia $\text{Ult}_D(V)$ y la inmersión elemental natural $j_D : V \rightarrow \text{Ult}_D(V)$.

Para cada $\alpha < \mu$ con $\text{cf } \alpha < \kappa$, sea $A_\alpha \subset \alpha$ no acotado con $|A_\alpha| < \kappa$. En otro caso sea $A_\alpha = \emptyset$. Sea $g : \mu \rightarrow V$ dada por $g(\alpha) = A_\alpha$ y sea $A = [g]_D$. Si d es la identidad en μ , tenemos que A no está acotado en $[d]_D$.

Veamos que si $\eta < \mu$ existe un η' tal que $\eta < \eta' < \mu$ de modo que

$$A \cap \{\gamma \mid j_D(\eta) \leq \gamma < j_D(\eta')\} \neq \emptyset.$$

En efecto, dado $\eta < \mu$, del hecho de que los elementos de D tengan cardinal μ se sigue que $j_D(\eta) < [d]_D$, luego existe un $\gamma \in A$ tal que $j_D(\eta) \leq \gamma < [d]_D$. Sea $\gamma = [h]_D$. Así, $\{\alpha < \mu \mid h(\alpha) < \alpha\} \in D$, con lo que, según la definición de D , tenemos que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid h(f(P)) < f(P)\} \in U$. Así $j_U(h)([f]_U) < [f]_U$, y por definición de $[f]$ ha de ser $j_U(h)([f]_U) < \bigcup_{\alpha < \mu} j_U(\alpha)$. Por consiguiente, existe $\eta' < \mu$ tal que $j_U(h)([f]_U) < j_U(\eta')$. A su vez esto nos da que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid h(f(P)) < \eta'\} \in U,$$

luego $\{\alpha < \mu \mid h(\alpha) < \eta'\} \in D$ y así $\gamma = [h]_D < j_D(\eta') < [d]_D$. En conclusión, $\gamma \in A \cap \{\gamma \mid j_D(\eta) \leq \gamma < j_D(\eta')\}$.

Construimos una sucesión $\{\eta_\alpha\}_{\alpha < \mu}$. Hacemos $\eta_0 = 0$. Dado $\eta_\alpha < \mu$, elegimos $\eta_{\alpha+1}$ de modo que $\eta_\alpha < \eta_{\alpha+1} < \mu$ y

$$A \cap \{\gamma \mid j_D(\eta_\alpha) \leq \gamma < j_D(\eta_{\alpha+1})\} \neq \emptyset. \quad (16.4)$$

Para cada $\lambda < \mu$, tomamos $\eta_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \eta_\delta$.

Es claro que (16.4) se cumple también relativizado a $\text{Ult}_D(V)$, luego

$$\{\beta < \mu \mid A_\beta \cap \{\gamma \mid \eta_\alpha \leq \gamma < \eta_{\alpha+1}\} \neq \emptyset\} \in D.$$

Si llamamos $B_\alpha = \{\gamma \mid \eta_\alpha \leq \gamma < \eta_{\alpha+1}\}$, tenemos que

$$\{\beta < \mu \mid A_\beta \cap B_\alpha \neq \emptyset\} \in D.$$

Definiendo $M_\beta = \{\alpha < \mu \mid A_\beta \cap B_\alpha \neq \emptyset\} \subset \mu$ tenemos que

$$\{\beta < \mu \mid \alpha \in M_\beta\} \in D.$$

Ahora, si $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, entonces

$$\{\beta < \mu \mid P \subset M_\beta\} = \bigcap_{\alpha \in P} \{\beta < \mu \mid \alpha \in M_\beta\} \in D.$$

En particular este conjunto no es vacío y existe un $\beta < \mu$ tal que $P \in \mathcal{P}M_\beta$.

Acabamos de probar que $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) = \bigcup_{\beta < \mu} \mathcal{P}M_\beta$. Más aún, como $|A_\beta| < \kappa$ y los B_α son disjuntos dos a dos, es claro que también $|M_\beta| < \kappa$, luego

$$\mu \leq \mu^{<\kappa} = |\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)| = \left| \bigcup_{\beta < \mu} \mathcal{P}M_\beta \right| \leq \sum_{\beta < \mu} 2^{|M_\beta|} \leq \sum_{\beta < \mu} \kappa = \mu,$$

donde hemos usado que κ es fuertemente inaccesible. ■

Teorema 16.8 (Solovay) *Si κ es un cardinal compacto entonces la hipótesis de los cardinales singulares se cumple sobre κ , es decir, si $\mu > \kappa$ es un cardinal singular tal que $2^{\text{cf } \mu} < \mu$, entonces $\mu^{\text{cf } \mu} = \mu^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu > \kappa$ un cardinal cualquiera. Por el teorema anterior, $\mu^{<\kappa} \leq (\mu^+)^{<\kappa} = \mu^+$. En particular $\mu^{\aleph_0} \leq \mu^+$ para todo cardinal $\mu > \kappa$. En particular, si $\mu > \kappa$ cumple $\text{cf } \mu = \aleph_0$, entonces $\mu^{\text{cf } \mu} = \mu^+$, es decir, la HCS se cumple para cardinales mayores que κ de cofinalidad numerable.

El teorema de Silver [15.18] afirma que el mínimo cardinal que incumple la HCS ha de tener cofinalidad numerable. Modificando mínimamente la prueba podemos afirmar que el mínimo cardinal mayor que κ que incumple la HCS ha de tener cofinalidad numerable, con lo que concluimos que no puede existir tal cardinal.

En efecto, llamemos κ_0 al cardinal compacto para no entrar en conflicto con la notación del teorema de Silver. Sea $\kappa > \kappa_0$ el menor cardinal que incumple la HCS y supongamos que $\mu = \text{cf } \kappa > \aleph_0$. Tenemos, pues, que $2^\mu < \kappa$ pero $\kappa^\mu > \kappa^+$.

En la prueba del teorema de Silver, podemos tomar la sucesión $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha < \mu}$ cofinal y normal en κ de modo que κ_0 sea el cardinal compacto. La única variación entonces es la comprobación de que $\bigwedge \nu < \kappa \nu^\mu < \kappa$. Por el teorema anterior esto es cierto si $\mu < \kappa_0$, luego podemos suponer que $\kappa_0 \leq \mu$. Entonces se cumple que ν^μ es uno de los cardinales ν , ν^+ o 2^μ , pues en la prueba del teorema [14.18] el caso $\nu \leq 2^\mu$ no usa la HCS y el caso $\nu > 2^\mu \geq \mu \geq \kappa_0$ se prueba por inducción sobre ν y sólo se aplica la HCS a ν (en el caso en que es un cardinal límite), con la cual contamos. ■

16.2 Cardinales supercompactos

Muchas de las propiedades de los cardinales medibles las hemos obtenido a través del concepto de medida normal. Ahora vamos a definir una noción de medida fina normal que desempeña un papel similar al de medida normal en

un cardinal medible pero con una diferencia notable: no es posible demostrar que si κ es un cardinal compacto entonces existen medidas finas normales en los conjuntos $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$. Por el contrario, la existencia de medidas finas normales determina una nueva clase de cardinales grandes, los cardinales supercompactos, tal vez los más importantes de todos los cardinales grandes.

Definición 16.9 Sea κ un cardinal regular y A un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$. Una medida fina U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ es *normal* si cuando $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \rightarrow A$ cumple

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid f(P) \in P\} \in U,$$

existe un $x \in A$ tal que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid f(P) = x\} \in U.$$

Si κ es un cardinal regular y $\mu \geq \kappa$ es un cardinal arbitrario, diremos que κ es μ -supercompacto si existe una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, lo cual equivale, obviamente, a que exista una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ para todo conjunto A con $|A| = \mu$.

Diremos que κ es *supercompacto* si es μ -supercompacto para todo cardinal $\mu \geq \kappa$ o, equivalentemente, si para todo conjunto A con $|A| \geq \kappa$ existe una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$.

En primer lugar estudiaremos las ultrapotencias con medidas finas normales:

Teorema 16.10 Sea κ un cardinal μ -supercompacto, sea U una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y sea $j : V \rightarrow \text{Ult}_U(V)$ la inmersión natural en la ultrapotencia asociada. Sea d la identidad en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$.

- a) Si $x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, entonces $x \in U \leftrightarrow [d] \in j(X)$.
- b) $[d] = j[\mu]$.
- c) Si $x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, entonces $x \in U \leftrightarrow j[\mu] \in j(X)$.
- d) Si $f \in V^{\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)}$, entonces $[f] = j(f)([d])$.

DEMOSTRACIÓN: a) Claramente

$$\begin{aligned} x \in U &\leftrightarrow \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid P \in x\} \in U \\ &\leftrightarrow \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid d(P) \in c_x(P)\} \in U \leftrightarrow [d] \in j(x). \end{aligned}$$

b) Si $\alpha < \mu$, como U es una medida fina, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U$, luego $j(\alpha) \in [d]$. Recíprocamente, si $[f] \in [d]$, podemos suponer que $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \mu$. Ha de cumplirse que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) \in P\} \in U$, luego por normalidad existe un $\alpha < \mu$ tal que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = \alpha\} \in U$, luego $[f] = j(\alpha) \in j[\mu]$. Así pues, $[d] = j[\mu]$.

c) Es consecuencia inmediata de a) y b).

d) Puesto que $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = c_f(P)(d(P))\} \in U$, se cumple que $[f] = [c_f]([d]) = j(f)([d])$. ■

Así pues, si κ es un cardinal medible y D es una medida normal en κ , la clase de la identidad $[d]$ representa a κ en la ultrapotencia, mientras que en el caso de una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, la clase de la identidad representa a $j[\mu]$. El teorema siguiente nos da representantes canónicos de κ y μ .

Teorema 16.11 *Sea κ un cardinal μ -supercompacto, sea U una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y consideremos la ultrapotencia asociada $\text{Ult}_U(V)$. Para cada ordinal $\alpha \leq \mu$ sea $f_\alpha : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \kappa$ la función dada por $f_\alpha(P) = \text{ord}(P \cap \alpha)$. Entonces $[f_\alpha] = \alpha$.*

Una representación alternativa de κ es $\kappa = [g]$, donde $g : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \mathcal{P}\kappa$ viene dada por $g(P) = P \cap \kappa$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \rightarrow \text{Ult}_U(V)$ la inmersión natural. Claramente $j(f_\alpha) : j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \rightarrow j(\kappa)$ viene dada por $j(f_\alpha)(P) = \text{ord}(P \cap j(\alpha))$. Por el teorema anterior, $[f_\alpha] = j(f_\alpha)([d]) = \text{ord}([d] \cap j(\alpha)) = \text{ord } j[\alpha] = \text{ord } \alpha = \alpha$.

Igualmente, $j(g) : j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \rightarrow j(\mathcal{P}\kappa)$ cumple $j(g)(P) = P \cap j(\kappa)$, de donde $[g] = j(g)([d]) = [d] \cap j(\kappa) = j[\kappa] = \kappa$, por el teorema 11.22. ■

Las propiedades principales de los cardinales supercompactos las obtendremos de la caracterización siguiente en términos de inmersiones elementales:

Teorema 16.12 *Un cardinal κ es μ -supercompacto, para un cardinal $\mu \geq \kappa$, si y sólo si existe una inmersión elemental $j : V \rightarrow M$ en una clase transitiva M de modo que*

- a) $\bigwedge \alpha < \kappa \ j(\alpha) = \alpha$,
- b) $\mu < j(\kappa)$,
- c) $M^\mu \subset M$.

Si U es una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, entonces la inmersión natural $j : V \rightarrow \text{Ult}_U(V)$ cumple estas propiedades.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que U es una medida final normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y sea j la inmersión natural. Entonces j cumple a) por el teorema 11.22.

Por el teorema anterior $\mu = [f_\mu] < j(\kappa)$, pues $f_\mu : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \kappa$.

Supongamos ahora que $\{a_\alpha\}_{\alpha < \mu} \in \text{Ult}_U(V)^\mu$. Para cada $\alpha < \mu$, tomemos $g_\alpha : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow V$ tal que $a_\alpha = [g_\alpha]$. Sea $g : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow V$ la aplicación dada por $g(P) = \{g_\alpha(P) \mid \alpha \in P\}$. Veamos que $[g] = \{a_\alpha \mid \alpha < \mu\}$.

Si $\alpha < \mu$, como U es una medida fina, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U$, luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid g_\alpha(P) \in g(P)\} \in U$, con lo que $a_\alpha = [g_\alpha] \in [g]$.

Si $[f] \in [g]$, entonces $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) \in g(P)\} \in U$ y por lo tanto

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \bigvee \alpha \in P \ f(P) = g_\alpha(P)\} \in U.$$

Sea $h : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \mu$ dada por $h(P) =$ el mínimo $\alpha \in P$ tal que $f(P) = g_\alpha(P)$ si existe alguno y 0 en caso contrario. Así, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid h(P) \in P\} \in U$

y por normalidad existe un $\alpha < \mu$ tal que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid h(P) = \alpha\} \in U$. Por consiguiente, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = g_\alpha(P)\} \in U$, es decir, $[f] = [g_\alpha] = a_\alpha$.

Así pues, $\{a_\alpha \mid \alpha < \mu\} = [g] \in \text{Ult}_U(V)$. En definitiva hemos probado que si $f \in \text{Ult}_U(V)^\mu$, entonces el rango de f pertenece a $\text{Ult}_U(V)$ y, como la ultrapotencia es un modelo transitivo de ZFC, de hecho $f \subset \text{Ult}_U(V)$. Aplicando lo que hemos probado a una biyección $h : \mu \rightarrow f$ concluimos que $f \in \text{Ult}_U(V)$.

Supongamos ahora que $j : V \rightarrow M$ cumple las condiciones del enunciado. Por la condición c) el conjunto $G = j[\mu] \in M$. Sea

$$U = \{x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid G \in j(x)\}.$$

Basta probar que U es una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$. Notemos que $j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) = \{x \subset j(\mu) \mid |x|^M < j(\kappa)\}$. Obviamente $G \subset j(\mu)$ y, por las condiciones b) y c) cumple $|G|^M = \mu < j(\kappa)$, luego $G \in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu))$, luego $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \in U$.

Es fácil probar que U es un ultrafiltro κ -completo. Veamos, por ejemplo, la κ -completitud. Sea $\beta < \kappa$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ una familia de elementos de U . Sea $r : \beta \rightarrow V$ la aplicación dada por $r(\alpha) = x_\alpha$. Como por a) se cumple $j(\beta) = \beta$, tenemos que $j(r) : \beta \rightarrow V$. Si $\alpha < \beta$ entonces $(\alpha, x_\alpha) \in r$ y, como j es elemental, $(\alpha, j(x_\alpha)) \in j(r)$, luego $j(r)(\alpha) = j(x_\alpha)$.

Ahora, $\bigwedge x (x \in \bigcap_{\alpha < \beta} x_\alpha \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \beta x \in r(\alpha))$, luego aplicando j y la transitividad de M concluimos que $j(\bigcap_{\alpha < \beta} x_\alpha) = \bigcap_{\alpha < \beta} j(x_\alpha)$. En consecuencia, $G \in j(\bigcap_{\alpha < \beta} x_\alpha)$, luego $\bigcap_{\alpha < \beta} x_\alpha \in U$.

Veamos que U es una medida fina. Para ello tomamos $\alpha < \mu$. Entonces $j(\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\}) = \{P \in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \mid j(\alpha) \in P\}$ y, como G pertenece claramente a este conjunto, concluimos que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U$.

Ahora veamos que U es normal. Sea $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \mu$ una aplicación tal que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) \in P\} \in U$. Entonces $G \in j(\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) \in P\}) = \{P \in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \mid j(f)(P) \in P\}$, luego $j(f)(G) \in G$, es decir, $j(f)(G) = j(\alpha)$, para un cierto $\alpha < \mu$. Por lo tanto $G \in \{P \in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \mid j(f)(P) = j(\alpha)\} = j(\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = \alpha\})$, luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = \alpha\} \in U$. ■

Por ejemplo, ahora es inmediato que si $\kappa \leq \mu \leq \nu$ y κ es ν -supercompacto, entonces también es κ -supercompacto. Comparando con el teorema 11.33 concluimos que un cardinal κ es medible si y sólo si es κ -supercompacto. Otra consecuencia interesante es la siguiente:

Teorema 16.13 *Si κ es un cardinal 2^κ -supercompacto y $j : V \rightarrow M$ es una inmersión elemental en las condiciones del teorema anterior, entonces*

$$D = \{x \subset \kappa \mid \kappa \in j(x)\}$$

es una medida normal en κ tal que $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es medible}\} \in D$. En particular κ es el κ -ésimo cardinal medible.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 11.33 tenemos que D es una medida normal en κ . sea $j_D : V \rightarrow \text{Ult}_D(V)$ la inmersión natural y sea $k : \text{Ult}_D(V) \rightarrow M$ la inmersión dada en 11.33. En la prueba se ve que $k([f]) = j_D(f)(\kappa)$. Por otro lado, como D es normal tenemos que $\kappa = [d]$, donde d es la identidad en κ . Así pues, $k(\kappa) = j_D(d)(\kappa) = \kappa$ (pues $j_D(d)$ es la identidad en $j_D(\kappa)$).

Por la propiedad c) del teorema anterior $\mathcal{P}\kappa \in M$, luego $D \subset M$ y, como $|D| \leq 2^\kappa$, de nuevo por el teorema anterior, $D \in M$. Obviamente, D es una medida ^{M} en κ . Así pues, $k(\kappa)$ es medible ^{M} , luego κ es medible ^{$\text{Ult}_D(V)$} , luego $[d]$ es medible ^{$\text{Ult}_D(V)$} , y esto implica que $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es medible}\} \in D$. ■

De este modo, la relación entre los cardinales supercompactos y los cardinales medibles es análoga a la que conocemos entre los cardinales medibles y los cardinales de Ramsey, o entre éstos y los débilmente inaccesibles, etc. La situación de los cardinales compactos en esta jerarquía es atípica. Nos ocuparemos de ella después. De momento veamos más propiedades de los cardinales supercompactos. La siguiente muestra su efecto sobre la función del continuo.

Teorema 16.14 *Si κ es un cardinal supercompacto y existe un cardinal $\nu \geq \kappa$ tal que $2^\nu > \nu^+$, entonces existen κ cardinales $\nu < \kappa$ que cumplen lo mismo. Por consiguiente, la HCG bajo κ implica la HCG.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un cardinal $\mu > 2^\nu$, sea U una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, sea $M = \text{Ult}_U(V)$ y $j : V \rightarrow M$ la inmersión natural. Es claro que ν , ν^+ y 2^ν son cardinales ^{M} , y del hecho de que $M^\mu \subset M$ se sigue que $\mathcal{P}\nu \subset M$, luego $(\mathcal{P}\nu)^M = \mathcal{P}\nu$, luego $(2^\nu > \nu^+)^M$.

Si $\delta < \kappa$, como $j(\delta) = \delta < \kappa \leq \nu < \mu < j(\kappa)$, tenemos que

$$\bigvee \nu(j(\delta) < \nu < j(\kappa) \wedge 2^\nu > \nu^+)^M,$$

luego $\bigvee \nu(\delta < \nu < \kappa \wedge 2^\nu > \nu^+)$. Como δ es arbitrario, hay κ cardinales ν en estas condiciones. ■

Este teorema admite infinidad de variantes. He aquí un ejemplo:

Ejercicio: Probar que si κ es un cardinal supercompacto y existe un cardinal medible (o de Ramsey, o débilmente compacto, o regular, etc.) $\nu > \kappa$ tal que $2^\nu = \nu^+$ (o $2^\nu = \nu^{+++}$, etc.) entonces existen κ cardinales $\nu < \kappa$ que cumplen lo mismo.

En el capítulo anterior vimos que si κ es un cardinal medible, en el modelo canónico $L[U]$ tiene sólo una medida normal y 2^κ medidas en total. Ahora vamos a ver que si κ es supercompacto la situación es muy distinta. Para ello necesitamos el teorema siguiente:

Teorema 16.15 *Si κ es un cardinal 2^κ -supercompacto y $W \subset \mathcal{P}\kappa$, entonces existe una medida normal D en κ tal que $W \in \text{Ult}_D(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la fórmula $\phi(\kappa, W) \equiv$ Para toda medida normal D en κ se cumple que $W \notin \text{Ult}_D(V)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\bigvee W \subset \mathcal{P}\kappa \phi(\kappa, W)$.

Sea U una medida final normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(2^\kappa)$, sea $j_U : V \rightarrow M$ la inmersión natural, sea $D = \{x \subset \kappa \mid \kappa \in j(D)\}$ que, según 16.13, es una medida normal en κ , sea $j_D : V \rightarrow \text{Ult}_D(V)$ la inmersión asociada y sea $k : \text{Ult}_D(V) \rightarrow M$ según 11.33. Al igual que en 16.13 concluimos que $k(\kappa) = \kappa$. Del hecho de que j_U y j_D fijan a los ordinales menores que κ se sigue que k también lo hace, de modo que $\bigwedge \alpha \leq \kappa \ k(\alpha) = \alpha$. Por 11.20 resulta que k fija a todos los subconjuntos de κ , luego

$$\bigwedge W \in \text{Ult}_D(V) (W \subset \mathcal{P}_\kappa \rightarrow k(W) = W).$$

En efecto, si $x \in W$, $x = k(x) \in k(W)$, y si $x \in k(W) \subset \mathcal{P}k(\kappa) = \mathcal{P}_\kappa$, entonces $x = k(x) \in k(W)$, luego $x \in W$.

Sea, pues, $W \subset \mathcal{P}_\kappa$ tal que $\phi(\kappa, W)$. Del hecho de que $M^{2^\kappa} \subset M$ se sigue que $W \in M$ y $\mathcal{P}^M \kappa = \mathcal{P}_\kappa$. Más aún, se cumple $\phi^M(\kappa, W)$. En efecto, hemos de probar que si D' es una medida normal^M en κ , entonces $W \notin \text{Ult}_{D'}(M)$. Es claro que D' es una medida normal en κ y podemos definir una inmersión elemental $r : \text{Ult}_{D'}(M) \rightarrow \text{Ult}_{D'}(V)$ mediante $r([f]) = [f]$. Para cada $\alpha \in \Omega$, se cumple que $\alpha = [f] \in \text{Ult}_{D'}(V)$ con $f : \kappa \rightarrow \Omega$, de modo que $f \in M^\kappa \subset M$, luego $[f] \in \text{Ult}_{D'}(M)$ y $r([f]) = [f]$. Esto prueba que $r|_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$ biyectiva, luego es la identidad y por 11.20 llegamos a que r es la identidad. Así pues, $\text{Ult}_{D'}(M) = \text{Ult}_{D'}(V)$, luego, en efecto, $W \notin \text{Ult}_{D'}(M)$.

Por lo tanto, $(\bigvee W \subset \mathcal{P}_\kappa \ \phi(\kappa, W))^M$. Como k es elemental, también se cumple $(\bigvee W \subset \mathcal{P}_\kappa \ \phi(\kappa, W))^{\text{Ult}_D(V)}$. Sea $W' \in \text{Ult}_D(V)$ tal que $W' \subset \mathcal{P}_\kappa$ y $\phi^{\text{Ult}_D(V)}(\kappa, W')$. Aplicando κ obtenemos $\phi^M(\kappa, W')$ y, similarmente al razonamiento anterior, también $\phi(\kappa, W')$, en contradicción con que $W' \in \text{Ult}_D(V)$. ■

Como consecuencia:

Teorema 16.16 *Si κ es un cardinal 2^κ -supercompacto, entonces hay 2^{2^κ} medidas normales en κ .*

DEMOSTRACIÓN: Si D es una medida normal en κ y $W \subset \mathcal{P}_\kappa$ cumple que $W \in \text{Ult}_D(V)$, entonces $W = [f]$, para cierta $f : \kappa \rightarrow V$, pero podemos exigir que $\bigwedge \alpha < \kappa \ f(\alpha) \subset \mathcal{P}_\alpha$. Como $|\mathcal{P}_\alpha| < \kappa$ hay a lo sumo $\kappa^\kappa = 2^\kappa$ funciones f en estas condiciones, luego $|\text{Ult}_D(V) \cap \mathcal{P}_\kappa| \leq 2^\kappa$.

Como, por el teorema anterior, cada $W \subset \mathcal{P}_\kappa$ está en alguna $\text{Ult}_D(V)$ y hay 2^{2^κ} conjuntos W , ha de haber al menos 2^{2^κ} medidas normales en κ . Obviamente éste es el máximo número posible de medidas en κ . ■

El teorema siguiente muestra que entre las distintas ultrapotencias de un mismo cardinal supercompacto existe una relación natural. Omitimos la prueba, que no presenta ninguna dificultad:

Teorema 16.17 *Consideremos cardinales $\kappa \leq \mu \leq \nu$. Sea U_ν una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\nu)$, sea $q : \mathcal{P}^{<\kappa}(\nu) \rightarrow \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ la aplicación dada por $q(P) = P \cap \mu$ y sea $U_\mu = q[U_\nu]$. Entonces*

- a) U_μ es una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$.

- b) Si $j_\mu : V \rightarrow \text{Ult}_{U_\mu}(V)$ y $j_\nu : V \rightarrow \text{Ult}_{U_\nu}(V)$ son las inmersiones naturales y $j_{\mu\nu} : \text{Ult}_{U_\mu}(V) \rightarrow \text{Ult}_{U_\nu}(V)$ viene dada por $j_{\mu\nu}([f]) = [q \circ f]$, entonces $j_{\mu\nu}$ es una inmersión elemental que fija a los ordinales $\leq \mu$ y $j_\mu \circ j_{\mu\nu} = j_\nu$.

Seguidamente introducimos una noción de intersección diagonal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y mostramos que las medidas final normales son cerradas para intersecciones diagonales (en analogía con las medidas normales en cardinales medibles). Lo natural sería trabajar con la inclusión en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, pero necesitamos introducir una relación más técnica, motivada —como veremos— por el teorema 16.11.

Definición 16.18 Sean $\kappa \leq \mu$ cardinales infinitos. Definimos en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ la relación dada por

$$P \underset{\sim}{\subset} Q \leftrightarrow P \subset Q \wedge \text{ord } P < \text{ord}(Q \cap \kappa).$$

En particular, si $P \underset{\sim}{\subset} Q$ entonces $\text{ord}(P \cap \kappa) < \text{ord}(Q \cap \kappa)$, luego se trata de una relación bien fundada, asimétrica y —como se comprueba fácilmente— transitiva.

Veamos que algunos hechos que ya conocíamos para la relación de inclusión son válidos también con esta relación. Empezamos con la propiedad que define las medidas finas:

Teorema 16.19 Sea κ un cardinal supercompacto y U una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$. Entonces, para todo $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ se cumple que

$$\{Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid P \underset{\sim}{\subset} Q\} \in U.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos descomponer el conjunto del enunciado como

$$\{Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid P \subset Q\} \cap \{Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \text{ord } P < \text{ord}(Q \cap \kappa)\}.$$

El primer conjunto está en U por definición de medida fina, mientras que, llamando $\alpha = \text{ord } P < \kappa$, la pertenencia del segundo a U equivale, por el teorema 16.11, a que $\alpha = j(\alpha) < \text{ord } \kappa = \kappa$, lo cual es obvio. ■

Ahora adaptamos la propiedad que define a las medidas finas normales:

Teorema 16.20 Sea κ un cardinal supercompacto y U una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$. Sea $F : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ una aplicación tal que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid F(P) \underset{\sim}{\subset} P\} \in U.$$

Entonces existe un $Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ tal que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid F(P) = Q\} \in U.$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid F(P) \subset P \wedge \text{ord } F(P) < \text{ord}(P \cap \kappa)\} \in U,$$

luego por los teoremas 16.11 y 16.10, considerando la ultrapotencia asociada a U , tenemos que $[F] \subset [d] = j[\mu]$ y $\text{ord } [F] < \kappa$. Por lo tanto $[F] = j[Q]$, para cierto $Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$. De aquí se sigue que $[F] \subset j(Q)$, y esto se traduce en que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid F(P) \subset Q\} \in U.$$

Como κ es fuertemente inaccesible, $|\mathcal{P}Q| < \kappa$, luego la κ completitud de U implica que F es constante en un conjunto de medida 1. ■

Ahora ya podemos probar el resultado sobre intersecciones diagonales:

Teorema 16.21 *Sea κ un cardinal supercompacto y U una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$. Sea $\{A_Q\}_{Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)}$ una familia de elementos de U . Entonces*

$$\Delta_{Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)} A_Q = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid P \in \bigcap_{Q \underset{\sim}{\subset} P} A_Q\} \in U.$$

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario, $B = \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \setminus \Delta_{Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)} A_Q \in U$, luego para todo $P \in B$ existe un $F(P) \subset P$ tal que $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \setminus A_Q$. Completando $F(P) = \emptyset$ si $P \notin B$, tenemos $F : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \rightarrow \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ a la que podemos aplicar el teorema anterior y concluir que existe un $Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ tal que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid F(P) = Q\} \in U,$$

luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \setminus A_Q\} \in U$, es decir, $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \setminus A_Q \in U$, contradicción. ■

A continuación demostramos una propiedad de partición que necesitaremos en el capítulo próximo:

Teorema 16.22 *Sea κ un cardinal supercompacto y U una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$. Sea $A \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $[A]^{(n)}$ el conjunto de los $\{P_1, \dots, P_n\} \subset A$ tales que $P_1 \underset{\sim}{\subset} \dots \underset{\sim}{\subset} P_n$. Sea $[A]^{(<\omega)} = \bigcup_{n < \omega} [A]^{(n)}$. Si $A \in U$, para toda partición $F : [A]^{(<\omega)} \rightarrow \xi$ en $\xi < \kappa$ partes existe un $H \in U$, $H \subset A$ tal que F es constante en cada conjunto $[H]^{(n)}$.*

DEMOSTRACIÓN: Al igual que en la prueba de 12.27, podemos suponer que $F : [A]^{(n)} \rightarrow \xi$, pues si tenemos un conjunto homogéneo para cada n , la intersección de todos ellos cumple el teorema. Razonamos por inducción sobre n . Para $n = 1$ se trata de la κ -completitud de U . Supongámoslo cierto para n y sea $F : [A]^{(n+1)} \rightarrow \xi$.

Para cada $P \in A$, sea $A_P = \{Q \in A \mid P \underset{\sim}{\subset} Q\} \in U$. Definimos la partición $F_P : [A_P]^{(n)} \rightarrow \xi$ mediante $F_P(X) = F(X \cup \{P\})$. Por hipótesis de inducción

F_P toma un valor constante $\alpha_P < \xi$ en un conjunto $[H_P]^{(n)}$, para cierto $H_P \in U$. Para $P \notin A$, definimos $H_P = \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$. Sea $H_0 = \bigtriangleup_{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)} H_P \in U$.

Por la κ -completitud de U , existe un $H \subset H_0$, $H \in U$ y un $\alpha < \xi$ tal que $\alpha_P = \alpha$ para todo $P \in U$. Veamos que H es homogéneo para F .

Si $\{P_1, \dots, P_{n+1}\} \in [H]^{(n+1)}$, entonces, para $i > 1$, se cumple $P_1 \subset \sim P_i$, luego $P_i \in H_{P_1}$, luego $\{P_2, \dots, P_{n+1}\} \in [H_{P_1}]^{(n)}$ y, por consiguiente,

$$F(\{P_1, \dots, P_{n+1}\}) = F_{P_1}(\{P_2, \dots, P_{n+1}\}) = \alpha_{P_1} = \alpha.$$

■

Terminamos la sección mostrando que —en contra de lo que podría conjeturarse— un cardinal compacto no es necesariamente supercompacto. Primero necesitamos lo siguiente:

Teorema 16.23 *Si κ es un cardinal medible y hay κ cardinales compactos bajo κ , entonces κ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X \subset \kappa$ un conjunto de cardinales compactos tal que $|X| = \kappa$. Podemos tomarlo de modo que $|\kappa \setminus X| = \kappa$. Si F_0 es una medida en κ e Y_0, Y_1 es una partición de κ es conjuntos de cardinal κ , entonces uno de los dos está en F_0 . Digamos que $Y_0 \in F_0$. Sea $f : \kappa \rightarrow \kappa$ biyectiva tal que $f^{-1}[X] = Y_0$. Entonces por 11.6 tenemos que $F = f[F_0]$ es una medida en κ tal que $X \in F$. Así pues, $C = \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es compacto}\} \in F$.

Sea A un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$. Para cada $\mu \in C$, sea U_μ una medida fina en $\mathcal{P}^{<\mu}(A)$. Sea $U \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ el conjunto dado por

$$P \in U \leftrightarrow \{\mu \in C \mid P \cap \mathcal{P}^{<\mu}(A) \in U_\mu\} \in F.$$

Es una simple rutina comprobar que U es una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$, luego κ es compacto. ■

Teorema 16.24 *Si existe un cardinal medible que es el supremo de un conjunto de cardinales compactos, entonces el menor cardinal que cumple esto es compacto pero no supercompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea κ el cardinal del enunciado. Por el teorema anterior κ es compacto. Veamos que no es 2^κ -supercompacto. Si lo es, tomamos una medida fina normal U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(2^\kappa)$. Sea $M = \text{Ult}_U(V)$ y consideremos la inmersión natural $j_U : V \rightarrow M$. Si $\nu < \mu$ es compacto, entonces $j(\nu) = \nu$ es compacto^M, luego (κ es supremo de cardinales compactos)^M. Además, si D es una medida en κ , se cumple que $D \in M$, y D es una medida^M en κ , luego κ es medible^M. Por otro lado, aplicando j_U obtenemos que $(j_U(\kappa))$ es el menor cardinal medible que es supremo de cardinales compactos)^M, contradicción. ■

En la sección siguiente introduciremos los cardinales extensibles y probaremos que si κ es extensible entonces es el κ -ésimo cardinal supercompacto. Así pues, si es consistente que exista un cardinal extensible, también es consistente que exista un cardinal compacto no supercompacto. En realidad puede demostrarse esto mismo sin más que suponer la consistencia de que exista un cardinal compacto, pero no vamos a ver la prueba.

16.3 Cardinales enormes

Una de las características esenciales de los cardinales grandes es la imposibilidad de justificar su consistencia. Los cardinales supercompactos pueden considerarse bien conocidos, en el sentido de que se dispone de una compleja teoría sobre ellos llena de profundas consecuencias, por lo que su consistencia puede considerarse plausible. Sin embargo, es posible definir cardinales aún más grandes cuya consistencia resulta cada vez más dudosa. En esta sección, mediante el estudio de los cardinales enormes y otros relacionados, veremos cómo hemos de andar con mucho cuidado para no caer en contradicciones, y el hecho de que nuestras definiciones eviten todas las contradicciones conocidas no nos asegura que no puedan contener aún contradicciones ocultas.

La definición más natural de los cardinales enormes sería en términos de inmersiones elementales, pero daremos una definición en términos de medidas normales para evitar clases propias.

Definición 16.25 Sea κ un cardinal y A un conjunto con $|A| \geq \kappa$. Recordemos que

$$[A]^\kappa = \{P \subset A \mid |P| = \kappa\}.$$

Una *medida fina* en $[A]^\kappa$ es un ultrafiltro κ -completo no principal en $[A]^\kappa$ tal que para todo $\alpha < \mu$ el conjunto $\{P \in [A]^\kappa \mid \alpha \in P\} \in U$.

Como en el caso de $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$, se comprueba que las medidas finas son ultrafiltros no principales.

Diremos que una medida fina U en $[A]^\kappa$ es *normal* si para toda función $f : \mathcal{P}^\kappa(\mu) \rightarrow \mu$ tal que $\{P \in [A]^\kappa \mid f(P) \in P\} \in U$, se cumple que existe un ordinal $\alpha < \mu$ tal que $\{P \in [A]^\mu \mid f(P) = \alpha\} \in U$.

Estos conceptos invitan a definir una noción análoga a la de supercompacidad: un cardinal κ es *supercompacto** si para todo cardinal $\mu \geq \kappa$ existe una medida fina normal en $[\mu]^\kappa$. Sin embargo, los cardinales supercompactos* resultan ser contradictorios, según veremos enseguida.

Un cardinal κ es *enorme* si existe un cardinal $\mu > \kappa$ para el que existe una medida fina normal en $[\mu]^\kappa$.

Así, ser enorme es lo análogo a ser μ -supercompacto para cierto cardinal $\mu > \kappa$ que no precisamos, y la razón por la que no lo precisamos es que enseguida veremos que μ ha de cumplir ciertas condiciones para que $[\mu]^\kappa$ pueda tener una medida fina normal.

Teorema 16.26 Sean $\kappa < \mu$ dos cardinales tales que exista una medida fina normal U en $[\mu]^\kappa$. Sea $M = \text{Ult}_U(V)$ y $j : V \rightarrow M$ la inmersión elemental natural. Sea d la identidad en $[\mu]^\kappa$. Entonces:

- a) $\bigwedge \alpha < \kappa \ j(\alpha) = \alpha$.
- b) Si $x \subset [\mu]^\kappa$, se cumple $x \in U \leftrightarrow [d] \in j(x)$.

- c) $[d] = j[\mu]$.
 d) Si $X \subset [\mu]^\kappa$, se cumple $X \in U \leftrightarrow j[\mu] \in j(X)$.
 e) Si $f : [\mu]^\kappa \rightarrow V$, entonces $[f] = j(f)([d])$.
 f) $M^\mu \subset M$.
 g) $j(\kappa) = \mu$.

DEMOSTRACIÓN: a) se cumple por 11.22, b), c), d) y e) se demuestran exactamente igual que los apartados correspondientes del teorema 16.10. Así mismo, f) se demuestra igual que el apartado correspondiente de 16.12.

g) Claramente $\{P \in [\mu]^\kappa \mid |d(P)| = c_\kappa(P)\} = [\mu]^\kappa \in U$, luego

$$j(\kappa) = |[d]|^M = |j[\mu]|^M = \mu,$$

pues $j|_\mu \in M$ por f). ■

Así pues, la única diferencia entre las inmersiones elementales naturales inducidas por medidas finas normales en conjuntos $[\mu]^\kappa$ y las correspondientes a conjuntos $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ está en el apartado g) del teorema anterior: Ahora tenemos $j(\kappa) = \mu$ en lugar de $j(\kappa) > \mu$. Como j es elemental, esto hace que μ tenga que parecerse bastante a κ .

Por ejemplo, es claro que κ es medible, luego es fuertemente inaccesible, luego μ ha de ser fuertemente inaccesible^M, pero el hecho de que $M^\mu \subset M$ implica que, de hecho, μ ha de ser fuertemente inaccesible. Esto prueba que no existen cardinales supercompactos*.

En particular $2^\kappa < \mu$, luego todo cardinal enorme κ es 2^κ -supercompacto y, por 16.13 es el κ -ésimo cardinal medible. Luego mejoraremos esto.

Veamos ahora la caracterización de los cardinales enormes en términos de inmersiones elementales:

Teorema 16.27 *Un cardinal κ es enorme si y sólo si existe una inmersión elemental $j : V \rightarrow M$ en una clase transitiva M tal que κ es el menor ordinal no fijado y $M^{j(\kappa)} \subset M$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es consecuencia inmediata del teorema anterior. Si j es una inmersión en las condiciones del enunciado, definimos $\mu = j(\kappa)$, $G = j[\mu]$ y $U = \{x \subset [\mu]^\kappa \mid G \in j(X)\}$. La prueba del teorema 16.12 se adapta con cambios mínimos. ■

Enseguida estudiaremos la relación de los cardinales enormes con los cardinales supercompactos, pero antes vamos a comentar una posible generalización de los cardinales enormes:

Definición 16.28 Sea $j : V \rightarrow M$ una inmersión elemental no trivial de V en una clase transitiva M y sea κ el menor ordinal no fijado. Definimos

$$j^0(\kappa) = \kappa, \quad \bigwedge n \in \omega \quad j^{n+1}(\kappa) = j(j^n(\kappa)), \quad j^\omega(\kappa) = \bigcup_{n \in \omega} j^n(\kappa).$$

Diremos que un cardinal κ es *n-enorme* (resp. *ω -enorme*) si existe una inmersión elemental $j : V \rightarrow M$ en una clase transitiva M tal que κ es el menor ordinal no fijado y $M^{j^n(\kappa)} \subset M$ (resp. $M^{j^\omega(\kappa)} \subset M$).

Esta definición sólo puede ser parcialmente formalizada en ZFC, pero importa poco, pues con ella hemos “roto el cántaro”: sucede que no existen cardinales ω -enormes y —lo que es más inquietante— no es trivial que no existan. Para demostrarlo necesitamos un resultado previo:

Teorema 16.29 *Sea κ un cardinal infinito tal que $2^\kappa = \kappa^{\aleph_0}$. Entonces existe una función $f : {}^\omega\kappa \rightarrow \kappa$ tal que si $A \subset \kappa$, $|A| = \kappa$ y $\gamma < \kappa$, existe una función $s \in {}^\omega A$ tal que $f(s) = \gamma$. En otros términos, para todo $A \subset \kappa$ con $|A| = \kappa$ se cumple que $f[{}^\omega A] = \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{(A_\alpha, \gamma_\alpha)\}_{\alpha < 2^\kappa}$ una enumeración de todos los pares (A, γ) con $A \subset \kappa$, $|A| = \kappa$ y $\gamma < \kappa$. Definimos por recurrencia una sucesión $\{s_\alpha\}_{\alpha < 2^\kappa} \subset {}^\omega\kappa$. Supuesta definida para $\beta < \alpha$, como $\kappa^{\aleph_0} = 2^\kappa > |\alpha|$, existe un $s_\alpha \in {}^\omega A_\alpha$ tal que $s_\alpha \neq s_\beta$ para todo $\beta < \alpha$.

Ahora definimos $f(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ para todo $\alpha < 2^\kappa$ y $f(s) = 0$ si $s \neq s_\alpha$ para todo $\alpha < 2^\kappa$. Así, si $A \subset \kappa$, $|A| = \kappa$ y $\gamma < \kappa$, entonces $(A, \gamma) = (A_\alpha, \gamma_\alpha)$ para un $\alpha < 2^\kappa$, luego $f(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ y $s_\alpha \in {}^\omega A_\alpha$. ■

Teorema 16.30 (Kunen) *Si $j : V \rightarrow M$ es una inmersión elemental no trivial, κ es el menor ordinal no fijado y $\mu = j^\omega(\kappa)$, entonces $\mathcal{P}\mu \not\subset M$. En particular $M^\mu \not\subset M$ y, más en particular, $M \neq V$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\kappa_n = j^n(\kappa)$. Como $\kappa < j(\kappa)$, tenemos que

$$\kappa = \kappa_0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots$$

Supongamos que $\mathcal{P}\mu \subset M$. Tomando una biyección $f : \mu \rightarrow \mu \times \mu$ tal que $f \in M$, se ve inmediatamente que $\mathcal{P}(\mu \times \mu) \subset M$. En particular, cualquier biyección entre subconjuntos de μ está en M . Es claro entonces que un ordinal $\alpha < \mu$ es un cardinal fuertemente inaccesible^M si y sólo si es un cardinal fuertemente inaccesible.

Como κ es medible, en particular es fuertemente inaccesible y, como j es elemental, todos los κ_n son cardinales fuertemente inaccesibles. Esto implica a su vez que μ es un límite fuerte. En consecuencia,

$$2^\mu = 2^{n < \omega} = \prod_{n < \omega} 2^{\kappa_n} \leq \prod_{n < \omega} \mu = \mu^{\aleph_0}.$$

Podemos aplicar el teorema anterior, según el cual existe $f : {}^\omega\mu \rightarrow \mu$ tal que para todo $A \subset \mu$ con $|A| = \mu$ se cumple $f[{}^\omega A] = \mu$.

Es fácil ver que $j(\mu) = \bigcup_{n < \omega} j(\kappa_n) = \bigcup_{n < \omega} \kappa_{n+1} = \mu$, y obviamente $j(\omega) = \omega$. Por lo tanto, aplicando j a la propiedad de f , vemos que

$$(\bigwedge A \subset \mu (|A| = \mu \rightarrow j(f)[{}^\omega A] = \mu))^M,$$

y por la hipótesis sobre M podemos eliminar la relativización. Sea $G = j[\mu]$. Entonces $G \subset \mu$ y $|G| = \mu$, luego existe un $s \in {}^\omega G$ tal que $j(f)(s) = \kappa$. Como $s : \omega \rightarrow j[\mu]$, existe $t : \omega \rightarrow \mu$ tal que $\bigwedge n \in \omega s(n) = j(t(n))$ o, equivalentemente, $\bigwedge n \in \omega s(n) = j(t(n))$, luego $s = j(t)$.

En definitiva, $\kappa = j(f)(s) = j(f)(j(t)) = j(f(t)) = j(\alpha)$, con $\alpha = f(t)$. Pero, esto es imposible, pues si $\alpha < \kappa$ entonces $j(\alpha) = \alpha < \kappa$, mientras que si $\kappa \leq \alpha$ entonces $\kappa < j(\kappa) \leq j(\alpha)$, contradicción. ■

Así pues, no existen cardinales ω -enormes. Sin embargo, existe otra definición más débil de cardinal ω -enorme de la que no se sabe que sea contradictoria. Consiste en sustituir la condición $M^{j^\omega(\kappa)} \subset M$ por $V_{j^\omega(\kappa)} \subset M$. El teorema de Kunen afirma que $V_{j^\omega(\kappa)+1} \subset M$ sería contradictorio.

Volviendo a los cardinales enormes, para estudiar su relación con la supercompacidad conviene introducir otros cardinales:

Definición 16.31 Un cardinal κ es *extensible* si para todo ordinal $\alpha > \kappa$ existe un ordinal β y una inmersión elemental $j : V_\alpha \rightarrow V_\beta$ tal que κ es el menor ordinal no fijado.

Tal y como anticipábamos al final de la sección anterior, si κ es un cardinal extensible entonces es el κ -ésimo cardinal supercompacto. Para probarlo necesitamos un resultado previo:

Teorema 16.32 Sea κ un cardinal μ -supercompacto, donde μ es un cardinal regular. Si $\nu < \kappa$ es un cardinal ξ -supercompacto para todo cardinal $\nu \leq \xi < \kappa$, entonces ν es μ -supercompacto.

DEMOSTRACIÓN: Sea U una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y llamemos $j : V \rightarrow M$ a la inmersión natural en la ultrapotencia. Aplicando j a la hipótesis tenemos que $j(\nu) = \nu$ es ξ -supercompacto^M para todo cardinal^M tal que $\nu \leq \xi < j(\kappa)$. Como $\nu \leq \mu < j(\kappa)$, en particular ν es μ -supercompacto^M.

Como μ es regular, por 16.7 tenemos que $|\mathcal{P}^{<\nu}(\mu)| \leq |\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)| = \mu$ y, como $M^\mu \subset M$, se cumple que $\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\nu}(\mu) \subset M$. De aquí se sigue que si $(D$ es una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\nu}(\mu))^M$, de hecho D es una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\nu}(\mu)$, con lo que ν es μ -supercompacto. ■

Teorema 16.33 Todo cardinal extensible es supercompacto.

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un cardinal extensible. Por el teorema de reflexión existe un ordinal $\lambda > \kappa$ tal que V_λ es un modelo transitivo de (el suficiente) ZFC y las fórmulas “ κ es μ -supercompacto” y “ κ es supercompacto” sean absolutas para V_λ . De este modo, basta probar que κ es μ -supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \mu < \lambda$, pues entonces κ será supercompacto^{V λ} y, por consiguiente, supercompacto.

Sea $j : V_\lambda \rightarrow V_\beta$ una inmersión elemental de modo que κ sea el menor ordinal no fijado. Definimos $\kappa_0 = \kappa$ y si $\kappa_n \in V_\lambda$ hacemos $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$.

Vamos a probar que o bien hay un n tal que $\kappa_n < \lambda \leq \kappa_{n+1}$, en cuyo caso aquí termina la sucesión, o bien $\lambda = \bigcup_{n < \omega} \kappa_n$, es decir, que no puede ocurrir que esté definida la sucesión completa $\{\kappa_n\}_{n < \omega}$ y se cumpla $\mu = \bigcup_{n < \omega} \kappa_n < \lambda$.

Si sucediera esto último, tendríamos que $\{\kappa_n\}_{n < \omega} \in V_\lambda$ y, aplicando j , obtenemos que $j(\mu) = \mu$. Sea $G = j[\mu] \subset \mu < \lambda$. Claramente $G \in V_\lambda$.

Por otra parte, la prueba del teorema 11.33 es válida en este contexto y nos permite concluir que $U = \{x \subset \kappa \mid \kappa \in j(x)\} \in V_\lambda$ es una medida en κ , por lo que κ es medible.

Con estos elementos, el argumento del teorema 16.30 es aplicable: tenemos, como allí, que μ es un límite fuerte, luego $2^\mu = \mu^{\aleph_0}$, obtenemos $f \in V_\lambda$ tal que

$$(\bigwedge A \subset \mu (|A| = \mu \rightarrow j(f)[{}^\omega A] = \mu))^{V_\beta}$$

y, como $\mathcal{P}\mu \subset V_\beta$, podemos eliminar la relativización, aplicar este hecho al caso $A = G$ y llegar a una contradicción.

Con esto concluimos que basta demostrar que κ es μ -supercompacto para todo cardinal regular μ tal que $\kappa \leq \mu < \kappa_n$, donde n es cualquier natural para el que κ_n esté definido. Con ello lo estaremos probando para todo cardinal regular $\mu < \lambda$. Lo veremos por inducción sobre n .

En primer lugar hemos de probar que κ es μ -supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \mu < j(\kappa)$. Para ello basta observar que la prueba de 16.12 es válida en nuestro contexto cambiando V por V_λ y M por V_β . La propiedad c) se suple por el hecho de que $M = V_\beta$.

Supongamos ahora que κ es μ -supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \mu < \kappa_n$. Lo mismo es cierto en V_λ , luego aplicando j obtenemos que $j(\kappa)$ es μ -supercompacto para todo cardinal regular $j(\kappa) \leq \mu < \kappa_{n+1}$. Aquí hemos usado que la μ -supercompacidad es —trivialmente— absoluta para V_λ y V_β (al igual que ser un cardinal regular).

Aplicamos el teorema anterior: si $j(\kappa) \leq \mu < \kappa_{n+1}$ y μ es regular, tenemos que $j(\kappa)$ es μ -supercompacto y que κ es ξ -supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \xi < j(\kappa)$, luego concluimos que κ es también μ -supercompacto. En resumen, κ es μ -supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \mu < \kappa_{n+1}$. ■

Teorema 16.34 *Si κ es un cardinal extensible, entonces existe una medida normal D en κ tal que $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es supercompacto}\} \in D$. En particular κ es el κ -ésimo cardinal supercompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\lambda > \kappa$ tal que V_λ sea un modelo del suficiente ZFC y sea $j : V_\lambda \rightarrow V_\beta$ una inmersión elemental tal que κ sea el menor ordinal no fijado. Sea $D = \{x \subset \kappa \mid \kappa \in j(x)\}$. Con el mismo argumento de 11.33 se prueba que D es una medida normal en κ . Sea

$$A = \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es } \nu\text{-supercompacto para todo } \mu \leq \nu < \kappa\}.$$

Entonces $A \in V_\lambda$ y, como ser ν -supercompacto es absoluto para V_λ y V_β , se cumple que

$$j(A) = \{\mu < j(\kappa) \mid \mu \text{ es } \nu\text{-supercompacto para todo } \mu \leq \nu < j(\kappa)\}.$$

Por el teorema anterior $\kappa \in j(A)$ y por el teorema 16.32 los elementos de A son en realidad cardinales supercompactos, luego

$$A \subset \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es supercompacto}\} \in D.$$

■

Ahora mostramos que, en cuanto a consistencia, los cardinales enormes son más fuertes que los extensibles y, en particular, que los supercompactos:

Teorema 16.35 *Si κ es un cardinal enorme, entonces V_κ es un modelo transitivo de ZFC en el que hay una clase propia de cardinales extensibles.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una medida fina normal en un conjunto $[\mu]^\kappa$, para $\mu > \kappa$ y sea $j : V \rightarrow M$ la inmersión natural en la ultrapotencia. Sea $\delta < \kappa$.

Como κ es fuertemente inaccesible sabemos que V_κ es un modelo transitivo de ZFC. Sea A el conjunto de los ordinales límite $\lambda < \kappa$ tales que $\text{cf } \lambda = \omega$, V_λ satisfaga suficientes axiomas de ZFC y además las fórmulas “ ν es extensible” y “ $\forall e \beta (e : V_\alpha \rightarrow V_\beta)$ es una inmersión elemental y ν es el menor ordinal no fijado” sean absolutas para $V_\lambda - V_\kappa$.

Por el teorema de reflexión relativizado a V_κ tenemos que A no está acotado en κ (notemos que los ordinales λ que proporciona el teorema de reflexión tienen siempre cofinalidad numerable). En consecuencia $j(A)$ no está acotado en $j(\kappa)$, luego existe un $\lambda \in j(A)$ tal que $\kappa < \lambda < j(\kappa)$. En particular $\lambda \notin A$, luego $\lambda < j(\lambda)$. Del hecho de que $M^{j(\kappa)} \subset M$ se sigue que $V_{j(\kappa)} \subset M$ (notemos que $|V_{j(\kappa)}| = j(\kappa)$, pues $j(\kappa)$ es fuertemente inaccesible). Por consiguiente, $V_{j(\lambda)+1}^M = V_{j(\lambda)+1} \cap M = V_{j(\lambda)+1}$.

De aquí se sigue que $e = j|_{V_{\lambda+1}} : V_{\lambda+1} \rightarrow V_{j(\lambda)+1}$ es una inmersión elemental que fija a los ordinales menores que κ , luego en particular $j(\delta) = \delta$. Como $|e| = |V_{\lambda+1}| < |V_{j(\kappa)}| = j(\kappa)$, se cumple que $e \in M$. Así pues,

$$\begin{aligned} & \forall \eta (e \in j(A) \wedge j(\delta) < \eta < j(\lambda) \wedge e : V_{\eta+1} \rightarrow V_{j(\lambda)+1} \text{ inmersión elemental} \\ & \quad \wedge e|_\delta = \text{identidad})^M. \end{aligned}$$

(Basta tomar $\eta = \lambda$). Como j es elemental, existe un $\eta \in A$ tal que $\delta < \eta < \lambda$ y una inmersión elemental $e : V_{\eta+1} \rightarrow V_{\lambda+1}$ tal que $e|_\delta$ es la identidad. Notemos que $\eta \in A \subset \kappa$, luego $\eta = j(\eta) \in j(A)$. Como todo esto está en M ,

$$\forall \eta \lambda (e(j(\delta) < \eta < \lambda \wedge \eta \in j(A) \wedge \lambda \in j(A) \wedge$$

$$e : V_{\eta+1} \rightarrow V_{\lambda+1} \text{ inmersión elemental} \wedge e|_\delta = \text{identidad})^M.$$

Aplicando nuevamente que j es elemental obtenemos ordinales $\eta, \lambda \in A$ tales que $\delta < \eta < \lambda$ y una inmersión elemental $e : V_{\eta+1} \rightarrow V_{\lambda+1}$ tal que $e|_\delta$ es la identidad.

Como η es el máximo ordinal de $V_{\eta+1}$ y λ es el mayor ordinal de $V_{\lambda+1}$, ha de ser $e(\eta) = \lambda$. Sea ν el menor ordinal no fijado por e , de modo que $\delta < \nu \leq \eta$.

Si $f : \omega \rightarrow \nu$ es cofinal, entonces $f \in V_{\lambda+1}$ y $j(f) : \omega \rightarrow j(\nu)$ cofinal, pero es fácil ver que $j(f) = f$, con lo que $j(\nu) = \nu$, contradicción. Por lo tanto cf $\nu > \omega$, lo cual implica que $\delta < \nu < \eta$.

Si $\nu < \alpha < \eta$, entonces $e|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow V_{e(\alpha)}$ es una inmersión elemental para la que ν es el menor ordinal no fijado (aquí usamos que V_α es definible en $V_{\eta+1}$, como es fácil comprobar).

En particular $\bigvee e\beta(e : V_\alpha \rightarrow V_\beta)$ inmersión elemental para la que ν es el menor ordinal no fijado V_κ y, como $\eta \in A$, existe un $\beta < \eta$ y una inmersión elemental $e : V_\alpha \rightarrow V_\beta$ para la cual ν es el menor ordinal no fijado. Esto prueba que ν es extensible V_η y, por definición de A , también es extensible V_κ . Como $\nu > \delta$, tenemos que la clase de los cardinales extensibles V_κ no está acotada V_κ . ■

Combinando este teorema con 16.32 obtenemos la relación entre los cardinales enormes y los supercompactos.

Teorema 16.36 *Sea κ un cardinal enorme.*

- a) *Si $\nu > \kappa$ es un cardinal regular y κ es ν -supercompacto, entonces κ es el κ -ésimo cardinal ν -supercompacto.*
- b) *Si κ es supercompacto, entonces es el κ -ésimo cardinal supercompacto.*
- c) *Si $\xi \leq \kappa$ es supercompacto entonces hay ξ cardinales enormes bajo ξ .*
- d) *Si κ es supercompacto, entonces es el κ -ésimo cardinal enorme.*

DEMOSTRACIÓN: a) Si ξ es uno de los cardinales extensibles de V_κ , entonces ξ es μ -supercompacto para todo cardinal $\xi \leq \mu < \kappa$, luego por 16.32 es, de hecho, ν -supercompacto.

b) es consecuencia inmediata de a).

c) Sea U una medida normal en $[\mu]^\kappa$, para cierto $\mu > \kappa$. Como ξ es supercompacto existe una inmersión elemental $j : V \rightarrow M$ de manera que ξ es el menor ordinal no fijado y $V_{\mu+3} \subset M$. Así, $[\mu]^\kappa \in M$, $U \in M$, y κ es enorme M . Por consiguiente, dado $\delta < \xi$, tenemos que

$$\bigvee \pi(\delta < \pi < j(\xi) \wedge \pi \text{ es enorme})^M,$$

luego existe un cardinal enorme $\delta < \pi < \xi$.

d) es consecuencia de c). ■

En particular vemos que un cardinal enorme no tiene por qué ser supercompacto. Más concretamente, el menor cardinal enorme no es supercompacto.

En cualquier caso, recordemos que si existe una medida fina normal en $[\mu]^\kappa$ entonces μ es fuertemente inaccesible y κ es ν -supercompacto para todo $\nu < \mu$. En particular κ es $(2^\kappa)^+$ -supercompacto (y este cardinal es regular), luego es el κ -ésimo cardinal $(2^\kappa)^+$ -supercompacto.

Capítulo XVII

Cardinales grandes y extensiones genéricas

En este último capítulo veremos varias pruebas de consistencia mediante extensiones genéricas que requieren partir de modelos con cardinales grandes. El resultado más interesante será la construcción de un modelo en el que no se cumple la hipótesis de los cardinales singulares, para lo cual necesitaremos partir de un cardinal supercompacto. No obstante, nuestro primer resultado será la consistencia de que no existan \aleph_2 -árboles de Aronszajn, para lo cual necesitamos partir de un modelo con un cardinal débilmente compacto.

17.1 Árboles de Aronszajn

Según comentamos en el capítulo XII, el axioma de constructibilidad implica la existencia de κ -árboles de Aronszajn para todo cardinal κ no numerable excepto en el caso obvio en que κ es un cardinal inaccesible no débilmente compacto. Para el caso concreto de $\kappa = \aleph_1$ la existencia de árboles de Aronszajn es un teorema de ZFC, mientras que para $\kappa = \aleph_2$ basta suponer que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Por otra parte, el teorema 13.23 afirma que la no existencia de \aleph_2 -árboles de Aronszajn implica que \aleph_2 es débilmente compacto^L. Por lo tanto, si partimos de un modelo transitivo numerable de $ZFC + V = L$ en el que no existan cardinales débilmente compactos y construimos una extensión genérica donde $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, obtenemos un modelo que muestra la consistencia de $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ con la existencia de \aleph_2 -árboles de Aronszajn. Ahora probaremos que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ también es consistente con la no existencia de \aleph_2 -árboles de Aronszajn. Naturalmente, para ello habremos de suponer la consistencia de que exista un cardinal débilmente compacto. Concretamente vamos a probar el teorema siguiente:

Teorema 17.1 (Silver) *Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC en el que existe un cardinal débilmente compacto^M κ y $\nu < \mu < \kappa$ son cardinales regulares^M, entonces existe una extensión genérica N de M cuyos cardinales*

son los cardinales $^M \leq \mu$ o $\geq \kappa$ y en la cual se cumple que $2^\nu = \mu^+ = \kappa$ y no existen κ -árboles de Aronszajn.

En particular, si aplicamos esto a $\nu = \aleph_0$ y $\mu = \aleph_1^M$ obtenemos que en la extensión $2^{\aleph_0} = \aleph_2 = \kappa$ y no hay \aleph_2 -árboles de Aronszajn.

Supongamos, pues, que M es un modelo en las hipótesis del teorema, aunque de momento no supondremos que κ es débilmente compacto^M, sino únicamente que es un ordinal límite tal que $|\kappa|^M > \mu$ y $\bigwedge \delta < \kappa \ \delta + \nu \leq \kappa$. Todo ello se cumple si κ es un cardinal^M mayor que μ .

Sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(\kappa, 2, \nu)^M$. Para cada $\alpha \leq \kappa$ sea $\mathbb{P}_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid p \subset \alpha \times 2\}$. Es fácil ver que \mathbb{P}_α está completamente contenido en \mathbb{P} . Por ello, si llamamos $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mathbb{P})^M$ a la completación de \mathbb{P} , podemos identificar la completación \mathbb{B}_α de cada \mathbb{P}_α con una subálgebra completa de \mathbb{B} . Concretamente, con la subálgebra completa generada por \mathbb{P}_α . Sea

$$\mathbb{Q} = \{f \in \text{Fn}(\kappa, \mathbb{B}, \mu)^M \mid \bigwedge \alpha \in \text{Dominio}(f) \ f(\alpha) \in \mathbb{B}_{\alpha+\nu}\} \in M.$$

Si G es un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M , para cada $f \in \mathbb{Q}$ definimos otra función $f_G : \text{Dominio}(f) \rightarrow 2$ dada por $f_G(\alpha) = 1 \leftrightarrow f(\alpha) \in G$. Claramente $f_G \in M[G]$. Si $f, g \in \mathbb{Q}$, definimos $f \leq g \leftrightarrow g_G \subset f_G$. Es claro que así \mathbb{Q} es un conjunto preordenado en $M[G]$ con máximo $\mathbf{1} = \emptyset$. El preorden no es antisimétrico.

Es esencial tener presente que \mathbb{Q} , como conjunto, está en M , mientras que su preorden está en $M[G]$. Con el convenio usual de representar la terna $(\mathbb{Q}, \leq, \mathbf{1})$ simplemente por \mathbb{Q} , tenemos que $\mathbb{Q} \notin M$. Si tomamos un \mathbb{B} -nombre \leq_π tal que

$$\mathbf{1}_{\mathbb{B}} \Vdash \bigwedge f, g \in \check{\mathbb{Q}} (f \leq_\pi g \leftrightarrow g_\Gamma \subset f_\Gamma),$$

tenemos que $(\check{\mathbb{Q}}, \leq_\pi, \check{\emptyset}) \in M$ es un buen nombre para un c.p.o. en M de modo que, para todo ultrafiltro, $(\leq_\pi)_G$ es el preorden \leq que acabamos de definir. Lo representaremos abreviadamente por $\check{\mathbb{Q}}$.

También conviene destacar que, aunque en general desde M no se puede decidir la relación de orden de \mathbb{Q} , lo cierto es que si $g \subset f$ entonces $\mathbf{1} \Vdash \check{f} \leq \check{g}$. Así pues, la inclusión es un esbozo en M de la relación de orden en \mathbb{Q} . Un esbozo bastante fiel: si $f, g \in \mathbb{Q}$ y $p \in \mathbb{P}$ cumplen que $p \Vdash \check{g} \leq \check{f}$, entonces existe $h \in \mathbb{Q}$ tal que $f \subset h$ y $p \Vdash \check{h} \leq \check{g} \wedge \check{g} \leq \check{h}$. Basta definir

$$h(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } \alpha \in \text{Dominio}(f), \\ g(\alpha) & \text{si } \alpha \in \text{Dominio}(g) \setminus \text{Dominio}(f). \end{cases}$$

Así pues, en este sentido toda extensión de una condición f es equivalente a una extensión que contiene a f .

Definimos $\mathbb{R} = \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ con el orden dado por

$$(p, f) \leq (q, g) \leftrightarrow p \leq q \wedge p \Vdash \check{f} \leq \check{g}.$$

Es claro que \mathbb{R} es un c.p.o. en M con máximo $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Observemos que no es exactamente el producto generalizado $\mathbb{P} * \check{\mathbb{Q}}$ definido en el capítulo IX, pero la

relación entre ellos es muy simple: podemos suponer que $\{\check{f} \mid f \in \mathbb{Q}\} \subset \hat{\mathbb{Q}}$, y entonces la aplicación $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P} * \hat{\mathbb{Q}}$ dada por $i(p, f) = (p, \check{f})$ es una inmersión densa. En efecto, si $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \hat{\mathbb{Q}}$, tomamos un \mathbb{B} -ultrafiltro G tal que $p \in G$, con lo que $f = \sigma_G \in \mathbb{Q}$ y existe un $q \in G$ tal que $q \leq p$ y $q \Vdash \check{f} = \sigma$. Entonces $i(q, f) \leq (p, \sigma)$. Es claro que $(p, f) \leq (q, g) \rightarrow i(p, f) \leq i(q, g)$ y la densidad que acabamos de probar nos da inmediatamente $(p, f) \perp (q, g) \rightarrow i(p, f) \perp i(q, g)$.

De este modo, los teoremas probados en el capítulo IX sobre productos generalizados son aplicables a \mathbb{R} a través de la inmersión i , en especial 9.9 y el teorema que le sigue. Así, si G es un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M (que podemos identificar con el filtro \mathbb{P} -genérico $G \cap \mathbb{P}$) y H es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G]$, entonces $K = G \times H$ es un filtro \mathbb{R} -genérico sobre M tal que $M[K] = M[G][H]$.

Es fácil ver que si $(q, g) \leq (p, f)$ entonces existe una condición $(q, h) \in \mathbb{R}$ tal que $(q, h) \leq (q, g)$, $(q, g) \leq (q, h)$ y $f \subset h$.

No es cierto que \mathbb{Q} sea μ -cerrado en $M[G]$, pues una sucesión decreciente de condiciones (aunque sea creciente para la inclusión) no tiene por qué tener una extensión común (la unión de todas ellas podría no estar en M). No obstante vamos a probar que \mathbb{Q} se comporta como si fuera μ -cerrado. Necesitamos un teorema previo. Recordemos que un subconjunto A de un c.p.o. \mathbb{P} es abierto si

$$\bigwedge p \in A \bigwedge q \in \mathbb{P} (q \leq p \rightarrow q \in A).$$

(Es abierto respecto de la topología cuya álgebra de abiertos regulares es la compleción de \mathbb{P} .)

Teorema 17.2 *Si $p \in \mathbb{P}$, $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ cumplen que $p \Vdash \sigma$ es abierto denso en $\hat{\mathbb{Q}}$ y $f \in \mathbb{Q}$, entonces existe un $g \in \mathbb{Q}$ tal que $f \subset g$ y $p \Vdash \check{g} \in \sigma$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a construir en M una sucesión $\{(p_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha < \delta}$ (para cierto ordinal δ) tal que

- a) $p_\alpha \in \mathbb{P}$, $p_\alpha \leq p$, $f_\alpha \in \mathbb{Q}$,
- b) Si $\alpha < \beta < \delta$ entonces $f \subset f_\alpha \subset f_\beta$,
- c) $p_\alpha \Vdash \check{f}_\alpha \in \sigma$,
- d) $\{p_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ es una anticadena maximal en $\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p\}$.

Supongamos construida $\{(p_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha < \delta}$ que cumpla estas condiciones salvo a lo sumo la maximalidad que se afirma en d). Si la cumple ya tenemos la sucesión buscada. En caso contrario existe un $q \leq p$ incompatible con cada p_α . Notemos que como \mathbb{P} cumple la c.c. ν^+ , ha de ser $\delta < \nu^+ \leq \mu$. Por lo tanto,

$$f' = \bigcup_{\alpha < \delta} f_\alpha \in \mathbb{Q}.$$

Por la hipótesis, existe $p_\delta \leq q$ y $f'' \in \mathbb{Q}$ de modo que $p_\delta \Vdash \check{f}'' \in \sigma \wedge \check{f}'' \leq \check{f}'$. Definimos $f_\delta : \text{Dominio}(f'') \rightarrow \mathbb{B}$ mediante

$$f_\delta(\alpha) = \begin{cases} f'(\alpha) & \text{si } \alpha \in \text{Dominio}(f'), \\ f''(\alpha) & \text{si } \alpha \in \text{Dominio}(f'') \setminus \text{Dominio}(f'). \end{cases}$$

Así $f' \subset f_\delta$ y $p_\delta \Vdash \check{f}_\delta \leq \check{f}''$, luego $p_\delta \Vdash \check{f}_\delta \in \sigma$. De este modo, $\{(p_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha < \delta}$ cumple también las propiedades indicadas (salvo quizá la maximalidad). Como la construcción no puede prolongarse indefinidamente, existe la sucesión buscada.

Definimos $g = \bigcup_{\alpha < \delta} f_\alpha \in \mathbb{Q}$. Ciertamente $f \subset g$. Hemos de probar que $p \Vdash \check{g} \in \sigma$. Para ello basta a su vez probar que el conjunto de las condiciones que fuerzan esto es denso bajo p . Ahora bien, si $q \leq p$, existe un $\alpha < \delta$ y una condición $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq q$ y $r \leq p_\alpha$. Entonces $r \Vdash \check{f}_\alpha \in \sigma$ y $\mathbb{1} \Vdash \check{g} \leq \check{f}_\alpha$, luego $r \Vdash \check{g} \in \sigma$. ■

Como consecuencia obtenemos:

Teorema 17.3 *Sea $K = G \times H$ un filtro \mathbb{R} -genérico sobre M . Si $\alpha < \mu$ y $g \in M[K]$ cumple $g : \alpha \rightarrow M[G]$, entonces $g \in M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $g = \tau_H$, con $\tau \in M[G]^\mathbb{Q}$ y tomemos $f'_0 \in H$ tal que $f'_0 \Vdash \tau : \check{\alpha} \rightarrow L[\check{G}]$. Tomemos $f_0 \leq f'_0$ arbitrario. Sea $\tau = \tilde{\tau}_G$, con $\tilde{\tau} \in M^\mathbb{P}$ y tomemos $p \in G$ de modo que $p \Vdash (\check{f}_0 \Vdash \tilde{\tau} : \check{\alpha} \rightarrow L[\check{\Gamma}])$, donde Γ es el nombre canónico de G .

Para cada $\beta < \alpha$ sea $\sigma_\beta \in M^\mathbb{P}$ tal que

$$\mathbb{1}_\mathbb{P} \Vdash \sigma_\beta = \{f \in \check{\mathbb{Q}} \mid \forall x f \Vdash \tilde{\tau}(\check{\beta}) = \check{x}\}.$$

Es claro que $\{\sigma_\beta\}_{\beta < \alpha} \in M$ y se comprueba inmediatamente que $p \Vdash \sigma_\beta$ es abierto denso bajo f_0 . El teorema anterior (adaptado trivialmente para conjuntos densos bajo f_0 en lugar de densos) nos permite construir una sucesión $\{f_\beta\}_{\beta < \alpha} \in M$ creciente para la inclusión de condiciones de \mathbb{Q} que contienen a f_0 y $p \Vdash \check{f}_\beta \in \sigma_\beta$. Como $\alpha < \mu$, tenemos que $f = \bigcup_{\beta < \alpha} f_\beta \in \mathbb{Q}$. Veamos que $f \Vdash \tau \in L[\check{G}]$.

Para cada $\beta < \alpha$ se cumple que $f_\beta \in \sigma_{\beta G} = \{f \in \mathbb{Q} \mid \forall x f \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{x}\}$, luego podemos construir $\{x_\beta\}_{\beta < \alpha} \in M[G]$ tal que $f_\beta \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{x}_\beta$. Entonces, $\bigwedge \beta < \alpha f \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{x}_\beta$, luego f fuerza que τ es $\{x_\beta\}_{\beta < \alpha} \in M[G]$, luego $f \Vdash \tau \in L[\check{G}]$.

Con esto hemos probado que el conjunto $\{f \in \mathbb{Q} \mid f \Vdash \tau \in L[\check{G}]\}$ es denso bajo f'_0 , luego en realidad $f_0 \Vdash \tau \in L[\check{G}]$. Como $f'_0 \in H$, podemos concluir que $g = \tau_H \in M[G]$. ■

Sabemos que \mathbb{P} conserva cardinales, y el teorema anterior implica que todo cardinal $^{M[G]} \leq \mu$ sigue siéndolo en $M[K]$. En resumen: \mathbb{R} conserva cardinales $\leq \mu$. A partir de aquí suponemos ya que κ es un cardinal inaccesible M .

Teorema 17.4 \mathbb{R} cumple la c.c. κ .

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que \mathbb{P} cumple la c.c. ν^+ , luego en particular la c.c. κ . Por el teorema 9.12 basta probar que $\mathbf{1} \Vdash \check{Q}$ cumple la c.c. $\check{\kappa}$. En caso contrario, sea G un filtro \mathbb{P} -genérico tal que en $M[G]$ exista una anticadena $X \subset \mathbb{Q}$ con $|X|^{M[G]} = \kappa$. Sea $X_G = \{f_G \mid f \in X\} \subset \text{Fn}(\kappa, 2, \nu)^{M[G]}$, que cumple la c.c. κ (aquí usamos que $(2^{<\nu})^{M[G]} = (2^{<\nu})^M = \nu$ por 17.3). Así pues, han de existir $f, g \in X$ tales que f_G y g_G son compatibles. Ahora bien, entonces $h : \text{Dominio}(f) \cup \text{Dominio}(g) \rightarrow \mathbb{B}$ dada por

$$h(\beta) = \begin{cases} f(\beta) & \text{si } \beta \in \text{Dominio}(f), \\ g(\beta) & \text{si } \beta \in \text{Dominio}(g) \setminus \text{Dominio}(f), \end{cases}$$

es una extensión común de f y g , contradicción. \blacksquare

Esto implica que \mathbb{R} conserva cardinales $\geq \kappa$. Ahora probamos que todos los cardinales entre μ y κ se colapsan.

Teorema 17.5 *Sea K un filtro \mathbb{R} -genérico sobre M . Entonces $(\kappa = \mu^+)^{M[K]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que si $\mu < \delta < \kappa$, entonces $|\delta|^{M[G]} \leq \mu$. Sea $t : \mu \rightarrow (\mathcal{P}\nu)^{M[K]}$ dada por

$$t(\alpha) = \{\gamma < \nu \mid \forall f \in H \ f_G(\delta + \nu \cdot \alpha + \gamma) = 1\}.$$

Claramente $t \in M[K]$. Sea $t = \tau_K$. Podemos suponer que $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ fuerza que τ cumple la definición de t . Sea $\eta = \delta + \mu$. Sea $G_\eta = G \cap \mathbb{P}_\eta$, que es un filtro \mathbb{P}_η -genérico sobre M . Vamos a probar que $(\mathcal{P}\nu)^{M[G_\eta]} \subset t[\mu]$. De este modo, como $(2^\nu \geq \delta)^{M[G_\eta]}$, tendremos una aplicación inyectiva $\delta \rightarrow (\mathcal{P}\nu)^{M[G_\eta]}$ en $M[G_\eta]$, luego en $M[K]$, luego en $M[K]$ se cumplirá que $|\delta| \leq |(\mathcal{P}\nu)^{M[G_\eta]}| \leq |t[\mu]| \leq \mu$ y el teorema estará probado.

Tomamos, pues, $x \in (\mathcal{P}\nu)^{M[G_\eta]}$. Sea $x = \sigma_{G_\eta}$, donde σ es un buen nombre para un subconjunto de $\check{\nu}$. Como \mathbb{P}_η cumple la c.c. $\nu^+ \leq \mu$ y cf $\eta = \mu$, existe un $\alpha < \mu$ tal que $\sigma \in M^{\mathbb{P}_{\delta+\nu \cdot \alpha}}$. Fijado $(p, f) \in \mathbb{R}$, podemos tomar este α de modo que $f|_{\delta+\nu \cdot \alpha} = f|_\eta$. Definimos

$$f'(\beta) = \begin{cases} \|\check{\gamma} \in \sigma\| & \text{si } \beta = \delta + \nu \cdot \alpha + \gamma \text{ con } \gamma < \nu, \\ f(\beta) & \text{si } \beta < \delta + \nu \cdot \alpha \text{ o } \eta \leq \beta \text{ y } \beta \in \text{Dominio}(f). \end{cases}$$

Notemos que el valor $\|\check{\gamma} \in \sigma\|$ puede calcularse indistintamente en $\mathbb{B}_{\delta+\nu \cdot \alpha}$ o en \mathbb{B} , pues la inclusión es una inmersión completa. En particular $f'(\beta) \in \mathbb{B}_{\beta+\nu}$, con lo que $f' \in \mathbb{Q}$ y $f \subset f'$.

Sea $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ la inmersión natural y sea $\tilde{\sigma} = i(\sigma)$, de modo que $\tilde{\sigma}_K = \sigma_G$. Veamos que $(p, f') \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \tilde{\sigma}$.

En efecto, si $K = G \times H$ es un filtro \mathbb{R} -genérico tal que $(p, f') \in K$ y $\gamma \in \tilde{\sigma}_K$, entonces $f'(\delta + \nu \cdot \alpha + \gamma) \in G$, luego $f'_G(\delta + \nu \cdot \alpha + \gamma) = 1$, luego $\gamma \in \tau_K(\alpha)$.

Recíprocamente, si $\gamma \in \tau_K(\alpha)$, entonces existe una condición $f'' \in H$ tal que $f''_G(\delta + \nu \cdot \alpha + \gamma) = 1$. Sea $g \in H$ tal que $g \leq f'$ y $g \leq f''$. Así $f'_G \subset g_G$ y $f''_G \subset g_G$. En particular $g_G(\delta + \nu \cdot \alpha + \gamma) = 1$, pero este ordinal está en el dominio de f' , luego $f'(\delta + \nu \cdot \alpha + \gamma) = \|\check{\gamma} \in \sigma\| \in G$, luego $\gamma \in \sigma_G = \tilde{\sigma}_K$.

Con esto hemos probado que para toda condición (p, f) existe una condición $(p, f') \leq (p, f)$ tal que $(p, f') \Vdash \tilde{\sigma} \in \tau[\check{\mu}]$, luego de hecho $\mathbf{1} \Vdash \tilde{\sigma} \in \tau[\check{\mu}]$. En consecuencia, $x = \sigma_G \in t[\mu]$, como había que probar. ■

Ahora es claro que los cardinales y la función del continuo en $M[K]$ son como se indica en el enunciado de 17.1. Notemos que $(\mathcal{P}\nu)^{M[K]} = (\mathcal{P}\nu)^{M[G]}$ por el teorema 17.3 y que $(2^\nu)^{M[G]} = \kappa$, de donde $(2^\nu = \kappa)^{M[K]}$. Sólo falta probar que en $M[K]$ no hay κ -árboles de Aronszajn. Para ello necesitamos un teorema técnico, que a su vez requiere algunas consideraciones previas.

Para cada ordinal límite $\lambda < \kappa$ definimos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda &= \{p \in \mathbb{P} \mid p \subset \lambda \times 2\}, & \mathbb{P}^\lambda &= \{p \in \mathbb{P} \mid p \cap (\lambda \times 2) = \emptyset\}, \\ \mathbb{Q}_\lambda &= \{f \in \mathbb{Q} \mid f \subset \lambda \times \mathbb{B}\}, & \mathbb{Q}^\lambda &= \{f \in \mathbb{Q} \mid f \cap (\lambda \times \mathbb{B}) = \emptyset\}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}_\lambda = \mathbb{P}_\lambda \times \mathbb{Q}_\lambda, \quad \mathbb{R}^\lambda = \mathbb{P}^\lambda \times \mathbb{Q}^\lambda, \quad K_\lambda = K \cap \mathbb{R}_\lambda, \quad K^\lambda = K \cap \mathbb{R}^\lambda.$$

Es claro que el orden de \mathbb{P} se restringe a sendos órdenes en \mathbb{P}_λ y \mathbb{P}^λ de modo que $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_\lambda \times \mathbb{P}^\lambda$. La semejanza asigna a cada condición el par de restricciones a λ y a $\kappa \setminus \lambda$. La semejanza inversa asigna a cada par de condiciones su unión.

Si suponemos que $|\lambda| > \mu$ y $\bigwedge \delta < \lambda \delta + \nu \leq \lambda$, entonces todo lo que hemos dicho para \mathbb{R} , \mathbb{P} y \mathbb{Q} hasta el teorema 17.3 vale también para \mathbb{R}_λ , \mathbb{P}_λ y \mathbb{Q}_λ . En particular, todo filtro \mathbb{R}_λ -genérico sobre M es de la forma $K_\lambda = G_\lambda \times H_\lambda$, donde G_λ es \mathbb{P}_λ -genérico sobre M y H_λ es \mathbb{Q}_λ -genérico sobre $M[G_\lambda]$, y además $M[K_\lambda] = M[G_\lambda][H_\lambda]$.

Si $(p, f) \in \mathbb{R}_\lambda$ y $\delta \in \text{Dominio}(f)$, entonces $\delta < \lambda$, luego $f(\delta) \in \mathbb{B}_{\delta+\nu} \subset \mathbb{B}_\lambda$. Por consiguiente, si G es \mathbb{B} -genérico sobre M y $G_\lambda = G \cap \mathbb{B}_\lambda$, se cumple que $f_G = f_{G_\lambda} \in M[G_\lambda]$. Esto se traduce en que el preorden definido directamente sobre \mathbb{Q}_λ en $M[G_\lambda]$ es la restricción del definido sobre \mathbb{Q} en $M[G]$.

Definimos ahora en $M[K_\lambda]$ el preorden en \mathbb{R}^λ dado por

$$(p, f) \leq (q, g) \leftrightarrow p \leq q \wedge \bigvee p' \in G_\lambda(p' \cup p \Vdash \check{f} \leq \check{g}).$$

Como en el caso de $\check{\mathbb{Q}}$, podemos definir un \mathbb{R}_λ -nombre para el preorden que acabamos de definir, de modo que $\check{\mathbb{R}}^\lambda$ puede verse como un \mathbb{R}_λ -nombre para un c.p.o. en M y el producto $\mathbb{R}_\lambda \times \mathbb{R}^\lambda$ con el preorden dado por

$$((p, f), (p', f')) \leq ((q, g), (q', g')) \leftrightarrow (p, f) \leq (q, g) \wedge (p, f) \Vdash (\check{p}', \check{f}') \leq (\check{q}', \check{g}')$$

está densamente contenido en el producto generalizado $\mathbb{R}_\lambda * \check{\mathbb{R}}^\lambda$. La hipótesis sobre λ nos permite probar que $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_\lambda \times \mathbb{R}^\lambda$. En efecto, la aplicación dada por $i(p, f) = (p|_\lambda, f|_\lambda, p|_{\kappa \setminus \lambda}, f|_{\kappa \setminus \lambda})$ es claramente biyectiva. Veamos que es una semejanza.

Si $(p, f) \leq (q, g)$ en \mathbb{R} , entonces $(p|_\lambda, f|_\lambda) \leq (q|_\lambda, g|_\lambda)$ en \mathbb{R}_λ , pues si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M tal que $p|_\lambda \in G$, entonces $p|_\lambda \in G_\lambda$. Tomamos un filtro \mathbb{P}^λ -genérico G^λ sobre $M[G_\lambda]$ tal que $p|_{\kappa \setminus \lambda} \in G^\lambda$. Así $p \in G' = G_\lambda \times G^\lambda$, luego en $M[G']$ se cumple $g_{G'} \subset f_{G'}$, luego $(g|_\lambda)_{G_\lambda} \subset (f|_\lambda)_{G_\lambda}$, luego $(g|_\lambda)_G \subset (f|_\lambda)_G$, luego $f|_\lambda \leq g|_\lambda$ (en $M[G]$). Esto prueba que $p|_\lambda \Vdash \check{f}|_\lambda \leq \check{g}|_\lambda$, luego ciertamente $(p|_\lambda, f|_\lambda) \leq (q|_\lambda, g|_\lambda)$.

Además, $(p|_\lambda, f|_\lambda) \Vdash (\check{p}|_{\kappa \setminus \lambda}, \check{f}|_{\kappa \setminus \lambda}) \leq (\check{q}|_{\kappa \setminus \lambda}, \check{g}|_{\kappa \setminus \lambda})$. En efecto, si tomamos $K_\lambda = G_\lambda \times H_\lambda$ un filtro \mathbb{R}_λ -genérico sobre M tal que $(p|_\lambda, f|_\lambda) \in K_\lambda$, en $M[K_\lambda]$ se cumple ciertamente que $p|_{\kappa \setminus \lambda} \leq q|_{\kappa \setminus \lambda}$ y $p = p|_\lambda \cup p|_{\kappa \setminus \lambda} \Vdash \check{f}|_{\kappa \setminus \lambda} \leq \check{g}|_{\kappa \setminus \lambda}$, luego $(p|_{\kappa \setminus \lambda}, f|_{\kappa \setminus \lambda}) \leq (q|_{\kappa \setminus \lambda}, g|_{\kappa \setminus \lambda})$.

Así pues, $i(p, f) \leq i(q, g)$. La implicación contraria se demuestra de forma similar. Por lo tanto, todo filtro \mathbb{R} -genérico K puede identificarse con un producto $K_\lambda \times K^\lambda$, de modo que $K_\lambda = K \cap \mathbb{R}_\lambda$ es \mathbb{R}_λ -genérico sobre M , K^λ es \mathbb{R}^λ -genérico sobre $M[K_\lambda]$ y $M[K] = M[K_\lambda][K^\lambda]$.

Ahora probamos un teorema auxiliar:

Teorema 17.6 *Sean θ y λ ordinales^M que verifiquen $\bigwedge \delta < \lambda \delta + \nu \leq \lambda$ y $\mu < \theta \leq \lambda \leq \theta + \nu < \kappa$, sea $p \in \mathbb{P}^\theta$ y $F = \{f_\alpha\}_{\alpha < \gamma} \in M[K_\lambda]$, con $\gamma < \mu$, una sucesión en \mathbb{Q}^θ de modo que $\{(p, f_\alpha)\}_{\alpha < \gamma}$ sea decreciente en \mathbb{R}^θ . Entonces existe $g \in \mathbb{Q}^\theta$ tal que $\bigwedge \alpha < \gamma (p, g) \leq (p, f_\alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 17.3 se cumple que $F \in M[G_\lambda]$. También es claro que $\mathbb{R}^\theta \in M[K_\theta]$ se encuentra —como c.p.o.— en $M[G_\theta] \subset M[G_\lambda]$. Sean $\tau, \leq_\pi \in M^{\mathbb{P}^\lambda}$ de modo que $F = \tau_{G_\lambda}$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}^\lambda} \Vdash \leq_\pi$ es el preorden de $\check{\mathbb{R}}^\theta$. Podemos tomar $p' \in G_\lambda$ tal que

$$p' \Vdash \tau : \check{\gamma} \longrightarrow \check{\mathbb{Q}}^\theta \wedge \bigwedge \alpha \beta (\alpha < \beta < \check{\gamma} \rightarrow (\check{p}, \tau(\beta)) \leq_\pi (\check{p}, \tau(\alpha))).$$

Sea g la función cuyo dominio es la unión de los dominios de todas las funciones $f \in \mathbb{Q}^\theta$ tales que

$$\neg p' \Vdash \bigwedge \alpha < \check{\gamma} \tau(\alpha) \neq \check{f}$$

y definida mediante

$$g(\beta) = p' \wedge \bigvee_{f, \alpha} (f(\beta) \wedge \|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\|),$$

donde α recorre los ordinales $\alpha < \gamma$ y f recorre las funciones de \mathbb{Q}^θ con β en su dominio. Veamos que $g \in \mathbb{Q}^\theta$. Es claro que $g \in M$.

Como \mathbb{B} cumple (en M) la c.c. $\nu^+ \leq \mu$ y $\gamma < \mu = \text{cf } \mu$, tenemos que

$$|\{f \in \mathbb{Q}^\theta \mid \bigvee \alpha < \gamma \|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \neq \emptyset\}|^M < \mu,$$

pues las condiciones $\|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\|$ para un mismo α forman una anticadena en \mathbb{B} . Si $\neg p' \Vdash \bigwedge \alpha < \check{\gamma} \tau(\alpha) \neq \check{f}$, entonces existe $q \leq p'$ y $\alpha < \gamma$ de modo que $q \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{f}$, luego $\|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \neq \emptyset$. Así pues, el dominio de g es la unión de los dominios de un conjunto de funciones $f \in \mathbb{Q}^\theta$ de cardinal $< \mu$, luego el dominio de g tiene cardinal $< \mu$ y, en consecuencia, $|g|^M < \mu$.

Por otra parte, si $f \in \mathbb{Q}^\theta$ y $\theta \leq \beta < \kappa$, como $\tau \in M^{\mathbb{P}^\lambda}$, tenemos que¹

$$\|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \in \mathbb{B}_\lambda \subset \mathbb{B}_{\theta+\nu} \subset \mathbb{B}_{\beta+\nu},$$

¹En este punto se requiere que la definición de \mathbb{Q} exija $f(\beta) \in \mathbb{B}_{\beta+\nu}$ en lugar de $f(\beta) \in \mathbb{B}_\beta$. De lo contrario en la hipótesis del teorema deberíamos exigir $\lambda \leq \theta$, y luego veremos que no sería suficiente para nuestros fines.

luego si β está en el dominio de g se cumple que $g(\beta) \in \mathbb{B}_{\beta+\nu}$, lo que prueba que $g \in \mathbb{Q}^\theta$.

Vamos a probar que g cumple el teorema. Como $p' \in G_\lambda$, basta probar que

$$p' \Vdash \bigwedge \alpha < \check{\gamma} (\check{p}, \check{g}) \leq_\pi (\check{p}, \tau(\alpha)).$$

Supongamos lo contrario. Entonces existen $f \in \mathbb{Q}^\theta$, $\alpha < \gamma$ y $\beta < \kappa$ tales que

$$p' \wedge p \wedge \|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \wedge (g(\beta) + f(\beta)) \neq \Phi, \quad (17.1)$$

donde la suma es la dada por (7.1).

En efecto, existe un filtro genérico G'_λ tal que $p' \in G'_\lambda$ y existe un $\alpha < \gamma$ tal que en $M[G'_\lambda]$ se cumple $(p, g) \not\leq (p, \tau_{G'_\lambda}(\alpha))$. Llamemos $f = \tau_{G'_\lambda}(\alpha) \in \mathbb{Q}^\theta$. En particular $\neg p' \cup p \Vdash \check{g} \leq \check{f}$, luego existe un filtro \mathbb{P}^λ -genérico G'^λ sobre $M[G'_\lambda]$ tal que $p \in G'^\lambda$ y, llamando $G' = G'_\lambda \times G'^\lambda$, en $M[G']$ se cumple que $g \not\leq f$, es decir, $f_{G'} \not\leq g_{G'}$.

Es claro que el dominio de f está contenido en el de g , luego ha de existir un β en el dominio de ambas de modo que $f(\beta) \in G'$ y $g(\beta) \notin G'$ o viceversa, pero esto es tanto como decir que $g(\beta) + f(\beta) \in G'$ y, en definitiva, tenemos que $p' \wedge p \wedge \|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \wedge (g(\beta) + f(\beta)) \in G'$, luego no es nulo.

Desarrollando (17.1) tenemos que

$$p \wedge ((p' \wedge \|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \wedge g(\beta)) + (p' \wedge \|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \wedge f(\beta))) \neq \Phi,$$

pero el segundo sumando es menor o igual que $g(\beta)$ y, por consiguiente, menor o igual que el primero. La suma es entonces el ínfimo del primero y el complementario del segundo, con lo que

$$p \wedge p' \wedge \|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \wedge g(\beta) \wedge f(\beta)' \neq \Phi.$$

Por definición de $g(\beta)$ existen $\alpha' < \gamma$ y $f' \in \mathbb{Q}^\theta$ tales que

$$q = p \wedge p' \wedge \|\tau(\check{\alpha}) = \check{f}\| \wedge \|\tau(\alpha') = \check{f}'\| \wedge f'(\beta) \wedge f(\beta)' \neq \Phi.$$

Si $G' = G'_\lambda \times G'^\lambda$ es ahora un filtro genérico que contenga a q , tenemos que $\tau_{G'_\lambda}(\alpha) = f$ y $\tau_{G'_\lambda}(\alpha') = f'$, luego $(p, f) \leq (p, f')$ o bien $(p, f') \leq (p, f)$ (por la elección de p'). Como $p \in G'_\lambda$, esto implica que $f_{G'}$ y $f'_{G'}$ están uno contenido en el otro, luego $f_{G'}(\beta) = f'_{G'}(\beta)$, pero entonces $f(\beta) \wedge f(\beta)' \notin G'$, contradicción. ■

El c.p.o. \mathbb{R} está diseñado esencialmente para que cumpla la propiedad siguiente:

Teorema 17.7 *Sea ξ un cardinal inaccesible^M tal que $\mu < \xi < \kappa$, sea γ un ordinal límite tal que $\text{cf } \gamma > \nu$ y consideremos $t : \gamma \rightarrow M$ tal que $t \in M[K]$ y $\bigwedge \alpha < \gamma t|_\alpha \in M[K_\xi]$. Entonces $t \in M[K_\xi]$.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $M[K] = M[K_\xi][K^\xi]$. Vamos a trabajar en $M[K_\xi]$. Sea $t = \tau_{K^\xi}$ y sea $(p, f) \in K^\xi$ tal que

$$(p, f) \Vdash \tau : \check{\gamma} \longrightarrow L \wedge \bigwedge \alpha < \check{\gamma} \tau|_\alpha \in L[\check{K}_\xi].$$

La primera parte de la demostración consiste en probar que existe $(q, g) \in \mathbb{R}^\xi$ tal que $(q, g) \leq (p, f)$ y

$$\begin{aligned} \bigwedge \alpha < \gamma \bigwedge p' \leq q \bigwedge f' \in \mathbb{Q}^\xi \bigwedge x \in M[K_\xi] (g \subset f' \wedge (p', f') \Vdash \tau|_\alpha = \check{x}) \\ \rightarrow (q, f') \Vdash \tau|_\alpha = \check{x}. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que ninguna extensión $(q, g) \leq (p, f)$ cumple (17.2). Veamos entonces que para toda condición $(q, g) \leq (p, f)$ y para todo $\delta < \gamma$ existen $p_1, p_2 \leq q, f' \in \mathbb{Q}^\xi$ tal que $g \subset f', x_1, x_2 \in M[K_\xi]$ y $\delta < \alpha < \gamma$ de modo que $x_1 \neq x_2$ y $(p_i, f') \Vdash \tau|_\alpha = \check{x}_i$, para $i = 1, 2$.

En efecto, por la negación de (17.2) existen $\alpha_0 < \gamma, p'_1 \leq q, f_0 \in \mathbb{Q}^\xi, g \subset f_0$ y $x'_1 \in M[K_\xi]$ de modo que $(p'_1, f_0) \Vdash \tau|_{\alpha_0} = \check{x}'_1$ pero $\neg(q, f_0) \Vdash \tau|_{\alpha_0} = \check{x}'_1$. Por consiguiente, existe $x'_2 \in M[K_\xi], x'_2 \neq x'_1$ y $(p'_2, f_1) \leq (q, f_0)$ de modo que $(p'_2, f_1) \Vdash \tau|_{\alpha_0} = \check{x}'_2$. Podemos suponer que $f_0 \subset f_1$. Sea $\alpha_0 \cup \delta < \alpha < \gamma$. Existen $x_1 \in M[K_\xi]$ y $(p_1, f_2) \leq (p'_1, f_1)$ tales que $x'_1 \subset x_1$ y $(p_1, f_2) \Vdash \tau|_\alpha = \check{x}_1$. Podemos suponer que $f_1 \subset f_2$. Similarmente, podemos tomar $x_2 \in M[K_\xi]$ y $(p_2, f') \leq (p'_2, f_2)$ tales que $x'_2 \subset x_2$ y $(p_2, f') \Vdash \tau|_\alpha = \check{x}_2$. En particular $x_1 \neq x_2$ y se cumple lo pedido.

Vamos a construir (siempre en $M[K_\xi]$) un ν^+ -árbol ramificado A , formado por pares $z = (S_z, x_z)$, junto con una sucesión $\{\delta_\alpha\}_{\alpha < \nu^+}$ estrictamente creciente en γ y una sucesión $\{f_\alpha\}_{\alpha < \nu^+}$ en \mathbb{Q}^ξ tal que $\{(p, f_\alpha)\}_{\alpha < \nu^+}$ sea decreciente en \mathbb{R}^ξ (y además $(p, f_\alpha) \leq (p, f)$), de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

- Si $z \in A$, entonces $S_z \subset \mathbb{P}^\xi, S_z \neq \emptyset$ y, para cada $\alpha < \nu^+$, la unión de todos los conjuntos S_z con $z \in \text{Niv}_\alpha A$ es una anticadena maximal en $\{q \in \mathbb{P}^\xi \mid q \leq p\}$.
- Si $z \in \text{Niv}_\alpha A$, entonces $x_z \in M[K_\xi]$ y, para cada $q \in S_z$, se cumple que $(q, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}_z$.
- Si $z \neq z'$, entonces $x_z \neq x_{z'}$.
- Si $z \in \text{Niv}_\alpha A, z' \in \text{Niv}_\beta A$ y $\alpha \leq \beta$, entonces $z \leq z' \leftrightarrow x_{z'}|_\alpha = x_z$.

Antes de dar la construcción vamos a ver que de ella se sigue la contradicción que prueba (17.2). Observemos en primer lugar que

$$\bigwedge z z' \in A \bigwedge q q' (z \perp z' \wedge q \in S_z \wedge q' \in S_{z'} \rightarrow q \perp q'). \quad (17.3)$$

En efecto, digamos que $\text{alt}_A z = \alpha \leq \beta = \text{alt}_A z'$. Sea $z'' \leq z'$ tal que $\text{alt}_A z'' = \alpha$. Por b) y d) tenemos que $(q', f_\beta) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}_{z''}$. Como $z'' \neq z$, la propiedad b) implica que $(q, f_\alpha) \perp (q', f_\beta)$. Por hipótesis $(p, f_\beta) \leq (p, f_\alpha)$, y es

claro que si $r \in \mathbb{P}^\xi$ fuera una extensión común de q y q' (en particular $r \leq p$) entonces (r, f_β) sería una extensión común de (q, f_α) y (q', f_β) .

Se cumple que $R = \{z \in A \mid S_z \cap G^\xi \neq \emptyset\} \in M[K_\xi][G^\xi]$ es un camino en A , pues por a) tenemos que R contiene un elemento de cada altura $\alpha < \nu^+$, el cual es único por (17.3). Por b) y d) tenemos que R está totalmente ordenado.

Como A está ramificado, contiene una anticadena (en $M[K_\xi][G^\xi]$) de cardinal ν^+ y, eligiendo un elemento de cada conjunto S_z para z en la anticadena, obtenemos —usando otra vez (17.3)— una anticadena en \mathbb{P}^ξ de cardinal ν^+ .

Ahora bien, por definición, $\mathbb{P}^\xi = \text{Fn}(\kappa \setminus \xi, 2, \nu)^M$, pero también se cumple que $\mathbb{P}^\xi = \text{Fn}(\kappa \setminus \xi, 2, \nu)^{M[K_\xi]}$, pues toda q en este último c.p.o. está en $M[G_\xi]$ por 17.3 y —de hecho— en M porque \mathbb{P}_ξ es ν -cerrado^M. Por el mismo motivo $|q|^M < \nu$. Esto hace que \mathbb{P}^ξ sea ν -cerrado en $M[K_\xi]$, luego también se cumple que $\mathbb{P}^\xi = \text{Fn}(\kappa \setminus \xi, 2, \nu)^{M[K_\xi][G^\xi]}$.

Estos mismos hechos hacen que $(2^{<\nu})^{M[K_\xi][G^\xi]} = (2^{<\nu})^M = \nu$, luego \mathbb{P}^ξ cumple la c.c. ν^+ en $M[K_\xi][G^\xi]$, luego no puede existir la anticadena que hemos encontrado.

Pasamos a la construcción de A , $\{f_\alpha\}_{\alpha < \nu^+}$ y $\{\delta_\alpha\}_{\alpha < \nu^+}$. Simultáneamente construiremos un buen orden R en A . Supongamos definido el subárbol A_α de los elementos de A de altura menor que α junto con $\{f_\beta\}_{\beta < \alpha}$, $\{\delta_\beta\}_{\beta < \alpha}$ y el buen orden R_α en A_α .

Sea $z_0 \in A_\alpha$ el menor elemento de A_α respecto a R_α que no se ramifica o un elemento cualquiera si todos lo hacen. Aplicamos el teorema anterior con $\theta = \lambda = \xi$ a la sucesión $\{f_\beta\}_{\beta < \alpha}$, con lo que obtenemos una función $g \in \mathbb{Q}^\xi$ de manera que $\bigwedge \beta < \alpha (p, g) \leq (p, f_\beta)$ (si $\alpha = 0$ sirve $g = f$). Fijemos $q \in S_{z_0}$. Tenemos que

$$(q, g) \leq (p, g) \leq (p, f_\beta) \leq (p, f).$$

Por la conclusión que hemos extraído de la negación de (17.2), existe un $\delta_\alpha < \gamma$, $\delta_\alpha > \bigcup_{\beta < \alpha} \delta_\beta$ (aquí usamos que cf $\gamma > \mu$), dos condiciones $p_1, p_2 \leq q$, una función $f' \supset g$ y dos funciones $x_1, x_2 \in M[K_\xi]$, $x_1 \neq x_2$ de modo que

$$(p_i, f') \Vdash \tau|_{\check{\delta}_\alpha} = \check{x}_i, \quad i = 1, 2. \quad (17.4)$$

Sea $\sigma \in M[K_\xi]^{\mathbb{P}^\xi}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}^\xi} \Vdash \sigma = \{g \in \check{\mathbb{Q}}^\xi \mid \forall x \in L[\check{K}_\xi] \forall q \in \Gamma^\xi (q, g) \Vdash \check{\tau}|_{\check{\delta}_\alpha} = \check{x}\},$$

de modo que

$$\sigma_{G^\xi} = \{g \in \mathbb{Q}^\xi \mid \forall x \in M[K_\xi] \forall q \in G^\xi (q, g) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}\} \in M[K_\xi][G^\xi].$$

Entonces $p \Vdash \sigma$ es abierto denso bajo \check{f} . En efecto, si $p \in G^\xi$ y en $M[K_\xi][G^\xi]$ tomamos $h \leq f$ (en el sentido de que $f_G \subset h_G$, donde $G = G_\xi \times G^\xi$), sea H^ξ un filtro genérico sobre $M[K_\xi][G^\xi]$ tal que $(p, h) \in K^\xi = G^\xi \times H^\xi$. Así, si $K = K_\xi \times K^\xi$, se cumple que $\tau_{K^\xi}|_{\delta_\alpha} = x \in M[K_\xi]$ (porque lo fuerza (p, f)).

Existe $(q, g) \in K^\xi$ tal que $(q, g) \leq (p, h)$ y $(q, g) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}$, con lo que $g \in \sigma_{G^\xi}$ y $g \leq h$. Esto prueba que σ_{G^ξ} es denso bajo f . La prueba de que es abierto es similar.

Ahora observamos que la prueba de 17.2 se adapta para \mathbb{P}^ξ y \mathbb{Q}^ξ en lugar de \mathbb{P} y \mathbb{Q} y nos da una función $f_\alpha \in \mathbb{Q}^\xi$ tal que $f' \subset f_\alpha$ y $p \Vdash \check{f}_\alpha \in \sigma$.

En efecto, la construcción de la sucesión $\{(p_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha < \delta}$ se hace ahora en $M[K_\xi]$. Hemos visto antes que \mathbb{P}^ξ cumple la c.c. ν^+ en $M[K_\xi]$ y la función f' construida en 17.2 está en principio en $M[K_\xi]$, pero como $|f'|^{M[K_\xi]} < \nu$, el teorema 17.3 nos da que $f' \in M[G_\xi]$ y $|f'|^{M[G_\xi]} < \nu$. Usando ahora que \mathbb{P}_ξ es ν -cerrado concluimos que $f' \in M$, por lo que $f' \in \mathbb{Q}^\xi$. Igualmente se justifica que la función g allí construida está en M y, por consiguiente, en \mathbb{Q}^ξ .

Veamos ahora que el conjunto

$$D = \{r \in \mathbb{P}^\xi \mid \exists x \in M[K_\xi] (r, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}\} \in M[K_\xi]$$

es denso bajo p . En efecto, si $q \leq p$, tomamos un filtro genérico G^ξ tal que $q \in G^\xi$, con lo que $f_\alpha \in \sigma_{G^\xi}$, luego existe un $x \in M[K_\xi]$ y un $r \in G^\xi$ (que podemos tomar $r \leq q$) de manera que $(r, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}$. Así $r \in D$.

Sea \hat{S} una anticadena maximal en D , que es también una anticadena maximal del conjunto $\{q \in \mathbb{P}^\xi \mid q \leq p\}$. Para cada $q \in \hat{S}$ existe un único $x \in M[K_\xi]$ tal que $(q, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}$. Dividimos \hat{S} en clases de equivalencia, de modo que dos condiciones están en la misma clase si les corresponde el mismo x . Definimos $\text{Niv}_\alpha A$ como el conjunto de pares (S, x) , donde S es una clase de equivalencia de \hat{S} y para todo $q \in S$ se cumple que $(q, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}$. Con esto tenemos garantizadas las propiedades a), b) y c). Ahora vamos a extender el orden de A de modo que se cumpla d).

Tomemos $z \in \text{Niv}_\alpha A$ y $\beta < \alpha$. Sea $q \in S_z$ y sea G^ξ un filtro genérico que contenga a q . Entonces existe $z' \in \text{Niv}_\beta A$ tal que $G^\xi \cap S_{z'} \neq \emptyset$. Sea $r \in G^\xi$ tal que $r \leq q$ y $r \leq q' \in G^\xi \cap S_{z'}$. Entonces $(r, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\delta_\beta} = \check{x}_z|_{\delta_\beta}$ y $(r, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\delta_\beta} = \check{x}_{z'}$ (pues $(r, f_\alpha) \leq (q', f_\beta)$). Por consiguiente $x_z|_{\delta_\beta} = x_{z'}$. Es claro que z' es único, es decir, existe un único $z' \in A_\alpha$ de altura β tal que $x_z|_{\delta_\beta} = x_{z'}$. Extendemos el orden de A_α de modo que z esté por encima de estos z' (para cada $\beta < \alpha$). Esto convierte a $A_{\alpha+1}$ en un árbol en el que el conjunto que hemos definido como $\text{Niv}_\alpha A$ es ciertamente el nivel de altura α y se cumple d).

Más aún, al tomar la anticadena \hat{S} podemos exigir que contenga a las condiciones p_1 y p_2 de (17.4), de modo que también se cumple $(p_i, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\delta_\alpha} = \check{x}_i$, y así $\text{Niv}_\alpha A$ contiene dos condiciones incompatibles por encima de la condición z_0 que hemos tomado al principio de la construcción (pues si $\text{alt}_A z_0 = \beta$, entonces $(p_i, f_\alpha) \leq (q, f_\beta)$, luego $x_{z_0} \subset x_i$).

Finalmente, extendemos arbitrariamente el buen orden R_α a $A_{\alpha+1}$ de modo que los puntos añadidos sean posteriores a los de A_α . De este modo obtenemos un árbol $A = A_{\nu^+}$ cuyos niveles tienen cardinal $< \nu^+$ por la propiedad a) y cuya altura es obviamente ν^+ . Además está ramificado, pues si $z \in \text{Niv}_\alpha A$, tiene

bajo sí (respecto del buen orden R) una cantidad $\leq \nu$ de elementos, luego la construcción hace que z se ramifique a lo más tardar en el nivel $\alpha + \nu < \nu^+$.

Con esto termina la prueba de (17.2). Pasemos a probar el enunciado. Supongamos que $t \notin M[K_\xi]$. Entonces podemos suponer que $(p, f) \Vdash \tau \notin L[\check{K}_\xi]$. Cambiando (p, f) por la extensión que cumple (17.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \wedge \alpha < \gamma \wedge p' \leq p \wedge f' \in \mathbb{Q}^\xi \wedge x \in M[K_\xi] (f \subset f' \wedge (p', f') \Vdash \tau|_{\check{\alpha}} = \check{x}) \\ \rightarrow (p, f') \Vdash \tau|_{\check{\alpha}} = \check{x}. \end{aligned}$$

Esto nos permite construir en $M[K_\xi]$ sucesiones

$$\{f_s\}_{s \in < \nu_2} \subset \mathbb{Q}^\xi, \quad \{x_s\}_{s \in < \nu_2} \subset M[K_\xi], \quad \{\alpha_s\}_{s \in < \nu_2} \subset \gamma,$$

tales que:

- Si $\alpha < \beta < \nu$ y $s \in \beta_2$, entonces $(p, f_s) \leq (p, f_{s|\alpha})$ y $x_{s|\alpha} \subset x_s$,
- Si $s \in \alpha_2$, entonces $(p, f_{s \smallfrown i}) \Vdash \tau|_{\check{\alpha}_s} = \check{x}_{s \smallfrown i}$, $i = 0, 1$, y $x_{s \smallfrown 0} \neq x_{s \smallfrown 1}$.
- Si $s \in \lambda_2$, $\lambda < \nu$, entonces $x_s = \bigcup_{\delta < \lambda} x_{s|\delta}$ y f_s viene dado por el teorema anterior con $\theta = \lambda = \xi$.

Partimos de $f_\emptyset = f$. Únicamente hemos de justificar que, dado $s \in \alpha_2$, es posible conseguir b). Para todo ordinal $\alpha < \gamma$ es claro que existe un $x \in M[K_\xi]$ y una condición $(p', f) \leq (p, f_s)$ tal que $(p', f) \Vdash \tau|_{\check{\alpha}} = \check{x}$. Podemos suponer que $f_s \subset f$ y, por lo que hemos probado antes, de hecho $(p, f) \Vdash \tau|_{\check{\alpha}} = \check{x}$. Si no se cumple b) con $\check{\alpha}_s = \alpha$ es porque hay un único x que cumple esto. Tenemos, pues, que para cada $\alpha < \gamma$ existe un único $x_\alpha \in M[K_\xi]$ y una única $f_\alpha \in \mathbb{Q}^\xi$, $f \subset f_\alpha$, de modo que $(p, f_\alpha) \Vdash \tau|_{\check{\alpha}} = \check{x}_\alpha$.

Llamando $x = \bigcup_{\alpha < \gamma} x_\alpha \in M[K_\xi]$, es claro que $(p, f) \Vdash \tau = \check{x} \in L[\check{K}_\xi]$, contradicción.

Llamemos $a = \bigcup_{q \in G_{\xi+\nu}} q \setminus \bigcup_{q \in G_\xi} q \in M[K_{\xi+\nu}]$. Es claro que $a : (\xi + \nu) \setminus \xi \rightarrow 2$

(es un fragmento de la función genérica determinada por G). Definamos ahora $\bar{a} : \nu \rightarrow 2$ mediante $\bar{a}(\alpha) = a(\xi + \alpha)$. Así, $\{f_{\bar{a}|\delta}\}_{\delta < \nu} \in M[K_{\xi+\nu}]$. Podemos aplicar el teorema anterior con $\theta = \xi$, $\lambda = \xi + \nu$, lo que nos da una función $f' \in \mathbb{Q}^\xi$ tal que $\bigwedge \delta < \nu (p, f') \leq (p, f_{\bar{a}|\delta})$. Como cf $\gamma > \nu$, se cumple que $\alpha = \bigcup_{\delta < \nu} \alpha_{\bar{a}|\delta} < \gamma$. Sea $x = \bigcup_{\delta < \nu} x_{\bar{a}|\delta} \in M[K_{\xi+\nu}]$.

De este modo tenemos que $(p, f') \Vdash \tau|_{\check{\alpha}_{\bar{a}|\delta}} = \check{x}_{\bar{a}|\delta+1}$, para todo $\delta < \nu$. Si K'^ξ es un filtro genérico que contiene a (p, f') se cumplirá que $\tau_{K'^\xi}|_{\check{\alpha}_{\bar{a}|\delta}} = x_{\bar{a}|\delta+1}$, luego $\tau_{K'^\xi} = x$. Ahora bien, como $(p, f) \Vdash \tau|_{\check{\alpha}} \in L[\check{K}_\xi]$, resulta que $x \in M[K_\xi]$.

Ahora bien, a partir de x y $\{x_s\}_{s \in < \nu_2}$ (ambos en $M[K_\xi]$) se puede reconstruir la función \bar{a} , luego $\bar{a} \in M[K_\xi]$, y también $a \in M[K_\xi]$, lo cual es imposible por un argumento típico de genericidad. ■

A partir de aquí vamos a cambiar ligeramente la notación. En lo que sigue \mathbb{B} ya no será la completación de \mathbb{P} , sino la completación de \mathbb{R} . Como \mathbb{R} cumple

la c.c. κ y todo elemento de \mathbb{B} es supremo de una anticadena en \mathbb{R} , resulta que $|\mathbb{B}|^M = \kappa$, luego podemos suponer que, como conjunto, $\mathbb{B} = \kappa$. Sea $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ la inmersión densa. Para cada $\alpha < \kappa$, llamaremos \mathbb{B}_α a la subálgebra completa de \mathbb{B} generada por $i[\mathbb{R}_\alpha]$. Si ξ es un cardinal $\mu < \xi < \kappa$, entonces \mathbb{R}_ξ está completamente contenido en \mathbb{R} , luego \mathbb{B}_ξ es (isomorfa a) la completación de \mathbb{R}_ξ . En particular $i[\mathbb{R}_\xi]$ es denso en \mathbb{B}_ξ .

Si ξ es inaccesible M , entonces $\mathbb{B}_\xi = \bigcup_{\alpha < \xi} \mathbb{B}_\alpha$, pues \mathbb{R}_ξ cumple la c.c. ξ , luego todo elemento de \mathbb{B}_ξ es el supremo de una anticadena de cardinal $< \xi$, que está contenida en un \mathbb{B}_α .

Veamos que existe un conjunto $C_1 \in M$ c.n.a. en κ formado por cardinales límite tal que si $\xi \in C_1$ es inaccesible M entonces $\mathbb{B}_\xi = \xi$.

En efecto, basta considerar el conjunto de los cardinales límite cerrados para las aplicaciones $p, q : \kappa \rightarrow \kappa$ dadas por

$$p(\alpha) = \min\{\beta < \kappa \mid \mathbb{B}_\alpha \subset \beta\}, \quad q(\alpha) = \min\{\beta < \kappa \mid \alpha \in \mathbb{B}_\beta\}.$$

A partir de aquí suponemos que κ es débilmente compacto M y que existe un κ -árbol de Aronszajn M . Llamémoslo A . Como $|A|^M = \kappa$, podemos suponer que, como conjunto, $A = \kappa$. Sea \leq un \mathbb{R} -nombre para el orden de A y sea $b \in K$ tal que $b \Vdash (\check{\kappa}, \leq)$ es un $\check{\kappa}$ -árbol de Aronszajn.

Sea A_α el conjunto de los elementos de A de altura $< \alpha$. Como $|A_\alpha|^{M[K]} < \kappa$, podemos definir $p : \kappa \rightarrow \kappa$ mediante $p(\alpha) = \min\{\beta < \kappa \mid A_\alpha \subset \beta\}$ y así, si $p[\lambda] \subset \lambda$ se cumple que $A_\lambda \subset \lambda$. Sea $\sigma \in M^{\mathbb{R}}$ tal que

$$b \Vdash \sigma = \{\lambda < \check{\kappa} \mid A_\lambda \subset \lambda\}.$$

Es claro que $b \Vdash \sigma$ es c.n.a. en $\check{\kappa}$. Veamos ahora que

$$C_2 = \{\lambda < \kappa \mid b \Vdash \check{\lambda} \in \sigma\}$$

es c.n.a. en κ .

Es claro que C_2 es cerrado. Para probar que es acotado tomamos $\alpha < \kappa$. Para cada $p \leq b$ existen $q_p \in \mathbb{R}$ y $\beta_p < \kappa$ tales que $q_p \Vdash \check{\beta}_p$ es el mínimo ordinal en σ mayor que $\check{\alpha}$. Si $\beta_p \neq \beta_{p'}$, entonces $p \perp p'$ y, como \mathbb{R} cumple la c.c. κ , el conjunto $\{\beta_p \mid p \leq b\}$ tiene cardinal $^M < \kappa$. Por consiguiente existe un $\alpha_1 < \kappa$ mayor que todos sus elementos. Claramente $q_p \Vdash \check{\beta} \in \sigma(\check{\alpha} < \beta \leq \check{\alpha}_1)$. Por consiguiente, $b \Vdash \check{\beta} \in \sigma(\check{\alpha} < \beta \leq \check{\alpha}_1)$.

Repetiendo el proceso podemos construir $\{\alpha_n\}_{n < \omega} \in M$ tal que $\alpha_0 = \alpha$ y $b \Vdash \check{\beta} \in \sigma(\check{\alpha}_n < \beta \leq \check{\alpha}_{n+1})$. Llamando $\lambda = \bigcup_{n < \omega} \alpha_n$ concluimos que $b \Vdash \check{\lambda} \in \sigma$, luego $\alpha < \lambda \in C_2$.

Podemos tomar una sucesión de \mathbb{R} -nombres $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha < \kappa} \in M$ de modo que $b \Vdash \sigma_\alpha = A_{\check{\alpha}}$. Así, si $\beta < \kappa$, se cumple que

$$\beta \in A_\alpha \leftrightarrow \bigvee p \in K \ p \Vdash \check{\beta} \in \sigma_\alpha.$$

Si $\beta \in A_\alpha$, existe un cardinal inaccesible M $\xi_\beta < \kappa$ tal que

$$\bigvee p \in K_{\xi_\beta} \ p \Vdash \check{\beta} \in \sigma_\alpha.$$

Como $\{\xi_\beta\}_{\beta \in A_\alpha} \in M[K]$, existe $\xi < \kappa$ inaccesible^M mayor que todos los ξ_β , y entonces

$$A_\alpha = \{\beta < \kappa \mid \forall p \in K_\xi \ p \Vdash \check{\beta} \in \sigma_\alpha\} \in M[K_\xi].$$

Para cada $q \leq b$ existe un $r_q \leq q$ y un ξ_q inaccesible^M de modo que

$$r_q \Vdash \check{\xi}_q \text{ es el m\u00ednimo } \xi \text{ inaccesible}^L \text{ tal que } A_{\check{\alpha}} \in L[\Gamma_\xi].$$

Si $\xi_q \neq \xi_{q'}$ ha de ser $q \perp q'$, luego el cardinal^M del conjunto de los ξ_q es menor que κ , luego existe un $\xi < \kappa$ inaccesible^M mayor que todos ellos. Es claro entonces que $r_q \Vdash A_{\check{\alpha}} \in L[\Gamma_\xi]$. Por lo tanto $b \Vdash A_{\check{\alpha}} \in L[\Gamma_\xi]$.

As\u00ed hemos probado que para cada $\alpha < \kappa$ existe un cardinal^M $\xi_\alpha < \kappa$ tal que $b \Vdash A_{\check{\alpha}} \in L[\Gamma_{\xi_\alpha}]$. Podemos suponer que $\{\xi_\alpha\}_{\alpha < \kappa} \in M$ es normal (para lo cual hemos de suprimir la condici\u00f3n de que ξ_α sea inaccesible^M). De este modo, el conjunto

$$C_3 = \{\alpha < \kappa \mid \alpha = \xi_\alpha\}$$

es c.n.a. en κ . Si $\xi \in C_3$, entonces para todo $\alpha < \xi$ se cumple que $b \Vdash A_{\check{\alpha}} \in L[\Gamma_\xi]$.

En realidad, lo que hemos hecho con A_α lo podemos hacer a la vez con A_α y con la restricci\u00f3n de \leq_A a A_α , con lo que al escribir $A_\alpha \in M[K_\xi]$ podemos entender que nos referimos a A_α como \u00e1rbol y no s\u00f3lo como conjunto.

Finalmente, sea $T : \kappa \times \kappa \rightarrow \mathbb{B}$ dada por $T(\beta, \beta') = b \wedge \|\beta <_A \beta'\|$ y sea

$$C_4 = \{\alpha < \kappa \mid b < \alpha \wedge T[\alpha \times \alpha] \subset \alpha\}.$$

Sea C la intersecci\u00f3n de los cuatro conjuntos cerrados no acotados que hemos definido. As\u00ed $C \in M$ es c.n.a. en κ , sus elementos son cardinales l\u00edmite y si $\xi \in C$ es un cardinal inaccesible^M entonces $b \in \mathbb{B}_\xi = \xi$, $T[\xi \times \xi] \subset \mathbb{B}_\xi$, $b \Vdash A_{\check{\xi}} \subset \check{\xi}$ y para todo $\alpha < \xi$ se cumple que $b \Vdash A_{\check{\alpha}} \in L[\Gamma_\xi]$.

Llegaremos a una contradicci\u00f3n usando que los cardinales d\u00e9bilmente compactos son Π_1^1 -indescriptibles. El teorema siguiente nos indica c\u00f3mo aprovechar este hecho:

Teorema 17.8 *Sea \mathbb{B} un \u00e1lgebra de Boole completa de cardinal κ y con la condici\u00f3n de cadena κ , sean $\leq_A \in V^{\mathbb{B}}$ y $b \in \mathbb{B}$ tales que $b \Vdash (\check{\kappa}, \leq)$ es un $\check{\kappa}$ -\u00e1rbol. Sea $T : \kappa \times \kappa \rightarrow \mathbb{B}$ la aplicaci\u00f3n dada por $T(\beta, \beta') = b \wedge \|\beta <_A \beta'\|$. Entonces*

$$b \Vdash (\check{\kappa}, \leq_A) \text{ no tiene caminos} \leftrightarrow \bigwedge g \bigwedge p \leq b (\phi(g, p) \rightarrow \psi(g, p)),$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(g, p) &\equiv g : \kappa \times \kappa \rightarrow \kappa \wedge \bigwedge \alpha < \kappa \bigwedge q \leq p \bigvee r \leq q \bigvee \beta < \kappa \\ &\quad (q \neq \mathbb{0} \rightarrow \mathbb{0} \neq r \leq g(\alpha, \beta)), \\ \psi(g, p) &\equiv \bigwedge q \leq p \bigvee r \leq q \bigvee \alpha \alpha' \beta \beta' < \kappa (q \neq \mathbb{0} \rightarrow \\ &\quad \alpha < \alpha' \wedge (g(\alpha, \beta) \wedge g(\alpha', \beta') \wedge T(\beta, \beta')) \geq r \neq \mathbb{0}). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Probaremos el teorema relativizado a un modelo M . Supongamos que $b \Vdash (\check{\kappa}, \leq_A)$ no tiene caminos y que $g, p \leq b$ cumplen $\phi(g, p)$.

Sea $q \in \mathbb{B}$, $q \neq \mathbb{0}$, $q \leq p$ y sea K un ultrafiltro \mathbb{B} -genérico sobre M que contenga a q . Así, el conjunto $D = \{r \in \mathbb{B} \mid \forall \beta < \kappa (\mathbb{0} \neq r \leq g(\alpha, \beta))\}$ es denso bajo p , luego existe $r \in D \cap K$, luego existe un $\beta < \kappa$ tal que $g(\alpha, \beta) \in K$.

Sea $g'(\alpha) = \min\{\beta < \kappa \mid g(\alpha, \beta) \in K\}$. Así $g' : \kappa \rightarrow \kappa$, $g' \in M[K]$. Como (κ, \leq_{AK}) no tiene caminos, existen $\alpha < \alpha' < \kappa$ tales que $g'(\alpha) <_{AK} g'(\alpha')$, de modo que si llamamos $\beta = g'(\alpha)$ y $\beta' = g'(\alpha')$ se cumple $T(\beta, \beta')' \in K$. Por consiguiente $r = q \wedge g(\alpha, \beta) \wedge g(\alpha', \beta') \wedge T(\beta, \beta')' \in K$, luego es no nulo y cumple $\psi(g, p)$.

Supongamos ahora que se cumple la condición del enunciado pero que b no fuerza que $(\check{\kappa}, \leq_A)$ no tiene caminos. Entonces existe un $p \leq b$ tal que $p \Vdash (\check{\kappa}, \leq_A)$ tiene un camino. Sea $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $p \Vdash \tau : \check{\kappa} \rightarrow \check{\kappa}$ es un camino en $(\check{\kappa}, \leq_A)$. Definimos $g(\alpha, \beta) = \|\tau(\check{\alpha}) = \check{\beta}\|$. Veamos que se cumple $\phi(g, p)$. Si $\alpha < \kappa$ y $q \leq p$, entonces $q \Vdash \tau : \check{\kappa} \rightarrow \check{\kappa}$, luego existen $r \leq q$ y $\beta < \kappa$ tales que $r \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{\beta}$. Claramente $\mathbb{0} \neq r \leq g(\alpha, \beta)$.

Por hipótesis se cumple también $\phi(g, p)$. Sea K un ultrafiltro genérico tal que $p \in K$. El conjunto

$$\{r \in \mathbb{B} \mid \forall \alpha \alpha' \beta \beta' < \kappa (\alpha < \alpha' \wedge (g(\alpha, \beta) \wedge g(\alpha', \beta') \wedge T(\beta, \beta')') \geq r \neq \mathbb{0})\}$$

es denso bajo p , luego corta a K , luego existen $\alpha, \alpha', \beta, \beta' < \kappa$ tales que $\alpha < \alpha'$ y $g(\alpha, \beta) \wedge g(\alpha', \beta') \wedge Y(\beta, \beta')' \in K$, luego $\tau_K(\alpha) = \beta$, $\tau_K(\alpha') = \beta'$ y $\neg \beta <_{AK} \beta'$, en contradicción con que τ_K es un camino. ■

De este modo, volviendo a la situación previa al teorema, el hecho de que $b \Vdash (\check{\kappa}, \leq_A)$ no tiene caminos equivale (en M) a que

$$(V_{\check{\kappa}}, \mathbb{B}, T, \{b\}) \models \bigwedge g \bigwedge p \leq b (\phi(g, p) \rightarrow \psi(g, p)),$$

donde g es una variable de segundo orden y \mathbb{B} representa a las operaciones de \mathbb{B} . Como κ es Π_1^1 -indecible ^{M} , el teorema 12.21 nos da un conjunto estacionario $E \in M$ de cardinales inaccesibles ^{M} que reflejan la sentencia anterior. Tomamos concretamente $\xi \in E \cap C$ de modo que (en M)

$$(V_{\xi}, \mathbb{B}_{\xi}, T|_{\xi \times \xi}, \{b\}) \models \bigwedge g \bigwedge p \leq b (\phi(g, p) \rightarrow \psi(g, p)). \quad (17.5)$$

Como (κ, \leq_{AK}) es un κ -árbol ^{$M[K]$} , existe $g \in M[K]$ tal que $g : \xi \rightarrow A_{\xi}$ es la restricción de una rama de altura $\geq \xi$. Ahora bien, si $\alpha < \xi$, entonces $g(\alpha) \in A_{\alpha} \in M[K_{\xi}]$, luego $g|_{\alpha} \in M[K_{\xi}]$ (pues $g|_{\alpha}$ está determinado por $g(\alpha)$ y el orden de A_{α}). Por 17.7 (notemos que podemos suponer $\xi > \mu$) se cumple que $g \in M[K_{\xi}]$. El mismo argumento empleado en la prueba del teorema 17.8 muestra que g contradice (17.5). ■

17.2 Extensiones iteradas

La mayoría de las extensiones genéricas que vamos a necesitar más adelante serán extensiones iteradas. Dedicamos esta sección a profundizar en la teoría

cuyas bases expusimos en el capítulo IX. Empezamos con un teorema que nos da ciertas condiciones para que la condición de cadena κ se conserve en un paso al límite:

Teorema 17.9 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ una iteración de preórdenes y $\kappa \leq \alpha$ un cardinal regular no numerable. Supongamos que \mathbb{P}_κ es límite directo y que existe un conjunto estacionario $E \subset \kappa$ formado por ordinales límite y de modo que para cada $\delta \in E$ el conjunto \mathbb{P}_δ sea límite directo. Entonces, si $\bigwedge \delta < \kappa \mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c. κ , también la cumple \mathbb{P}_κ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea C una anticadena maximal en \mathbb{P}_κ y consideremos el conjunto $D = \{p \in \mathbb{P}_\kappa \mid \forall q \in C p \leq q\}$, denso en \mathbb{P}_κ . Sea $\delta < \kappa$ y sea $C_\delta = \{p|_\delta \mid p \in C\}$. Sea $\overline{D}_\delta = \{p \in \mathbb{P}_\delta \mid \forall q \in C_\delta p \leq q\}$, denso en \mathbb{P}_δ . Sea M_δ una anticadena maximal en \overline{D}_δ . Sea $Z_\delta \subset C_\delta$ formado por un elemento sobre cada elemento de M_δ . Así, $|Z_\delta| \leq |M_\delta| < \kappa$. Sea $D_\delta = \{p \in \mathbb{P}_\delta \mid \forall q \in Z_\delta p \leq q\}$, denso en \mathbb{P}_δ . Sea $\overline{C}_\delta \subset C$ tal que $Z_\delta = \{c|_\delta \mid c \in \overline{C}_\delta\}$ y $|\overline{C}_\delta| < \kappa$. Sea $\eta_\delta < \kappa$ tal que todo elemento de \overline{C}_δ tiene su soporte en η_δ .

Consideremos la aplicación $f : \kappa \rightarrow \kappa$ dada por $f(\delta) = \eta_\delta$. El conjunto $\{\alpha < \kappa \mid f[\alpha] \subset \alpha\}$ es c.n.a. en κ , luego existe un $\gamma \in E$ tal que $f[\gamma] \subset \gamma$, es decir, tal que $\bigwedge \delta < \gamma \eta_\delta < \gamma$. Veamos que los soportes de los elementos de C están todos en γ , con lo que $|C| = |C_\gamma| < \kappa$.

Sea $c \in C$. Entonces $c|_\gamma \in \mathbb{P}_\gamma$, límite directo, luego existe un $\delta < \gamma$ tal que $\text{sop } c|_\gamma \subset \delta$. Tenemos que $D_\delta = \{p \in \mathbb{P}_\delta \mid \forall q \in \overline{C}_\delta p \leq q|_\delta\}$ es denso en \mathbb{P}_δ , luego podemos tomar $q \in \overline{C}_\delta$ tal que $q|_\delta$ sea compatible con $c|_\delta$. Entonces $\text{sop } q \subset \eta_\delta \subset \gamma$.

Así pues, $\text{sop } c|_\gamma \subset \delta$ y $\neg c|_\delta \perp q|_\delta$, luego $\neg c|_\gamma \perp q|_\gamma$ (teorema 9.14 f). Como además $\text{sop } q \subset \gamma$, concluimos igualmente que $\neg c \perp q$. Por último, $c, q \in C$, luego ha de ser $c = q$ y, por consiguiente, $\text{sop } c \subset \gamma$. ■

En el capítulo IX no vimos resultados sobre la propiedad de ser κ -cerrado análogos a los que vimos para la condición de cadena κ . Ahora necesitaremos estos resultados, pero respecto a una propiedad más general:

Definición 17.10 Sea \mathbb{P} un c.p.o. y $D \subset \mathbb{P}$. Diremos que D es un subconjunto dirigido si $\bigwedge dd' \in D \vee e \in D (e \leq d \wedge e \leq d')$.

Si κ es un cardinal infinito, diremos que \mathbb{P} es fuertemente κ -cerrado si para todo subconjunto dirigido D de \mathbb{P} con $|D| < \kappa$ existe una condición $p \in \mathbb{P}$ tal que $\bigwedge d \in D p \leq d$.

Es obvio que todo c.p.o. fuertemente κ -cerrado es κ -cerrado.

Teorema 17.11 *Sea κ un cardinal, \mathbb{P} un c.p.o. fuertemente κ -cerrado y π un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ es fuertemente κ -cerrado. Entonces $\mathbb{P} * \pi$ es fuertemente κ -cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Conviene probar un resultado ligeramente más general (que usaremos después en 17.13): Bajo las hipótesis del teorema, si

$$D = \{(p_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$$

es un conjunto dirigido en $\mathbb{P} * \pi$ con $\lambda < \kappa$ y $p \in \mathbb{P}$ cumple que $\bigwedge \alpha < \lambda p \leq p_\alpha$, entonces existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $\bigwedge d \in D (p, \sigma) \leq d$.

Esto prueba ciertamente el teorema, pues claramente $D_1 = \{p_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ es un conjunto dirigido en \mathbb{P} , luego existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\bigwedge \alpha < \lambda p \leq p_\alpha$.

Por el teorema de reflexión 1.27, basta probar la relativización del resultado a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea $\delta = \{(\sigma_\alpha, \mathbf{1}) \mid \alpha < \lambda\} \in M^{\mathbb{P}}$ y vamos a probar que

$$p \Vdash \delta \text{ es un subconjunto dirigido de } \pi \wedge |\delta| < \check{\kappa}.$$

Para ello sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M tal que $p \in G$. Entonces $\delta_G = \{\sigma_{\alpha G} \mid \alpha < \lambda\} \subset \pi_G$. Dados $\sigma_{\alpha G}, \sigma_{\beta G} \in \delta_G$, como D es dirigido, existe un $\gamma < \lambda$ tal que $(p_\gamma, \sigma_\gamma) \leq (p_\alpha, \sigma_\alpha)$ y $(p_\gamma, \sigma_\gamma) \leq (p_\beta, \sigma_\beta)$.

Tenemos que $p_\gamma \Vdash \sigma_\gamma \leq_\pi \sigma_\alpha$ y $p_\gamma \Vdash \sigma_\gamma \leq_\pi \sigma_\beta$, luego p fuerza lo mismo y, por consiguiente, $\sigma_{\gamma G} \leq \sigma_{\alpha G}$ y $\sigma_{\gamma G} \leq \sigma_{\beta G}$. Esto prueba que δ_G es dirigido ^{$M[G]$} .

Por otra parte, $\{(p.o.(\check{\alpha}, \sigma_\alpha), \mathbf{1}) \mid \alpha < \lambda\} \in M^{\mathbb{P}}$ nombra a una aplicación suprayectiva de λ en δ_G , luego $|\delta_G|^{M[G]} < \kappa$.

En consecuencia, $p \Vdash \bigvee q \in \pi \bigwedge x \in \delta q \leq_\pi x$. Por 9.3 existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \bigwedge x \in \delta \sigma \leq_\pi x$. En particular $p \Vdash \sigma \leq_\pi \sigma_\alpha$ para todo $\alpha \leq \lambda$, con lo que el par $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi$ cumple $\bigwedge d \in D (p, \sigma) \leq d$. ■

Ahora probamos un resultado análogo al teorema 17.9.

Teorema 17.12 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ una iteración de preórdenes, sea κ un cardinal y $\lambda < \alpha$ un ordinal límite tal que $\text{cf } \lambda \geq \kappa$, \mathbb{P}_λ es límite directo y $\bigwedge \delta < \lambda P_\delta$ es fuertemente κ -cerrado. Entonces \mathbb{P}_λ es fuertemente κ -cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $D \subset \mathbb{P}_\lambda$ un conjunto dirigido con $|D| < \kappa$. Si $d \in D$ existe un $\gamma_d < \lambda$ tal que $\text{sop } d \subset \gamma_d$. Como $|D| < \text{cf } \lambda$, existe un $\gamma < \lambda$ tal que $\bigwedge d \in D \gamma_d < \gamma$, o sea, $\bigwedge d \in D \text{sop } d \subset \gamma$. Sea $D' = \{d|_\gamma \mid d \in D\}$. Es claro que D' es un conjunto dirigido en \mathbb{P}_γ , luego existe una condición $p \in \mathbb{P}_\gamma$ tal que $\bigwedge d \in D p \leq d|_\gamma$, luego $\bigwedge d \in D (i_{\gamma\lambda}(p) \leq i_{\gamma\lambda}(d|_\gamma) = d)$. Esto prueba que \mathbb{P}_λ es fuertemente κ -cerrado. ■

El siguiente resultado es análogo a 9.17:

Teorema 17.13 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ una iteración de preórdenes, sea κ un cardinal tal que para todo $\delta < \alpha$ se cumpla que $\mathbf{1} \Vdash \pi_\delta$ es fuertemente $\check{\kappa}$ -cerrado. Supongamos que para cada $\lambda \leq \alpha$ con $\text{cf } \lambda < \kappa$ se cumple que \mathbb{P}_λ es límite inverso. Entonces cada \mathbb{P}_δ es fuertemente κ -cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre δ . Claramente $\mathbb{P}_0 = \{\mathbf{1}\}$ es fuertemente κ -cerrado. Si \mathbb{P}_δ es fuertemente κ -cerrado, entonces $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$ es fuertemente κ -cerrado por 17.11.

Supongamos que \mathbb{P}_δ es fuertemente κ -cerrado para todo $\delta < \lambda$. Si \mathbb{P}_λ es límite directo, entonces ha de ser $\text{cf } \lambda \geq \kappa$ y concluimos que \mathbb{P}_λ es fuertemente κ -cerrado por el teorema anterior. Supongamos, pues, que \mathbb{P}_λ es límite inverso.

Sea $D = \{p_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ un conjunto dirigido en \mathbb{P}_λ con $\gamma < \kappa$. Vamos a construir una sucesión $\{q_\delta\}_{\delta \leq \lambda}$, creciente respecto a la inclusión, tal que cada $q_\delta \in P_\delta$ y $q_\delta \leq p_\alpha \upharpoonright \delta$, para todo $\alpha < \gamma$.

Tomamos $q_0 = \mathbf{1} \in \mathbb{P}_0$. Definidos $\{q_\delta\}_{\delta \leq \beta}$, para $\beta < \lambda$, observamos que $D' = \{p_\alpha \upharpoonright_{\beta+1} \mid \alpha < \gamma\}$ es un conjunto dirigido en el c.p.o. $\mathbb{P}_{\beta+1} \cong \mathbb{P}_\beta * \pi_\beta$ y $|D'| < \kappa$. A través de la semejanza, D' se corresponde con el conjunto

$$\{(p_\alpha \upharpoonright_\beta, p_\alpha(\beta)) \mid \alpha < \gamma\}.$$

Por hipótesis de inducción $\bigwedge \alpha < \lambda \ q_\beta \leq p_\alpha \upharpoonright_\beta$, luego podemos usar el resultado probado en la demostración de 17.11, según el cual existe un nombre $\tau \in \hat{\pi}_\beta$ tal que

$$\bigwedge \alpha < \gamma \ (q_\beta, \tau) \leq (p_\alpha \upharpoonright_\beta, p_\alpha(\beta)).$$

Equivalentemente, existe una extensión $q_{\beta+1}$ de q_β a $\mathbb{P}_{\beta+1}$ de manera que $q_{\beta+1} \leq p_\alpha \upharpoonright_{\beta+1}$ para todo $\alpha < \gamma$.

Podemos exigir que si $\bigwedge \alpha < \gamma \ p_\alpha(\beta) = \mathbf{1}$, entonces $q_{\beta+1}(\beta) = \mathbf{1}$.

Supongamos definidos $\{q_\delta\}_{\delta < \beta}$, donde $\beta < \lambda$ es un ordinal límite. Definimos $q_\beta = \bigcup_{\delta < \beta} q_\delta$. Si \mathbb{P}_β es un límite inverso es claro que $q_\beta \in \mathbb{P}_\beta$. Si es límite directo, por hipótesis cf $\beta \geq \kappa > \gamma$, luego existe un $\delta < \beta$ tal que $\text{sop } p_\alpha \upharpoonright_\beta \subset \delta$, para todo $\alpha < \gamma$. Esto significa que $p_\alpha(\epsilon) = \mathbf{1}$ para $\delta \leq \epsilon < \beta$ y todo $\alpha < \gamma$, y entonces, por construcción, $q_\beta(\epsilon) = \mathbf{1}$. Por consiguiente $\text{sop } q_\beta \subset \alpha$, luego en cualquier caso $q_\beta \in \mathbb{P}_\beta$. También es claro que cumple lo pedido.

De este modo llegamos a una condición q_λ que extiende a todas las condiciones de D . ■

El próximo teorema afirma que, bajo ciertas hipótesis, un c.p.o. $\mathbb{P}_{\alpha+\beta}$ de una iteración puede descomponerse en un producto $\mathbb{P}_\alpha * \pi_\beta^\alpha$, para un cierto \mathbb{P}_α -nombre π_β^α . La construcción de este nombre requiere ciertas definiciones técnicas encaminadas a relacionar los nombres de un mismo objeto en distintos c.p.o.s. Más concretamente, si $G * H$ es un filtro $\mathbb{P} * \pi$ -genérico sobre un modelo M , entonces $M[G * H] = M[G][H]$, luego todo conjunto en $M[G * H]$ tiene un $\mathbb{P} * \pi$ -nombre en M y un π_G nombre en $M[G]$, el cual a su vez tiene un \mathbb{P} -nombre en M . Lo primero que haremos será construir un \mathbb{P} -nombre en M para un π_G -nombre en $M[G]$ para un conjunto del que conocemos un $\mathbb{P} * \pi$ -nombre, y viceversa.

Definición 17.14 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea \mathbb{P} un c.p.o. en M y $\pi \in M^\mathbb{P}$ un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. Para cada $\tau \in M^{\mathbb{P} * \pi}$ definimos

$$\tau^* = \{(p.o.(\sigma^*, \rho), \tau) \mid (\sigma, (r, \rho)) \in \tau\} \in M^\mathbb{P}.$$

Es fácil comprobar que entonces $\mathbb{1}_\mathbb{P} \Vdash (\tau^* \text{ es un } \pi\text{-nombre})$ y si $G * H$ es un filtro $\mathbb{P} * \pi$ -genérico sobre M , entonces $\tau_G^* \in M[G]^{\pi_G}$ y $(\tau_G^*)_H = \tau_{G * H}$.

Sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} * \pi$ la inmersión completa $i(p) = (p, \mathbf{1})$, sea

$$\Gamma^* = \{(i(\tau), (p, \tau)) \mid (p, \tau) \in \mathbb{P} * \pi\} \in M^{\mathbb{P} * \pi}.$$

(Notemos que $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, $i(\tau) \in M^{\mathbb{P}*\pi}$). Es fácil ver que $\Gamma_{G*H}^* = H$. Por lo tanto $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash \Gamma^*$ es un filtro en $i(\pi)$.

Si $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \tau$ es un π -nombre, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash i(\tau)$ es un $i(\pi)$ -nombre, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash \bigvee x x = i(\tau)_{\Gamma^*}$, luego existe un $\overset{\circ}{\tau} \in M^{\mathbb{P}*\pi}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash \overset{\circ}{\tau} = i(\tau)_{\Gamma^*}$.

Así tenemos definidas dos correspondencias opuestas entre \mathbb{P} -nombres de π -nombres y $\mathbb{P} * \pi$ -nombres de modo que

$$(\tau_G^*)_H = \tau_{G*H} \quad \text{y} \quad \overset{\circ}{\tau}_{G*H} = (\tau_G)_H. \quad (17.6)$$

Notemos que la definición de $\overset{\circ}{\tau}$ involucra una elección arbitraria, pero en la práctica esta elección es irrelevante, pues dos elecciones distintas dan lugar a nombres equivalentes en el sentido de que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash \overset{\circ}{\tau} = \overset{\circ}{\tau}'$.

Así mismo, de las relaciones (17.6) se sigue que si aplicamos a un nombre τ la composición de las dos correspondencias obtenemos un nombre equivalente al de partida.

Otro problema que aparece al tratar con iteraciones es que los c.p.o.s no son antisimétricos, lo que hace que una cantidad imprevisible de condiciones puedan contener la misma información, por lo que dos c.p.o.s “equivalentes” en el sentido de producir las mismas extensiones, pueden no ser semejantes. Esto se resuelve identificando las condiciones del modo siguiente:

Definición 17.15 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y \mathbb{P} un c.p.o. en M . Diremos que dos condiciones $p, p' \in \mathbb{P}$ son *equivalentes*, y lo representaremos por $p \sim p'$, si $p \leq p' \wedge p' \leq p$.

Claramente se trata de una relación de equivalencia. Llamaremos $\overline{\mathbb{P}} \in M$ al conjunto cociente, que está parcialmente ordenado por la relación dada por $[p] \leq [q] \leftrightarrow p \leq q$.

La aplicación $i : \mathbb{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{P}}$ dada por $i(p) = [p]$ es una inmersión densa, luego ambos c.p.o.s dan las mismas extensiones. Más concretamente, si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $G' = \{[p] \mid p \in G\}$ es $\overline{\mathbb{P}}$ -genérico sobre M y si G es $\overline{\mathbb{P}}$ -genérico sobre M entonces $G' = \{p \in \mathbb{P} \mid [p] \in G\}$ es \mathbb{P} -genérico sobre M . Además $G'' = G$.

Así mismo, si $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $\tau' = i(\tau) = \{(\sigma', [p]) \mid (\sigma, p) \in \tau\} \in M^{\overline{\mathbb{P}}}$ y si $\tau \in M^{\overline{\mathbb{P}}}$, entonces $\tau' = \{(\sigma', p) \mid (\sigma, [p]) \in \tau\} \in M^{\mathbb{P}}$, de modo que $\tau_G = \tau'_{G'}$ (para las dos definiciones).

Es claro que las condiciones p y $[p]$ fuerzan las mismas fórmulas, intercambiando los \mathbb{P} -nombres con los $\overline{\mathbb{P}}$ -nombres.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el teorema de factorización:

Teorema 17.16 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y en M sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ una iteración de preórdenes. Sea $\beta \leq \alpha$ y $\alpha = \beta + \gamma$. Supongamos (siempre en M) que si $\lambda \leq \gamma$ y $\text{cf } \lambda \leq |\mathbb{P}_\beta|$, entonces $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ es límite inverso. Entonces existe $(\{\pi_\delta^\beta\}_{\delta \leq \gamma}, \{\rho_\delta^\beta\}_{\delta < \gamma}) \in M$ tal que:

- a) $\pi_\delta^\beta, \rho_\delta^\beta \in M^{\mathbb{P}_\beta}$.
- b) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\{\pi_\delta^\beta\}_{\delta \leq \check{\gamma}}, \{\rho_\delta^\beta\}_{\delta < \check{\gamma}})$ es una iteración de preórdenes
- c) Para todo $\delta \leq \gamma$ existe $\phi_\delta : \overline{\mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta} \longrightarrow \overline{\mathbb{P}_{\beta+\delta}}$ semejanza.
- d) $\rho_\delta^\beta = \pi_{\beta+\delta}^*$.
- e) Para cada $\lambda \leq \gamma$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi_\lambda^\beta$ es límite directo o inverso según lo sea $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$.

En este enunciado hay algunos abusos de notación que debemos advertir:

Para enunciar b) correctamente deberíamos definir

$$\pi^\beta = \{(\text{p.o.}(\check{\delta}, \pi_\delta^\beta), \mathbb{1}) \mid \delta \leq \gamma\}, \quad \rho^\beta = \{(\text{p.o.}(\check{\delta}, \rho_\delta^\beta), \mathbb{1}) \mid \delta < \gamma\},$$

de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\pi^\beta, \rho^\beta)$ son sucesiones de dominio $\check{\gamma} + 1$ y $\check{\gamma}$, respectivamente), y para todo δ ,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi^\beta(\check{\delta}) = \pi_\delta^\beta, \quad \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \rho^\beta(\check{\delta}) = \rho_\delta^\beta.$$

En estos términos, b) afirma que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\pi^\beta, \rho^\beta)$ es una iteración de preórdenes. Más delicado es d). En principio $\pi_{\beta+\delta}$ es un $\mathbb{P}_{\beta+\delta}$ -nombre, pero podemos formar $\pi'_{\beta+\delta} \in M^{\overline{\mathbb{P}_{\beta+\delta}}}$, usar la aplicación de c) para obtener $\phi_\delta^{-1}(\pi'_{\beta+\delta}) \in M^{\overline{\mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta}}$, de aquí a su vez $\phi_\delta^{-1}(\pi'_{\beta+\delta})' \in M^{\mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta}$ y por último $\phi_\delta^{-1}(\pi'_{\beta+\delta})'^* \in M^{\mathbb{P}_\beta}$. Lo que afirma d) es que $\rho_\delta^\beta = \phi_\delta^{-1}(\pi'_{\beta+\delta})'^*$.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos además que existe $f_\delta : \mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta \longrightarrow \mathbb{P}_{\beta+\delta}$ tal que ϕ_δ viene dada por $\phi_\delta([p]) = [f_\delta(p)]$. Razonamos por inducción sobre $\delta \leq \gamma$.

Claramente $\pi_0^\beta = \{(\emptyset, \mathbb{1})\}$ (es decir, el nombre canónico de $\{\emptyset\}$) cumple lo pedido con la aplicación f_0 definida de forma obvia.

Supongamos contruidos $(\{\pi_\delta^\beta\}_{\delta \leq \epsilon}, \{\rho_\delta^\beta\}_{\delta < \epsilon})$ para todo $\epsilon < \eta$, junto con las aplicaciones f_δ .

Si η es un límite tomamos $\pi_\eta^\beta \in M^{\mathbb{P}_\beta}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi_\eta^\beta \text{ es el límite (dir./inv.) de } \{\pi_\delta^\beta\}_{\delta < \eta}.$$

(Consideramos límite directo o inverso según lo sea $\mathbb{P}_{\beta+\eta}$.) De este modo tenemos definido $(\{\pi_\delta^\beta\}_{\delta \leq \eta}, \{\rho_\delta^\beta\}_{\delta < \eta})$.

Si $\eta = \delta + 1$ tenemos definida ϕ_δ y podemos definir ρ_δ^β según d). Con ello tenemos que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \rho_\delta^\beta \text{ es un } \pi_\delta^\beta\text{-nombre para un c.p.o.}$$

En efecto, si G es un filtro \mathbb{P}_β -genérico sobre M y H es un filtro $(\pi_\delta^\beta)_G$ -genérico sobre $M[G]$, entonces $G * H$ es un filtro $\mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta$ -genérico sobre M

y $K = \phi_\delta[(G * H)']$ es un filtro $\mathbb{P}_{\beta+\delta}$ -genérico sobre M . Es fácil ver que $((\rho_\delta^\beta)_G)_H = (\pi_{\beta+\delta})_K$, luego es un c.p.o. en $M[G][H]$, luego

$$(\mathbb{1}_{(\pi_\delta^\beta)_G} \Vdash (\rho_\delta^\beta)_G \text{ es un c.p.o.})^{M[G]}$$

y, por consiguiente,

$$((\rho_\delta^\beta)_G \text{ es un } (\pi_\delta^\beta)_G\text{-nombre para un c.p.o.})^{M[G]}.$$

Tomamos $\pi_\eta^\beta \in M^{\mathbb{P}_\beta}$ de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\{\pi_\delta^\beta\}_{\delta \leq \eta}, \{\rho_\delta^\beta\}_{\delta < \eta})$ es una iteración de preórdenes.

Ahora basta comprobar que en ambos casos (η límite o sucesor) existe la aplicación $f_\eta : \mathbb{P}_\beta * \pi_\eta^\beta \rightarrow \mathbb{P}_{\beta+\eta}$ y cumple el teorema.

Construimos f_η como sigue: Sea $(p, \sigma) \in \mathbb{P}_\beta * \pi_\eta^\beta$. Entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma \in \pi_\eta^\beta$. Para cada $\delta < \eta$ sea $\tau_\delta \in M^{\mathbb{P}_\beta}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \tau_\delta = \sigma(\delta)$. En particular

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\tau_\delta \text{ es un } \pi_\delta^\beta\text{-nombre} \wedge \mathbb{1}_{\pi_\delta^\beta} \Vdash \tau_\delta \in \rho_\delta^\beta). \quad (17.7)$$

Por consiguiente está definido $\overset{\circ}{\tau}_\delta \in M^{\mathbb{P}_{\beta+\delta}}$. Sea $p_{\beta+\delta} = \phi_\delta((\overset{\circ}{\tau}_\delta)') \in M^{\mathbb{P}_{\beta+\delta}}$. Definimos

$$f_\eta(p, \sigma)|_\beta = p \quad \wedge \quad \bigwedge \delta < \eta \ f_\eta(p, \sigma)(\beta + \delta) = p_{\beta+\delta}.$$

Veamos que, en efecto, $f_\eta(p, \sigma) \in \mathbb{P}_{\beta+\eta}$. Para ello comprobamos por inducción sobre $\delta \leq \eta$ que $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \in \mathbb{P}_{\beta+\delta}$.

Ciertamente, $f_\eta(p, \sigma)|_\beta = p \in \mathbb{P}_\beta$.

Si $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \in \mathbb{P}_{\beta+\delta}$, hemos de comprobar que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p_{\beta+\delta} \in \pi_{\beta+\delta}$. En realidad debe cumplirse que $p_{\beta+\delta} \in \hat{\pi}_{\beta+\delta}$, pero si $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p_{\beta+\delta} \in \pi_{\beta+\delta}$ entonces podemos sustituir $p_{\beta+\delta}$ por un nombre equivalente en $\hat{\pi}_{\beta+\delta}$.

Si K es un filtro $\mathbb{P}_{\beta+\delta}$ -genérico sobre M , sea $G * H = \phi_\delta^{-1}[K']$, que es un filtro $\mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta$ -genérico sobre M . Por construcción $(p_{\beta+\delta})_K = ((\tau_\delta)_G)_H$ y $((\rho_\delta^\beta)_G)_H = (\pi_{\beta+\delta})_K$. Por (17.7) se cumple que $\mathbb{1}_{(\pi_\delta^\beta)_G} \Vdash (\tau_\delta)_G \in (\rho_\delta^\beta)_G$, luego $((\tau_\delta)_G)_H \in ((\rho_\delta^\beta)_G)_H$, es decir, $(p_{\beta+\delta})_K \in (\pi_{\beta+\delta})_K$.

Supongamos ahora que $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \in \mathbb{P}_{\beta+\delta}$ para todo $\delta < \lambda \leq \eta$. Si $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ es límite inverso entonces claramente $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\lambda} \in \mathbb{P}_{\beta+\lambda}$. Supongamos que el límite es directo. Por hipótesis (en M) cf $\lambda > |\mathbb{P}_\beta|$. Además, por construcción, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi_\lambda^\beta$ es límite directo. Por otra parte $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma \in \pi_\eta^\beta$, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma|_\lambda \in \pi_\lambda^\beta$, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \bigvee \gamma < \check{\lambda} \bigwedge \delta < \check{\gamma} (\gamma \leq \delta \rightarrow \sigma(\delta) = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta})$.

Para cada $q \in \mathbb{P}_\beta$ existen una condición $r_q \leq q$ y un ordinal $\gamma_q < \lambda$ tales que $r_q \Vdash \bigwedge \delta < \check{\lambda} (\check{\gamma}_q \leq \delta \rightarrow \sigma(\delta) = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta})$. Podemos exigir que las sucesiones $\{r_q\}_{q \in \mathbb{P}_\beta}$ y $\{\gamma_q\}_{q \in \mathbb{P}_\beta}$ estén en M . Por la hipótesis sobre la cofinalidad de λ podemos afirmar que $\gamma = \bigcup_{q \in \mathbb{P}_\beta} \gamma_q < \lambda$. Claramente, $r_q \Vdash \bigwedge \delta < \check{\lambda} (\check{\gamma} \leq \delta \rightarrow \sigma(\delta) = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta})$.

Como el conjunto $\{r_q \mid q \in \mathbb{P}_\beta\}$ es denso en \mathbb{P}_β , se podemos concluir que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \bigwedge \delta < \check{\lambda} (\check{\gamma} \leq \delta \rightarrow \sigma(\delta) = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta})$.

Ahora, si $\gamma < \delta < \lambda$ tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \tau_\delta = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta}$, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta} \Vdash \overset{\circ}{\tau}_\delta = \overset{\circ}{\mathbb{1}}_{\rho_\delta^\beta}$ y, tomando clases, aplicando ϕ_δ y eliminando clases, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p_{\beta+\delta} = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$.

En la definición de $p_{\beta+\delta}$ podemos exigir que si $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p_{\beta+\delta} = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$ entonces tomamos $p_{\beta+\delta} = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$. De este modo, esta igualdad se da para $\gamma \leq \delta < \lambda$, con lo que $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\lambda} \in \mathbb{P}_{\beta+\lambda}$.

Definimos $\bar{f}_\eta : \mathbb{P}_\beta * \pi_\eta^\beta \rightarrow \bar{\mathbb{P}}_{\beta+\eta}$ mediante $\bar{f}_\eta(p, \sigma) = [f_\eta(p, \sigma)]$. Notemos que \bar{f}_η es independiente de la elección de los nombres τ_δ y $\overset{\circ}{\tau}_\delta$, así como de la elección del elemento $p_{\beta+\delta} \in \hat{\pi}_{\beta+\delta}$ que finalmente tomamos, pues si τ_δ y τ'_δ son dos elecciones posibles, se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \tau_\delta = \tau'_\delta$, de donde se llega a que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p_{\beta+\delta} = p'_{\beta+\delta}$. A partir de aquí es fácil probar por inducción que $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \leq f'_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta}$ y $f'_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \leq f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta}$, con lo que, en definitiva, $[f_\eta(p, \sigma)] = [f'_\eta(p, \sigma)]$.

Ahora veamos que si $(p, \sigma) \leq (p', \sigma')$ entonces $f_\eta(p, \sigma) \leq f_\eta(p', \sigma')$. Para ello probamos por inducción que $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \leq f_\eta(p', \sigma')|_{\beta+\delta}$.

Para $\delta = 0$ tenemos que $f_\eta(p, \sigma)|_\beta = p \leq p' = f_\eta(p', \sigma')|_\beta$.

Supongamos que $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \leq f_\eta(p', \sigma')|_{\beta+\delta}$. Basta probar que

$$f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \Vdash p_{\beta+\delta} \leq p'_{\beta+\delta},$$

pues entonces $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta+1} \leq f_\eta(p', \sigma')|_{\beta+\delta+1}$.

Tenemos que $p \Vdash \sigma \leq \sigma'$, luego $p \Vdash \sigma|_{\check{\delta}+1} \leq \sigma'|_{\check{\delta}+1}$, con lo que

$$p \Vdash (\sigma|_{\check{\delta}} \Vdash \sigma(\check{\delta}) \leq \sigma'(\check{\delta})).$$

Sea $\sigma_0 \in M^{\mathbb{P}_\beta}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma_0 = \sigma|_{\check{\delta}}$. Puesto que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma \in \pi_\eta^\beta$, se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma_0 \in \pi_\delta^\beta$, luego podemos exigir que $\sigma_0 \in \hat{\pi}_\delta^\beta$.

Podemos suponer como hipótesis de inducción una fórmula que describa la construcción de las funciones f_δ , es decir, podemos suponer que f_δ ha sido construida igual que f_η . Entonces es inmediato que $f_\delta(p, \sigma_0) \sim f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta}$ (por inducción sobre $\epsilon \leq \delta$ se comprueba que $f_\delta(p, \sigma_0)|_{\beta+\epsilon} \sim f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\epsilon}$, lo cual es obvio, teniendo en cuenta que sirven los mismos τ_ϵ para ambas construcciones y, por consiguiente, los mismos $p_{\beta+\epsilon}$).

Tenemos que $p \Vdash (\sigma_0 \Vdash \tau_\delta \leq \tau'_\delta)$, luego $(p, \sigma_0) \Vdash \overset{\circ}{\tau}_\delta \leq \overset{\circ}{\tau}'_\delta$. Tomando clases, aplicando ϕ_δ y eliminando clases llegamos a que $f_\delta(p, \sigma_0) \Vdash p_{\beta+\delta} \leq p'_{\beta+\delta}$. Por la observación del párrafo anterior, $f_\eta(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \Vdash p_{\beta+\delta} \leq p'_{\beta+\delta}$.

El caso límite es trivial.

Veamos ahora que si $f_\eta(p, \sigma) \leq f_\eta(p', \sigma')$, entonces $(p, \sigma) \leq (p', \sigma')$.

Por una parte, $p = f_\eta(p, \sigma)|_\beta \leq f_\eta(p', \sigma')|_\beta = p'$. Falta ver que $p \Vdash \sigma \leq \sigma'$, para lo cual probaremos por inducción sobre δ que $p \Vdash \sigma|_{\check{\delta}} \leq \sigma'|_{\check{\delta}}$.

Para $\delta = 0$ es obvio. Supuesto que $p \Vdash \sigma|_{\check{\delta}} \leq \sigma'|_{\check{\delta}}$, hay que probar que

$$p \Vdash (\sigma|_{\check{\delta}} \Vdash \sigma(\check{\delta}) \leq \sigma'(\check{\delta})). \quad (17.8)$$

Como antes, sea $\sigma_0 \in \hat{\pi}_{\check{\delta}}^{\beta}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}} \Vdash \sigma_0 = \sigma|_{\check{\delta}}$. Tenemos igualmente que $f_{\delta}(p, \sigma_0) \sim f_{\eta}(p, \sigma)|_{\beta+\delta}$. Por hipótesis $f_{\eta}(p, \sigma)|_{\beta+\delta} \Vdash p_{\beta+\delta} \leq p'_{\beta+\delta}$, luego $f_{\delta}(p, \sigma_0) \Vdash p_{\beta+\delta} \leq p'_{\beta+\delta}$. Mediante ϕ_{δ} obtenemos que $(p, \sigma_0) \Vdash \tau_{\check{\delta}} \leq \tau'_{\check{\delta}}$, luego $p \Vdash (\sigma_0 \Vdash \tau_{\check{\delta}} \leq \tau'_{\check{\delta}})$, de donde se sigue (17.8). El caso límite es obvio.

En particular $(p, \sigma) \sim (p', \sigma')$ si y sólo si $f_{\eta}(p, \sigma) \sim f_{\eta}(p', \sigma')$, luego ϕ_{η} está bien definida y es una semejanza en su imagen. Sólo falta probar que es suprayectiva, para lo cual basta ver que lo es \bar{f}_{η} .

Tomemos $[q] \in \bar{\mathbb{P}}_{\beta+\eta}$. Sea $p = q|_{\beta} \in \mathbb{P}_{\beta}$. Sea $q_{\delta} = q(\beta + \delta) \in M^{\mathbb{P}_{\beta+\delta}}$ y llamemos $p_{\delta} = (\phi_{\delta}^{-1}(q'_{\delta}))' \in M^{\mathbb{P}_{\beta}}$. Tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash q_{\delta} \in \pi_{\beta+\delta}$, de donde se sigue que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}} \Vdash (\mathbb{1}_{\pi_{\delta}} \Vdash p_{\delta} \in \rho_{\delta}^{\beta})$. Podemos suponer que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}} \Vdash \tilde{p}_{\delta} \in \hat{\rho}_{\delta}^{\beta}$.

Sea $\sigma = \{(p.o.(\check{\delta}, p_{\delta}), \mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}}) \mid \delta < \eta\} \in M^{\mathbb{P}_{\beta}}$. Veamos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}} \Vdash \sigma \in \pi_{\eta}^{\beta}$, con lo que podremos sustituir σ por un nombre equivalente en $\hat{\pi}_{\eta}^{\beta}$ y tendremos $(p, \sigma) \in \mathbb{P}_{\beta} * \pi_{\eta}^{\beta}$.

Ciertamente $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}}$ fuerza que σ es una sucesión de dominio η , luego basta probar, por inducción sobre $\delta \leq \eta$, que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}} \Vdash \sigma|_{\check{\delta}} \in \pi_{\delta}^{\beta}$. La única parte no trivial de la inducción se da al suponerlo para todo $\delta < \lambda \leq \eta$, donde λ es un ordinal límite tal que $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ es límite directo. Por construcción tenemos entonces que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}} \Vdash \pi_{\lambda}^{\beta}$ es límite directo.

Como $q|_{\beta+\lambda} \in \mathbb{P}_{\beta+\lambda}$, existe un $\gamma < \lambda$ tal que si $\gamma \leq \delta < \lambda$ entonces se cumple que $q_{\delta} = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$. En particular $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash q_{\delta} = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$, de donde se llega a que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}} \Vdash (\mathbb{1}_{\pi_{\delta}} \Vdash p_{\delta} = \mathbb{1}_{\rho_{\delta}^{\beta}})$.

En la definición de p_{δ} podemos exigir que cuando ocurra esto tomamos $p_{\delta} = \mathbb{1}_{\rho_{\delta}^{\beta}}$. De este modo tenemos esta igualdad para $\gamma \leq \delta < \lambda$, de donde es fácil concluir que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta}} \Vdash \sigma|_{\check{\lambda}} \in \pi_{\lambda}^{\beta}$.

El teorema quedará probado si demostramos que $\bar{f}_{\eta}(p, \sigma) = [q]$. Ahora bien, para calcular $f_{\eta}(p, \sigma)$ podemos tomar $\tau_{\delta} = p_{\delta}$ y $\tau'_{\delta} = \phi_{\delta}^{-1}(q'_{\delta})'$, con lo que $p_{\beta+\delta} = q_{\delta}$ y $f_{\eta}(p, \sigma) = q$. ■

Conviene observar que de la demostración del teorema hemos visto que si $\phi_{\delta}([(p, \sigma)]) = [q]$, entonces $[p] = [q|_{\beta}]$.

En lo sucesivo identificaremos cada conjunto preordenado \mathbb{P} con el conjunto parcialmente ordenado $\bar{\mathbb{P}}$. En otras palabras, no distinguiremos entre condiciones equivalentes. Así, por ejemplo, la parte c) del teorema anterior la enunciamos diciendo que existe una semejanza $\phi_{\delta} : \mathbb{P}_{\beta} * \pi_{\delta}^{\beta} \rightarrow \mathbb{P}_{\beta+\delta}$ tal que (según la observación anterior) $\phi_{\delta}(p, \sigma)|_{\beta} = p$. Cualquier imprecisión que pueda provocar la adopción de este convenio se resuelve mediante las técnicas de la prueba anterior (distinguiendo entre nombres τ y τ' , etc.)

La última propiedad que necesitamos estudiar sobre extensiones iteradas es la casi-homogeneidad.

Teorema 17.17 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y en M sea $(\{P_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ una iteración de preórdenes. Supongamos que para todo $\delta < \alpha$ se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es casi homogéneo, así como que existe un término $t(\delta, x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L}_m tal que para todo $\delta < \alpha$ existen conjuntos $x_1, \dots, x_n \in M$ tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = t(\delta, \check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$. Entonces \mathbb{P}_α es casi homogéneo.*

(En realidad el c.p.o. casi homogéneo es $\overline{\mathbb{P}}_\alpha$ y hay que entender que existen términos como t para \leq_{π_δ} y $\mathbb{1}_{\pi_\delta}$.)

DEMOSTRACIÓN: Sea $p, q \in \mathbb{P}_\alpha$. Hemos de construir un $\sigma \in \text{Aut } \mathbb{P}_\alpha$ y un $r \in \mathbb{P}_\alpha$ tales que $r \leq \sigma(p)$ y $r \leq q$. Construiremos por recurrencia una sucesión de condiciones $r_\delta \in \mathbb{P}_\delta$ y automorfismos $\sigma_\delta \in \text{Aut } \mathbb{P}_\delta$ tales que si $\beta \leq \gamma \leq \delta$ y $u \in \mathbb{P}_\gamma$ se cumpla

- a) $\sigma_\gamma(u)|_\beta = \sigma_\beta(u|_\beta)$ y $\sigma_\delta(i_{\gamma\delta}(u)) = i_{\gamma\delta}(\sigma_\gamma(u))$,
- b) $r_\delta \leq \sigma_\delta(p|_\delta)$, $r_\delta \leq q|_\delta$, $r_\gamma|_\beta = r_\beta$ y si $p|_\gamma = i_{\beta\gamma}(p|_\beta)$, $q|_\gamma = i_{\beta\gamma}(q|_\beta)$, entonces también $r_\gamma = i_{\beta\gamma}(r|_\beta)$.

Para $\delta = 0$ basta tomar $r_0 = \mathbb{1}_{\mathbb{P}_0}$ y σ_0 la identidad.

Supongamos construidos r_δ y σ_δ . Como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = t(\check{\delta}, \check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$, se cumple también que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \sigma_\delta(\pi_\delta) = t(\check{\delta}, \check{x}_1, \dots, \check{x}_n)$, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \sigma_\delta(\pi_\delta) = \pi_\delta$.

Sean $\tau_1 = p(\delta)$ y $\tau_2 = q(\delta)$. Entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \tau_1, \tau_2 \in \pi_\delta$, luego existen $\phi, \tau_3 \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ tales que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \phi \in \text{Aut } \pi_\delta \wedge \tau_3 \in \pi_\delta \wedge \tau_3 \leq \phi(\tau_1) \wedge \tau_3 \leq \tau_2.$$

Si $\tau_1 = \tau_2 = \mathbb{1}_{\pi_\delta}$ podemos exigir que $\tau_3 = \mathbb{1}_{\pi_\delta}$ y que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \phi = \text{identidad}$.

Sea $r_{\delta+1}|_\delta = r_\delta$ y $r_{\delta+1}(\delta) = \tau_3$. Definimos $\sigma_{\delta+1} : \mathbb{P}_{\delta+1} \rightarrow \mathbb{P}_{\delta+1}$ mediante $\sigma_{\delta+1}(u)|_\delta = \sigma_\delta(u|_\delta)$, $\sigma_{\delta+1}(u)(\delta) = \rho \in \hat{\pi}_\delta$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \rho = \phi(u(\delta))$.

Es fácil ver que $r_{\delta+1}$ y $\phi_{\delta+1}$ cumplen lo pedido.

Construidos r_δ y σ_δ para todo $\delta < \lambda \leq \alpha$, definimos $r_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} r_\delta$ y, para cada $u \in \mathbb{P}_\lambda$ y cada $\delta < \lambda$,

$$\sigma_\lambda(u)(\delta) = \sigma_{\delta+1}(u|_{\delta+1})(\delta).$$

La condición b) garantiza que $r_\lambda, \sigma_\lambda(u) \in \mathbb{P}_\lambda$, y es fácil ver que cumplen lo pedido. ■

Terminamos la sección con un último resultado técnico que necesitaremos más adelante:

Teorema 17.18 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC. En M , sean κ y μ cardinales infinitos tales que $\kappa^{<\mu} = \kappa$. Sea \mathbb{P} un c.p.o. con la c.c. μ y $|\mathbb{P}| \leq \kappa$. Sea π un \mathbb{P} -nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash |\pi| \leq \check{\kappa}$. Entonces $|\mathbb{P} * \pi| \leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tau \in M$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \tau : \pi \rightarrow \check{\kappa}$ inyectiva. Sea $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi$. Entonces $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi$. Sea $A_\alpha^\sigma = \{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \tau(\sigma) = \check{\alpha}\}$. Sea $f_\sigma(\alpha)$ una anticadena maximal en A_α^σ . Así, $|f_\sigma(\alpha)| < \mu$, y si $\alpha \neq \beta$, los elementos

de A_α^σ son incompatibles con los de A_β^σ , por lo que la unión de los $f_\sigma(\alpha)$ sigue siendo una anticadena en \mathbb{P} , lo cual obliga a que $|\{\alpha < \kappa \mid f_\sigma(\alpha) \neq \emptyset\}| < \mu$.

Para cada $A \subset \kappa$ con $|A| < \mu$, el número de aplicaciones $f : \kappa \rightarrow \mathcal{P}^{<\mu}\mathbb{P}$ tales que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \neq \emptyset\} = A$ es a lo sumo κ , pues por hipótesis $|\mathcal{P}^{<\mu}\mathbb{P}| = \kappa$ y $\kappa^{|A|} = \kappa$. Así pues, hay κ posibilidades para las f_σ .

El teorema quedará probado si demostramos que la aplicación dada por $(p, \sigma) \mapsto (p, f_\sigma)$ es inyectiva.

En efecto, supongamos que tenemos dos pares (p, σ) y (p, σ') con $f_\sigma = f_{\sigma'}$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y sea $\alpha = \tau_G(\sigma_G) < \kappa$. Sea $r \in G$ tal que $r \Vdash \tau(\sigma) = \check{\alpha}$. Así $r \in A_\alpha^\sigma$ y el conjunto $\{s \in \mathbb{P} \mid \forall t \in f_\sigma(\alpha) \ s \leq t\}$ es denso bajo r . Por consiguiente existe un $s \in f_\sigma(\alpha) \cap G = f_{\sigma'}(\alpha) \cap G$. Como $s \Vdash \tau(\sigma') = \check{\alpha}$, tenemos que $\tau_G(\sigma'_G) = \alpha = \tau_G(\sigma_G)$, es decir, $\sigma'_G = \sigma_G$. Hemos probado que $\mathbf{1} \Vdash \sigma = \sigma'$, luego las condiciones (p, σ) y (p, σ') son equivalentes. ■

17.3 Conservación de cardinales grandes

Un cardinal grande en un modelo transitivo de ZFC puede dejar de serlo en una extensión genérica. Por ejemplo, es fácil hacer que deje de ser límite fuerte. En esta sección daremos un par de condiciones suficientes para que esto no suceda, sino que un cardinal medible, compacto, etc. en un modelo siga siéndolo en una extensión genérica.

Empezamos con un resultado muy simple que, aunque no carece de interés, tiene una utilidad limitada:

Teorema 17.19 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea κ un cardinal ^{M} , sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. tal que $|\mathbb{P}|^M < \kappa$ y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces si κ posee en M una de las propiedades siguientes, también la tiene en $M[G]$:*

κ es un cardinal (fuertemente) inaccesible, (fuertemente) α -Mahlo, (débilmente) compacto, de Ramsey, medible, supercompacto.

DEMOSTRACIÓN: Como \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades sobre $|\mathbb{P}|$, es claro que si κ es débilmente inaccesible ^{M} también es débilmente inaccesible ^{$M[G]$} . La conservación de los cardinales α -Mahlo se sigue inmediatamente de que si $E \subset \kappa$ es estacionario ^{M} también es estacionario ^{$M[G]$} . Para probar esto consideremos un conjunto $C = \tau_G$ c.n.a. en κ . Podemos exigir² que $\mathbf{1} \Vdash \tau$ es c.n.a. en $\check{\kappa}$. Entonces $D = \{\alpha < \kappa \mid \mathbf{1} \Vdash \check{\alpha} \in \tau\} \in M$ es un subconjunto c.n.a. en κ . En efecto, es cerrado, pues si $\lambda < \kappa$ y $D \cap \lambda$ no está acotado en λ , dado cualquier filtro genérico H , tenemos que τ_H es c.n.a. en κ y $D \cap \lambda \subset \tau_H \cap \lambda$, luego $\lambda \in \tau_H$, luego $\lambda \in D$.

Para ver que D es no acotado tomamos $\alpha_0 < \kappa$. Para cada $p \in \mathbb{P}$ existe una condición $q \leq p$ y un $\beta_p < \kappa$ de modo que $\alpha_0 < \beta_p$ y $q \Vdash \check{\beta} \in \tau$. Sea $\alpha_1 < \kappa$ el

²Usamos que $\mathbf{1} \Vdash \bigvee x(x \text{ es c.n.a. en } \check{\kappa} \wedge (\tau \text{ es c.n.a. en } \check{\kappa} \rightarrow x = \tau))$.

supremo de los ordinales β_p . Claramente $\mathbb{1} \Vdash \bigvee \beta \in \tau \check{\alpha}_0 < \beta \leq \check{\alpha}_1$. Repitiendo el proceso obtenemos una sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \omega}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \bigvee \beta \in \tau \check{\alpha}_n < \beta \leq \check{\alpha}_{n+1}$. Sea $\alpha < \kappa$ el supremo de los α_n . Es claro que $\alpha \in D$.

Por consiguiente $E \cap D \neq \emptyset$, pero $E \cap D \subset E \cap C$, luego E es estacionario $^{M[G]}$.

Si κ es fuertemente inaccesible M , para cada $\alpha < \kappa$, el teorema 5.20 junto con (5.1) nos da que $(2^{|\alpha|})^{M[G]} \leq (|\mathbb{P}^{<|\mathbb{P}^+}|^{|\alpha|})^M = (2^{|\mathbb{P} \cdot |\alpha|})^M < \kappa$. Por lo tanto κ es fuertemente inaccesible $^{M[G]}$. De aquí se sigue fácilmente que los cardinales fuertemente α -Mahlo M también son fuertemente α -Mahlo $^{M[G]}$.

Todas las propiedades que nos falta considerar implican que κ es fuertemente inaccesible. Como la completión de \mathbb{P} tiene a lo sumo cardinal $2^{|\mathbb{P}|} < \kappa$, en lugar de trabajar con un c.p.o. \mathbb{P} podemos trabajar con un álgebra de Boole completa \mathbb{B} . Como $|V_\kappa| = \kappa$, podemos suponer que $\mathbb{B} \subset V_\kappa$.

Supongamos ahora que κ es débilmente compacto M . Sea $F : [\kappa]^2 \rightarrow 2$ una partición en $M[G]$. Podemos suponer que $F = \tau_G$ y $\|\tau : [\kappa]^2 \rightarrow 2\| = \mathbb{1}$.

Sea $F' : [\kappa]^2 \rightarrow \mathbb{B}$ dada por $F'(\{\alpha, \beta\}) = \|\tau(\{\check{\alpha}, \check{\beta}\}) = 0\|$. Claramente $F' \in M$ y es una partición de $[\kappa]^2$ en menos de κ partes, luego existe $H \subset \kappa$ homogéneo para F' . Claramente también es homogéneo para F (pues F tomará el valor 0 o 1 en $[H]^2$ según si el valor constante que toma F' está o no en G). Así pues, κ es débilmente compacto $^{M[G]}$. La propiedad de Ramsey se trata igualmente.

Supongamos que κ es medible M . Sea $U \in M$ una medida M en κ y sea W el filtro en κ generado por U en $M[G]$, es decir,

$$W = \{x \in M[G] \mid \bigvee y \in U \ y \subset x \subset \kappa\}.$$

Veamos que W es una medida $^{M[G]}$ en κ .

Sea $\tau_G = \{x_\alpha\}_{\alpha < \beta} \in M[G]$ tal que $\beta < \kappa$ y cada $x_\alpha \in W$. Sea

$$b = \|\tau : \check{\beta} \rightarrow \mathcal{P}\check{\kappa} \wedge \bigwedge \alpha < \check{\beta} \bigvee y \in \check{U} \ y \subset \tau(\alpha)\| \in G.$$

Tomemos $\alpha < \beta$. Para cada $p \in \mathbb{B}$ tal que $p \leq b$, existirá un $y_p \in U$ de manera que $\|\check{y}_p \subset \tau(\check{\alpha})\| \wedge p \neq \Phi$. La sucesión $\{y_p\}_{p \leq b}$ puede tomarse en M , luego por completitud $y_\alpha = \bigcap_{p \leq b} y_p \in U$. Más aún, podemos exigir que $\{y_\alpha\}_{\alpha < \beta} \in M$.

Claramente $\|\check{y}_p \subset \tau(\check{\alpha})\| \leq \|\check{y}_\alpha \subset \tau(\check{\alpha})\|$ y $\{\|\check{y}_p \subset \tau(\check{\alpha})\| \wedge p \mid p \leq b\}$ es denso bajo b . Por lo tanto $b \leq \|\check{y}_\alpha \subset \tau(\check{\alpha})\| \in G$, es decir, $y_\alpha \subset x_\alpha$. De nuevo por completitud, $y = \bigcap_{\alpha < \beta} y_\alpha \in U$ y, obviamente, $y \subset \bigcap_{\alpha < \beta} x_\alpha$, luego $\bigcap_{\alpha < \beta} x_\alpha \in W$.

Esto prueba que W es un filtro κ -completo $^{M[G]}$. Es obvio que no es principal. Falta ver que es un ultrafiltro. Sea $\tau_G \subset \kappa$. Entonces

$$\kappa = \bigcup_{b \in \mathbb{B}} \{\alpha < \kappa \mid \|\check{\alpha} \in \tau\| = b\}.$$

Como $|\mathbb{B}| < \kappa$, existirá un $b \in \mathbb{B}$ tal que $A = \{\alpha < \kappa \mid \|\check{\alpha} \in \tau\| = b\} \in U$. Ahora bien, se tiene que $A \subset \tau_G$ o $A \subset \kappa \setminus \tau_G$ según si $b \in G$ o $b \notin G$. En consecuencia $\tau_G \in W$ o bien $\kappa \setminus \tau_G \in W$.

Consideremos ahora el caso en que κ es compacto^M (supercompacto^M). Sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal^{M[G]} y veamos que existe una medida fina (normal) en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}$. Para ello tomamos una medida fina (normal) U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^M$. Sea $j_U : M \rightarrow \text{Ult}_U(M)$ la inmersión natural y sea d la identidad en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^M$. Es inmediato comprobar que si $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^M$, entonces $P \in U \leftrightarrow [d] \in j_U(P)$.

Además $j_U[\mu] \subset [d]$ (o bien $j_U[\mu] = [d]$ si U es normal, por 16.10). Como estamos suponiendo que $\mathbb{B} \subset V_\kappa$, tenemos que j_U fija a \mathbb{B} y a todos sus elementos. En particular $\mathbb{B} \in \text{Ult}_U(M)$ y G es \mathbb{B} -genérico sobre $\text{Ult}_U(M)$.

Definamos $j : M[G] \rightarrow \text{Ult}_U(M)[G]$ mediante $j(\tau_G) = j_U(\tau)_G$. Esto es correcto porque j_U transforma \mathbb{B} -nombres^M en \mathbb{B} -nombres^{Ult} y si $\tau_G = \tau'_G$, entonces $\|\tau = \tau'\| \in G$, luego $\|j_U(\tau) = j_U(\tau')\| \in j(G) = G$ y por consiguiente $j_U(\tau)_G = j_U(\tau')_G$.

Se cumple que j es una inmersión elemental, pues si $\phi^{M[G]}(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})$, entonces $\|\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)\| \in G$, luego $\|\phi(j(\tau_1), \dots, j(\tau_n))\| \in j(G) = G$, luego $\phi^{\text{Ult}}(j(\tau_{1G}), \dots, j(\tau_{nG}))$.

Además j extiende a j_U , pues si $x \in M$, entonces $j(x) = j(\check{x}_G) = j_U(\check{x})_G = \check{x}_G = x$.

Sea $W = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \mid [d] \in j(P)\}$. Se cumple que $W \in M[G]$, pues podemos encontrar un conjunto $A \in M$ que contenga \mathbb{B} -nombres para todos los elementos de $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}$. Como j_U es definible en M , es claro que $j_U \upharpoonright A \in M \subset M[G]$, luego la restricción de j a $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}$ está en $M[G]$ y con ella podemos definir W .

Veamos que W es una medida fina (normal) en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}$. Notemos que

$$\begin{aligned} [d] \in j_U(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^M) &= \mathcal{P}^{<j_U(\kappa)}(j_U(\mu))^{\text{Ult}_U(M)} \\ &\subset \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(j(\mu))^{\text{Ult}_U(M)[G]} = j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}), \end{aligned}$$

luego $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \in W$. Del hecho de que j es una inmersión elemental que fija a los ordinales menores que κ se sigue sin dificultad que W es un ultrafiltro κ -completo^{M[G]}.

Si $\alpha < \mu$ hay que probar que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in W$, pero esto equivale a que $j_U(\alpha) \in [d]$, lo cual es cierto.

Por último, supongamos que U es normal y tomemos $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \rightarrow \mu$ tal que $f \in M[G]$ y $A = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \mid f(P) \in P\} \in W$. Entonces

$$[d] \in j(A) = \{P \in \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(j(\mu))^{\text{Ult}_U(M)[G]} \mid j(f)(P) \in P\},$$

es decir, $j(f)([d]) \in [d] = j[\mu]$, luego existe un $\alpha < \mu$ tal que $j(f)([d]) = j(\alpha)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} [d] \in \{P \in \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(\mu)^{\text{Ult}_U(M)[G]} \mid j(f)(P) = j(\alpha)\} \\ = j(\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \mid f(P) = \alpha\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \mid f(P) = \alpha\} \in W$, luego W es una medida fina normal^{M[G]} en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$. ■

Ejercicio: Demostrar que la existencia de cardinales grandes de cualquiera de los tipos considerados en el teorema anterior no implica ni contradice la hipótesis del continuo.

Ejercicio: Demostrar que el axioma de Martin es consistente con la existencia de cardinales grandes.

El resto de la sección lo dedicaremos a probar un resultado mucho más delicado sobre conservación de la supercompacidad, para el cual necesitamos un resultado previo:

Teorema 17.20 *Sea κ un cardinal supercompacto. Existe $f : \kappa \rightarrow V_\kappa$ tal que para todo conjunto x y todo cardinal $\mu \geq |\text{ct } x|$, $\mu \geq \kappa$, existe una medida fina normal U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ tal que $j_U(f)(\kappa) = x$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\phi(g, \mu)$ a la fórmula siguiente:

“Existe un cardinal ν tal que $g : \nu \rightarrow V_\nu$ y μ es el mínimo cardinal $\geq \nu$ para el que existe un conjunto x tal que $|\text{ct } x| \leq \mu$ y no existe una medida fina normal U en $\mathcal{P}^{<\nu}(\mu)$ que cumpla $j_U(g)(\nu) = x$.”

Si no se cumple el teorema, entonces para cada función $f : \kappa \rightarrow V_\kappa$ existe un cardinal $\mu_f \geq \kappa$ que verifica $\phi(f, \mu_f)$. Tomemos un cardinal límite fuerte $\mu > \bigcup_{f \in V_\kappa} \mu_f$. Sea U una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, sea $M_\mu = \text{Ult}_{U_\mu}(V)$ y sea $j_\mu : V \rightarrow M_\mu$ la inmersión natural. Como $M_\mu^\mu \subset M_\mu$, es fácil ver³ que $\phi^{M_\mu}(f, \mu_f)$ para toda $f \in V_\kappa$. Así pues

$$\bigwedge f \in V_\kappa \bigvee \mu_f < \mu \phi^{M_\mu}(f, \mu_f). \quad (17.9)$$

Según el teorema 16.11, $\kappa = [p]$ y $\mu = [q]$, donde $p(P) = P \cap \kappa$ y $q(P) = \text{ord } P$. Por lo tanto

$$X = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid P \cap \kappa \in \kappa \wedge \bigwedge f \in V_\kappa \bigvee \mu_f < \text{ord } P \phi(f, \mu_f)\} \in U_\mu.$$

Sea $A = \{P \cap \kappa \mid P \in X\}$. Sea U_κ la medida en κ dada por 16.13. Se cumple que $A \in U_\kappa$, pues esto equivale a que $\kappa \in j_\mu(A)$, o sea, a que $[p] \in [c_A]$, lo que a su vez equivale a que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid P \cap \kappa \in A\} \in U_\mu$, y ciertamente X está contenido en este conjunto. Por lo tanto $\bigwedge \alpha \in A \bigwedge f \in V_\kappa \bigvee \mu_f < \kappa \phi(f, \mu_f)$.

Definimos $f : \kappa \rightarrow V_\kappa$ como sigue. Dada $f|_\alpha$, hacemos $f(\alpha) = \emptyset$ a menos que $\alpha \in A$ y $f|_\alpha : \alpha \rightarrow V_\alpha$, en cuyo caso, puesto que $\phi(f|_\alpha, \mu_{f|_\alpha})$, existe un $x \in V_\kappa$ que cumple lo pedido por ϕ . Definimos $f(\alpha) = x$.

Llamemos $f_\alpha = f|_\alpha$. Entonces $j_\mu(\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \{g_\alpha\}_{\alpha \in j(A)}$, para ciertas funciones g_α , pero como $f_\alpha \in V_\kappa$, se cumple que $g_\alpha = j_\mu(f_\alpha) = f_\alpha$, luego podemos escribir $j_\mu(\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \{f_\alpha\}_{\alpha \in j(A)}$.

³Notemos que si $|\text{ct } x| \leq \mu_f$, entonces $x \in M_\mu$. Además, para calcular $j_U(f)$ basta considerar clases de equivalencia módulo U en V_{μ_f+1} y, éstas son absolutas para M_μ .

Como $\kappa \in j(A)$, tenemos definida f_κ . Como $\bigwedge \alpha \in A$ Dominio $f_\alpha = \alpha$, se cumple que f_κ tiene dominio κ . Como $\bigwedge \alpha \beta \in A (\alpha < \beta \rightarrow f_\alpha \subset f_\beta)$, aplicando j_μ obtenemos que $\bigwedge \alpha < j_\mu(A) (\alpha < \kappa \rightarrow f_\alpha \subset f_\kappa)$, de donde podemos concluir que $f_\kappa = f$.

Si $\alpha \in A$ pero no $f_\alpha : \alpha \rightarrow V_\alpha$, definimos $\mu_{f_\alpha} = 0$. Así podemos considerar $j_\mu(\{\mu_{f_\alpha}\}_{\alpha \in A}) = \{\nu_\alpha\}_{\alpha \in j(A)}$. Como $\bigwedge \alpha \in A (f_\alpha : \alpha \rightarrow V_\alpha \rightarrow \phi(f_\alpha, \mu_{f_\alpha}))$, tenemos $\bigwedge \alpha \in j_\mu(A) (f_\alpha : \alpha \rightarrow V_\alpha \rightarrow \phi^{M_\mu}(f_\alpha, \nu_\alpha))$ y, en particular, $\phi^{M_\mu}(f_\kappa, \nu_\kappa)$.

Por otra parte, (17.9) nos da $\phi^{M_\mu}(f, \mu_f)$ y, como ϕ implica unicidad en la segunda variable, ha de ser $\mu_f = \nu_\kappa$. Por construcción de f ,

$$\bigwedge \alpha \in A (f_\alpha : \alpha \rightarrow V_\alpha \rightarrow \text{se cumple } \phi(f_\alpha, \mu_{f_\alpha}) \text{ con } x = f(\alpha)),$$

luego, aplicando j_μ y particularizando a κ , tenemos que $x = j_\mu(f)(\kappa)$ verifica $\phi^{M_\mu}(f, \mu_f)$ y, de hecho, $\phi(f, \mu_f)$. Es decir, tenemos que $|\text{ct } x| \leq \mu_f$ y no existe ninguna medida fina normal U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu_f)$ tal que $j_U(f)(\kappa) = x$.

Ahora bien, consideremos la medida U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu_f)$ definida a partir de U_μ según el teorema 16.17. Sea M_{μ_f} la ultrapotencia correspondiente y llamemos $j_U : V \rightarrow M_{\mu_f}$ a la inmersión natural. De acuerdo con dicho teorema, existe una inmersión elemental $j_{\mu_f \mu} : M_{\mu_f} \rightarrow M_\mu$ que fija a los ordinales $\leq \mu_f$ y además $j_U \circ j_{\mu_f \mu} = j_\mu$.

Como $|\text{ct } x| \leq \mu_f$, se cumple⁴ que $x \in M_{\mu_f}$ y $j_{\mu_f \mu}(x) = x$. Por otra parte, $j_{\mu_f \mu}(\kappa) = \kappa$. Ahora,

$$j_{\mu_f \mu}(j_U(f)(\kappa)) = j_{\mu_f \mu}(j_U(f))(j_{\mu_f \mu}(\kappa)) = j_\mu(f)(\kappa) = x = j_{\mu_f \mu}(x),$$

luego $j_U(f)(\kappa) = x$, en contradicción con lo visto anteriormente. ■

Teorema 17.21 *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y sea κ un cardinal supercompacto^M. Entonces existe un c.p.o. $\mathbb{Q} \in M$ que cumple la (c.c. κ)^M, $|\mathbb{Q}|^M = \kappa$ y si G es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M , entonces κ es supercompacto^{M[G]} y se conserva supercompacto en cualquier extensión genérica de $M[G]$ obtenida a partir de un c.p.o. fuertemente κ -cerrado^{M[G]}.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que la última afirmación implica ya que κ es supercompacto^{M[G]}. Lo que sigue ha de entenderse relativizado a M . Consideremos una aplicación $f : \kappa \rightarrow V_\kappa$ según el teorema anterior. Vamos a construir una iteración de preórdenes $(\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha < \kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \kappa})$. Simultáneamente definiremos una sucesión de ordinales $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$, de modo que $\bigwedge \alpha < \kappa \gamma_\alpha < \kappa$.

Definidos $(\{\mathbb{Q}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ y $\{\gamma_\delta\}_{\delta < \alpha}$, tomamos $\pi_\alpha = \mathbb{1}$ (es decir, el nombre canónico del c.p.o. trivial) y $\gamma_{\alpha+1} = \gamma_\alpha$ a menos que:

- a) $\bigwedge \delta < \alpha \gamma_\delta < \alpha$,
- b) $f(\alpha) = (\pi, \gamma)$, donde $\gamma < \kappa$ es un cardinal y π es un \mathbb{Q}_α -nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\alpha} \Vdash \pi$ es fuertemente $\check{\alpha}$ -cerrado.

⁴Una simple inducción demuestra que $\text{rang } x < \mu_f^+$ y, como el mínimo ordinal no fijado por $j_{\mu_f \mu}$ ha de ser un cardinal^{M μ_f} y $(\mu_f^+)^{M_{\mu_f}} = \mu_f^+$, de hecho $j_{\mu_f \mu}$ fija a todos los elementos de rango menor que μ_f^+ .

En tal caso hacemos $\gamma_{\alpha+1} = \gamma$ y $\pi_\alpha = \pi$. Esto determina $\mathbb{Q}_{\alpha+1}$.

Definidos $(\{\mathbb{Q}_\delta\}_{\delta < \lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \lambda})$ y $\{\gamma_\delta\}_{\delta < \lambda}$, para un ordinal límite $\lambda < \kappa$, tomamos $\gamma_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \gamma_\delta$ y definimos \mathbb{Q}_λ como el límite inverso de los c.p.o.s anteriores salvo que λ sea un cardinal (débilmente) inaccesible (en cuyo caso tomamos el límite directo). Vamos a probar que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_\kappa$ cumple lo pedido.

Veamos en primer lugar que $\bigwedge \alpha < \kappa |\mathbb{Q}_\alpha| < \kappa$. En efecto, supongamos que $|\mathbb{Q}_\alpha| < \kappa$. Teniendo en cuenta la desigualdad $\text{rang } \tau_G \leq \text{rang } \tau$, es inmediato que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\alpha} \Vdash \pi_\alpha \in V_{\check{\kappa}}$. Por el teorema 17.19 tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\delta}$ fuerza que $\check{\kappa}$ es supercompacto, en particular un límite fuerte, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\delta} \Vdash |\pi_\alpha| < \check{\kappa}$.

Más concretamente, para cada filtro \mathbb{Q}_α -genérico G ha de existir un ordinal $\mu_G < \kappa$ y una condición $p_G \in G$ tal que $p_G \Vdash |\pi_\alpha| = \check{\mu}_G$. El supremo μ de los ordinales μ_G cumple $\mu < \kappa$, y es claro que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\delta} \Vdash |\pi_\alpha| < \check{\mu}$. Por el teorema 17.18 concluimos que $|\mathbb{Q}_{\alpha+1}| \leq \mu^{|\mathbb{Q}_\alpha|^+} < \kappa$.

El caso límite es inmediato porque κ es fuertemente inaccesible.

Teniendo en cuenta que κ es límite directo concluimos que $|\mathbb{Q}_\kappa| = \kappa$ y como κ es un cardinal de Mahlo, el teorema 17.9 implica que \mathbb{Q}_κ cumple la c.c.c. κ .

Sea ahora G un filtro \mathbb{Q}_κ -genérico sobre M y sea $\mathbb{P} \in M[G]$ un c.p.o. fuertemente κ -cerrado $^{M[G]}$. Sea $\mathbb{P} = \pi_G$. Podemos suponer que $\mathbb{1}_\mathbb{P} \Vdash \pi$ es un c.p.o. fuertemente $\check{\kappa}$ -cerrado.

Hemos de probar que $\mathbb{1}_\mathbb{P} \Vdash \check{\kappa}$ es supercompacto o, equivalentemente, que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \Vdash \check{\kappa}$ es supercompacto.

Seguimos trabajando en M . Sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal y tomemos otro cardinal $\xi > |\text{ct } \pi|$, $\xi \geq 2^\kappa$, $\xi > |\mathbb{Q}_\kappa * \pi|$ y de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \Vdash \check{\xi} > 2^{2^{\check{\mu}}}$.

Sea U_ξ una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\xi)$ tal que $j_{U_\xi}(f)(\kappa) = (\pi, \xi)$. Sea M_ξ la ultrapotencia correspondiente. Llamaremos $j : M \rightarrow M_\xi$ a la inmersión natural j_{U_ξ} .

Por construcción tenemos que $\bigwedge \alpha < \kappa \text{ rang } \pi_\alpha < \kappa$, de donde se sigue que $\bigwedge \alpha < \kappa \text{ rang } \mathbb{Q}_\alpha < \kappa$. En efecto, supongamos que $\text{rang } \mathbb{Q}_\alpha < \kappa$. Definimos una sucesión de \mathbb{Q}_α -nombres $\{\rho_\delta\}_{\delta < \kappa}$ de modo que $\text{rang } \rho_\delta < \kappa$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\alpha} \Vdash \rho_\delta = V_{\check{\delta}}$.

Definimos $\rho_0 = \check{\emptyset}$, tomamos como $\rho_{\delta+1}$ el conjunto de todos los pares $(\sigma, \mathbb{1})$, donde $\sigma \in M^{\mathbb{Q}_\alpha}$ es un buen \mathbb{Q}_δ -nombre para un subconjunto de ρ_α y $\rho_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \rho_\delta$.

Es claro que se cumple lo pedido. Si $\text{rang } \pi_\alpha < \delta < \kappa$, cada elemento de $\hat{\pi}_\alpha$ es equivalente a un buen nombre para un subconjunto de ρ_α , el cual tendrá rango menor que el rango de $\rho_{\alpha+1}$, luego por definición de $\hat{\pi}_\alpha$, todos sus elementos tienen rango menor que el rango de $\rho_{\alpha+1}$, de donde $\text{rang } \hat{\pi}_\alpha < \kappa$. Ahora es fácil concluir que $\text{rang } \mathbb{Q}_{\alpha+1} < \kappa$. El caso límite se sigue de que κ es regular.

Como consecuencia, $j((\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha \leq \kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \kappa})) = (\{\mathbb{Q}'_\alpha\}_{\alpha \leq j(\kappa)}, \{\pi'_\alpha\}_{\alpha < j(\kappa)})$ es una iteración $^{M_\xi}$ de preórdenes que empieza con los mismos $(\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha < \kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \kappa})$. Además, como κ es inaccesible $^{M_\xi}$, se cumple que \mathbb{Q}'_κ es límite directo, luego $\mathbb{Q}'_\kappa = \mathbb{Q}_\kappa$. En conclusión, podemos escribir sin ambigüedad

$$j((\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha \leq \kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \kappa})) = (\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha \leq j(\kappa)}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < j(\kappa)}).$$

Igualmente, la sucesión $j(\{\gamma_\alpha\}_{\alpha < \kappa}) = \{\gamma_\alpha\}_{\alpha < j(\kappa)}$ extiende a la original.

La iteración extendida cumple en M_ξ la misma definición que la original cumple en M , pero con $j(f)$ en lugar de f . Observemos que κ cumple las condiciones a) y b) de la definición, pues $j(f)(\kappa) = (\pi, \xi)$, donde π es un \mathbb{Q}_κ -nombre para un c.p.o. y $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa} \Vdash \pi$ es fuertemente $\check{\kappa}$ -cerrado.

Notemos que sabemos que esto se cumple en M , pero ahora necesitamos que se cumpla en M_ξ . Ahora bien, todo subconjunto de \mathbb{Q}_δ tiene cardinal $\leq 2^\kappa < \xi$, luego está en M_ξ , luego si G es un filtro \mathbb{Q}_δ -genérico sobre M_ξ , también es \mathbb{Q}_δ -genérico sobre M , $M_\xi[G] \subset M[G]$ y π_G es fuertemente κ -cerrado en $M[G]$, luego también en $M_\xi[G]$.

Como consecuencia, en M_ξ se cumple que $\mathbb{Q}_{\kappa+1} \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi$. Más aún, para todo α tal que $\kappa < \alpha < \xi$ se cumple que $\gamma_\kappa = \xi > \alpha$, luego α no cumple la condición a) y, por consiguiente, $\mathbb{Q}_{\alpha+1} \cong \mathbb{Q}_\alpha$. De aquí que $\mathbb{Q}_\xi \cong \mathbb{Q}_{\kappa+1} \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi$.

Veamos que (en M_ξ) podemos factorizar $\mathbb{Q}_{j(\kappa)} \cong \mathbb{Q}_\xi * \rho$.

Según el teorema 17.16, basta comprobar que si $\text{cf } \lambda \leq |\mathbb{Q}_\xi|$ entonces $\mathbb{Q}_{\xi+\lambda}$ es límite inverso. Ahora bien, por la elección de ξ , tenemos que

$$\text{cf } \lambda \leq |\mathbb{Q}_\xi| = |\mathbb{Q}_{\kappa+1}| \leq \xi.$$

(La desigualdad se cumple en M , luego también en M_ξ .)

Si $\mathbb{Q}_{\xi+\lambda}$ fuera límite directo, entonces $\xi + \lambda$ sería un cardinal inaccesible $^{M_\xi}$, luego $\lambda \leq \xi + \lambda = \text{cf}(\xi + \lambda) = \text{cf } \lambda \leq \lambda$, con lo que $\text{cf } \lambda = \lambda = \xi + \lambda > \xi$, contradicción.

Veamos ahora que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\xi} \Vdash \rho$ es fuertemente $\check{\xi}$ -cerrado.

Sea H un filtro \mathbb{Q}_ξ -genérico sobre M_ξ . Sea $j(\kappa) = \xi + \gamma$. Según el teorema de factorización 17.16, tenemos que $\rho_H = \mathbb{R}$ es el último paso de una iteración de preórdenes $(\{\mathbb{R}_\delta\}_{\delta \leq \gamma}, \{\sigma_\delta\}_{\delta < \gamma})$ de modo que $\sigma_\delta = \pi_{\xi+\delta}^* \mathbb{R}$. El hecho de que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{\xi+\delta}} \Vdash \pi_{\xi+\delta}$ es fuertemente $\check{\xi}$ -cerrado se traduce en que $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_\delta} \Vdash \sigma_\delta$ es fuertemente $\check{\xi}$ -cerrado. Para probar que \mathbb{R} es fuertemente ξ -cerrado aplicaremos el teorema 17.13. Hemos de comprobar que si $\text{cf } \lambda < \xi$ (en $M_\xi[H]$) entonces \mathbb{R}_λ es límite inverso. Esto equivale a que lo sea $\mathbb{Q}_{\xi+\lambda}$ y, a su vez, esto equivale a que $\xi + \lambda$ no sea inaccesible $^{M_\xi}$. Ahora bien, antes hemos visto que si $\xi + \lambda$ no es inaccesible $^{M_\xi}$ entonces $\text{cf } \lambda > \xi$, contradicción.

Por otra parte, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa} \Vdash \pi$ es fuertemente $\check{\kappa}$ -cerrado (en M), luego aplicando j tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{j(\kappa)}} \Vdash j(\pi)$ es fuertemente $j(\check{\kappa})$ -cerrado (en M_ξ). En particular $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{j(\kappa)}} \Vdash j(\pi)$ es fuertemente $\check{\xi}$ -cerrado.

Consideramos en M_ξ el c.p.o.⁵

$$\mathbb{Q}_{j(\kappa)} * j(\pi) \cong \mathbb{Q}_\xi * \rho * j(\pi) \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi * \rho * j(\pi).$$

⁵Omitimos la acción de las semejanzas sobre los nombres. Por ejemplo, el segundo $j(\pi)$ es en realidad la imagen de $j(\pi)$ por la semejanza $\mathbb{Q}_{j(\kappa)} \cong \mathbb{Q}_\xi * \rho$.

Por el teorema de factorización 17.16 (aplicado a una iteración de longitud $\kappa + 3$) existe un $\mathbb{Q}_\kappa * \pi$ -nombre para un c.p.o. σ tal que

$$j(\mathbb{Q}_\kappa * \pi) = \mathbb{Q}_{j(\kappa)} * j(\pi) \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi * \sigma.$$

Además, usando 17.11, es fácil ver que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \Vdash \sigma$ es fuertemente $\check{\xi}$ -cerrado (en M_ξ). Más detalladamente, si $(p, \tau) \in \mathbb{Q}_\kappa * \pi$, entonces $p \in \mathbb{Q}_\kappa$ y, como \mathbb{Q}_κ es límite directo, de hecho $p = i_{\alpha\kappa}(p')$, para un $\alpha < \kappa$ y un $p' \in \mathbb{Q}_\alpha$. Como p' tiene rango menor que κ , $j(p') = p'$, de donde $j(p) = i_{\alpha j(\kappa)}(p')$. A través de la semejanza $\mathbb{Q}_{j(\kappa)} \cong \mathbb{Q}_\xi * \rho$ queda $j(p) = (q, \mathbb{1})$, donde $q = i_{\alpha\xi}(p')$. Aplicando la semejanza $\mathbb{Q}_\xi * \rho \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi * \sigma$ queda $j(p) = (p, \mathbb{1}, \mathbb{1})$, luego

$$j(p, \tau) = (p, \mathbb{1}, \eta) \in \mathbb{Q}_\kappa * \pi * \sigma$$

(en realidad η sólo depende de τ).

Sea $G = G_1 * G_2$ un filtro $\mathbb{Q}_\kappa * \pi$ -genérico sobre M (luego sobre M_ξ) y sea $\mathbb{R} = \sigma_G$, que es un c.p.o. fuertemente κ -cerrado $^{M_\xi[G]}$. Sea

$$D = \{r \in \mathbb{R} \mid \forall q \in G \forall p \eta (j(q) = (p, \mathbb{1}, \eta) \wedge r = \eta_G)\} \in M_\xi[G].$$

Se cumple que $D \in M_\xi[G]$ porque $j|_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \in M_\xi$. Además, por la elección de ξ tenemos que $|D|^{M_\xi[G]} \leq |G|^{M_\xi[G]} \leq |\mathbb{Q}_\kappa * \pi|^{M_\xi[G]} \leq |\mathbb{Q}_\kappa * \pi|^{M_\xi} < \xi$. Veamos que D es un subconjunto dirigido de \mathbb{R} .

Sean $r, r' \in D$, sean $q, q' \in G$ tales que $j(q) = (p, \mathbb{1}, \eta)$, $j(q') = (q', \mathbb{1}, \eta')$, $r = \eta_G$, $r' = \eta'_G$. Sea $q'' \in G$ tal que $q'' \leq q \wedge q'' \leq q'$. Sea $j(q'') = (p'', \mathbb{1}, \eta'')$. Así, $(p'', \mathbb{1}, \eta'') \leq (p, \mathbb{1}, \eta)$ y $(p'', \mathbb{1}, \eta'') \leq (q', \mathbb{1}, \eta')$. Esto significa que

$$(p'', \mathbb{1}) \Vdash \eta'' \leq \eta \quad \text{y} \quad (p'', \mathbb{1}) \Vdash \eta'' \leq \eta'.$$

Ahora bien, $q'' = (p'', \tau'') \in G$ (para cierto τ''), luego $q'' \leq (p'', \mathbb{1}) \in G$ y, por consiguiente, $\eta''_G \leq \eta_G = r$, $\eta''_G \leq \eta'_G = r'$, $\eta''_G \in D$.

Así pues, D es dirigido y, como \mathbb{R} es fuertemente ξ -cerrado, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\bigwedge d \in D \ a \leq d$.

Sea H un filtro \mathbb{R} -genérico sobre $M[G]$ (luego sobre $M_\xi[G]$) tal que $a \in H$. Así $G * H$ es un filtro $\mathbb{Q}_\kappa * \pi * \sigma$ -genérico sobre M_ξ o, equivalentemente, $j(\mathbb{Q}_\kappa * \pi)$ -genérico sobre M_ξ .

La finalidad de esta construcción era garantizar lo siguiente:

Si $q \in G$, entonces $j(q) \in G * H$.

En efecto, si $q = (p, \tau) \in G$, entonces $j(q) = (p, \mathbb{1}, \eta)$, donde $r = \eta_G \in D$, luego $a \leq r$, luego $r \in H$. Obviamente $(p, \mathbb{1}) \in G$, luego $j(q) \in G * H$.

Sabemos que $M \cap M_\xi^\xi \subset M_\xi$. Ahora veremos que $M[G] \cap M_\xi[G]^\xi \subset M_\xi[G]$. De aquí se seguirá que \mathbb{R} tiene los mismos conjuntos dirigidos de cardinal $< \xi$ tanto en $M_\xi[G]$ como en $M[G]$, luego \mathbb{R} será fuertemente ξ -cerrado $^{M[G]}$.

Sea $f : \xi \longrightarrow M_\xi[G]$, $f \in M[G]$. Sea $\alpha = \text{rang } f \in M$. De este modo, $f : \xi \longrightarrow V_\alpha \cap M_\xi[G] \in M_\xi[G]$. Sea $h \in M_\xi[G]$ una biyección entre $V_\alpha \cap M_\xi[G]$

y un ordinal $\beta \in M_\xi[G]$. Basta probar que $f \circ h \in M_\xi[G]$. Equivalentemente, podemos suponer que $f : \xi \rightarrow \Omega$.

Sea $f = \tau_G$ de modo que $\mathbb{1} \Vdash \tau : \check{\xi} \rightarrow \Omega$. Para cada $\alpha < \xi$ sea

$$A_\alpha = \{p \in \mathbb{Q}_\kappa * \pi \mid \bigvee \beta p \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{\beta}\} \in M,$$

denso en $\mathbb{Q}_\kappa * \pi$. Si $\alpha < \xi$ y $p \in A_\alpha$, sea $g(\alpha, p) = \beta \mid p \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{\beta}$. Como $|\mathbb{Q}_\kappa * \pi|^M < \xi$, se cumple que $|g|^M = \xi$, luego $g \in M_\xi$. De este modo,

$$f(\alpha) = \beta \mid \bigvee p \in G g(\alpha, p) = \beta,$$

luego f es definible en $M_\xi[G]$ y, en consecuencia, $f \in M_\xi[G]$.

Recordemos que nuestro objetivo era probar que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \Vdash \check{\kappa}$ es supercompacto. Para ello hemos tomado un filtro $\mathbb{Q}_\kappa * \pi$ -genérico sobre M arbitrario G y hemos de probar que κ es supercompacto $^{M[G]}$. Para ello, a su vez, hemos tomado un cardinal M $\mu \geq \kappa$ arbitrario y hemos de probar que κ es μ -supercompacto $^{M[G]}$ (notemos que, por encima de κ , los cardinales M son los mismos que los cardinales $^{M[G]}$). Vamos a extender la inmersión $j : M \rightarrow M_\xi$ a una inmersión elemental $\bar{j} : M[G] \rightarrow M_\xi[G * H]$, a partir de la cual obtendremos una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}$.

Definimos $\bar{j}(\rho_G) = j(\rho)_{G * H}$. Esto es correcto, pues si $\rho \in M^{\mathbb{Q}_\kappa * \pi}$ entonces $j(\rho) \in M_\xi^{\mathbb{Q}_{j(\kappa)} * j(\pi)}$ y podemos identificarlo con un $\mathbb{Q}_\kappa * \pi * \sigma$ -nombre en M_ξ . Además, si $\rho_G = \rho'_G$, existe $q \in G$ tal que $q \Vdash \rho = \rho'$, luego $j(q) \Vdash j(\rho) = j(\rho')$ y $j(q) \in G * H$, luego $j(\rho)_{G * H} = j(\rho')_{G * H}$.

El mismo argumento (con una fórmula arbitraria en lugar de $\rho = \rho'$) prueba que \bar{j} es una inmersión elemental. Además $\bar{j}|_M = j$, pues si $x \in M$ entonces $\bar{j}(x) = j(\check{x})_{G * H} = \check{j}(x)_{G * H} = j(x)$.

Notemos que, como \mathbb{R} es fuertemente ξ -cerrado $^{M[G]}$, se cumple que $\mathcal{P}\mu$ es absoluto para $M[G] - M[G][H]$, luego lo mismo es válido para 2^μ . Más aún, si $x \in M[G][H]$ cumple $x \subset (P\mu)^{M[G][H]} \subset M[G]$, entonces $(|x| \leq 2^\mu < \xi)^{M[G][H]}$, luego $x \in M[G]$. Así pues, $\mathcal{P}\mathcal{P}\mu$ también es absoluto para $M[G] - M[G][H]$. Repitiendo el argumento obtenemos esto mismo para $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mu$. En particular tenemos que $\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ son absolutos para $M[G] - M[G][H]$. Sea

$$U = \{x \in M[G][H] \mid x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G][H]} \wedge j[\mu] \in \bar{j}(x)\}.$$

Se cumple que $U \in \bar{j}(x) \in M[G][H]$ porque la restricción de j al conjunto de los buenos nombres en M para subconjuntos de $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ está en M , luego en $M[G]$ y de aquí que la restricción de \bar{j} a $\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ está en $M[G][H]$. Como $U \in \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, resulta que $U \in M[G]$.

La prueba de que $(U$ es una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}$ es idéntica a la dada en el teorema 17.19 en la parte correspondiente a cardinales supercompactos. Así pues, κ es μ -supercompacto $^{M[G]}$. ■

17.4 La HCG con cardinales supercompactos

En esta sección demostraremos la existencia de cardinales supercompactos es consistente con la HCG. Puesto que estos cardinales contradicen a todo axioma de constructibilidad relativa, el único camino que nos queda es usar una extensión genérica. La técnica es similar a la empleada en la prueba del teorema 17.21.

Teorema 17.22 (Menas) *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y sea θ un cardinal fuertemente de Mahlo^M. Entonces existe una extensión genérica N de M tal que θ es fuertemente inaccesible^N, se cumple la HCG bajo θ y todo cardinal θ -supercompacto^M es μ -supercompacto^N para todo cardinal^N $\mu < \theta$. En particular $N_0 = N \cap V_\theta$ es un modelo transitivo numerable de ZFC+HCG tal que todos los cardinales θ -supercompactos^M son supercompactos^{N_0}.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos

$$\mathbb{Q}_\kappa = \begin{cases} \text{Fn}(\kappa^+, 2^\kappa, \kappa^+) & \text{si } \kappa \text{ es un cardinal y } 2^\kappa > \kappa^+, \\ \{\mathbf{1}\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De este modo, si κ es un cardinal entonces \mathbb{Q}_κ es un c.p.o. casi homogéneo fuertemente κ^+ -cerrado y $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa} \Vdash 2^{\check{\kappa}} = \check{\kappa}^+$.

Definimos en M una iteración $(\{\mathbb{P}_\alpha\}_{\alpha \leq \theta}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \theta})$ de preórdenes casi homogéneos, así como una sucesión de cardinales $\{\theta_\alpha\}_{\alpha \leq \theta}$, de modo que $\theta_\alpha, |\mathbb{P}_\alpha| < \beth_{\alpha+\omega}$. Empezamos con $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$ y $\theta_0 = \aleph_0 < \beth_\omega$.

Dados $(\{\mathbb{P}_\alpha\}_{\alpha \leq \delta}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \delta})$ y $\{\theta_\alpha\}_{\alpha \leq \delta}$, tomamos un \mathbb{P}_δ -nombre π_δ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = \mathbb{Q}_{\check{\theta}_\delta}$.

Esto determina $\mathbb{P}_{\delta+1}$, que será casi homogéneo por 17.17. Sea $\theta_{\delta+1}$ el único cardinal tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}} \Vdash \theta_{\delta+1}$ es el menor cardinal mayor que θ_δ . Existe porque al ser $\mathbb{P}_{\delta+1}$ casi homogéneo, si $\theta_{\delta+1}$ es el menor cardinal mayor que θ_δ en una cierta extensión genérica, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}}$ fuerza que esto es así.

Veamos que $\theta_{\delta+1}, |\mathbb{P}_{\delta+1}| < \beth_{\delta+1+\omega} = \beth_{\delta+\omega}$.

Como $\theta_\delta, |\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+\omega}$, existe un $n < \omega$ tal que $\theta_\delta, |\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+n}$. Si G es un filtro \mathbb{P}_δ -genérico sobre M , entonces $\pi_{\delta G}$ es trivial o bien $\pi_{\delta G} = \text{Fn}(\theta_\delta^+, 2^{\theta_\delta}, \theta_\delta^+)^{M[G]}$. En cualquier caso, en $M[G]$ se cumple

$$|\pi_{\delta G}| \leq (2^{\theta_\delta})^{\theta_\delta^+} \leq 2^{(\beth_{\delta+n}^M)^+} \leq 2^{2^{|\beth_{\delta+n}^M|}}.$$

Volviendo a M , como $|\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+n}$, el número de buenos nombres para subconjuntos de $\check{\beth}_{\delta+n}$ es a lo sumo

$$((\beth_{\delta+n})^{\beth_{\delta+n}})^{\beth_{\delta+n}} = \beth_{\delta+n+1}.$$

Por consiguiente, otra vez en $M[G]$, se cumple que $2^{|\beth_{\delta+n}^M|} \leq \beth_{\delta+n+1}^M$. Estimando igualmente el número de buenos nombres en M para subconjuntos de $\check{\beth}_{\delta+n+1}$ llegamos a que, en $M[G]$, $|\pi_{\delta G}| \leq \beth_{\delta+n+2}^M$.

Con esto hemos probado que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash |\pi_\delta| \leq \check{\beth}_{\delta+n+2}$.

Por otra parte \mathbb{P}_δ cumple la c.c. $\beth_{\delta+n}$, $|\mathbb{P}_\delta| \leq \beth_{\delta+n+2}$ y si $\xi < \beth_{\delta+n}$ entonces $\beth_{\delta+n+2}^\xi = 2^{\beth_{\delta+n+1}^\xi} = 2^{\beth_{\delta+n+1}} = \beth_{\delta+n+2}$. Por consiguiente podemos aplicar el teorema 17.18 y concluir que $|\mathbb{P}_{\delta+1}| < \beth_{\delta+n+2} < \beth_{\delta+n+1+\omega}$.

El hecho de que $|\mathbb{P}_\delta| \leq \beth_{\delta+n+2}$ implica que \mathbb{P}_δ cumple la c.c. $\beth_{\delta+n+2}^+$, luego $\beth_{\delta+n+2}^+$ es un cardinal $M[G]$ y, por construcción, $\theta_{n+1} \leq \beth_{\delta+n+2}^+ < \beth_{\delta+1+\omega}$.

Si $\lambda \leq \theta$ es un ordinal límite tomamos como \mathbb{P}_λ el límite directo de los c.p.o.s anteriores si λ es un cardinal fuertemente inaccesible y el límite inverso en caso contrario. Definimos $\theta_\lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \theta_\delta$. Un simple cálculo nos da las cotas deseadas.

Además \mathbb{P}_λ es casi homogéneo por 17.17.

En particular tenemos que si $\delta < \theta$, entonces $\theta_\delta, |\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+\omega} \leq \beth_{\delta+\omega+\theta} = \beth_\theta = \theta$. Como la sucesión $\{\theta_\alpha\}_{\alpha < \theta}$ es creciente resulta que $\theta_\theta = \theta$.

La extensión del enunciado será la obtenida con $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\theta$. Para cada $\alpha < \theta$ tenemos que $|P_\alpha| < \theta$, luego \mathbb{P}_α cumple la c.c. θ . Además, como θ es un cardinal de Mahlo, existe un conjunto estacionario de cardinales fuertemente inaccesibles menores que θ . El teorema 17.9 nos da que \mathbb{P} cumple la c.c. θ .

Veamos que si $\delta \leq \gamma \leq \theta$ entonces $\mathbb{P}_\gamma \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_{\delta\gamma}$, donde $\pi_{\delta\gamma}$ es un \mathbb{P}_δ -nombre para un c.p.o. tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_{\delta\gamma} \text{ es fuertemente } \check{\theta}_\delta^+ \text{-cerrado.}$$

Según el teorema 17.16 basta probar que si $\text{cf } \lambda \leq |\mathbb{P}_\delta|$ entonces $\mathbb{P}_{\delta+\lambda}$ es límite inverso, es decir, que $\delta + \lambda$ no es fuertemente inaccesible.

Si $\delta + \lambda$ es fuertemente inaccesible, entonces $\lambda \leq \delta + \lambda = \text{cf}(\delta + \lambda) = \text{cf } \lambda \leq \lambda$, luego $\lambda = \delta + \lambda = \text{cf } \lambda$ y así $\lambda = \text{cf } \lambda \leq |\mathbb{P}_\delta| \leq \beth_{\delta+\omega} < \beth_{\delta+\omega+\lambda} = \beth_{\delta+\lambda} = \beth_\lambda = \lambda$, contradicción.

Sea ahora G un filtro \mathbb{P}_δ -genérico sobre M y sea $\mathbb{R} = (\pi_{\delta\gamma})_G$. Hemos de probar que \mathbb{R} es fuertemente θ_δ -cerrado $M[G]$. Por el teorema de factorización sabemos que \mathbb{R} es el último término de una iteración $(\{\mathbb{R}_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}, \{\rho_\alpha\}_{\alpha < \beta})$, donde $\rho_\alpha = \pi_{\delta+\alpha}^* G$.

Como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+\alpha}} \Vdash \pi_{\delta+\alpha} = \mathbb{Q}_{\check{\theta}_{\delta+\alpha}}$, en $M[G]$ se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_\alpha} \Vdash \rho_\alpha = \mathbb{Q}_{\check{\theta}_{\delta+\alpha}}$ y, en particular, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_\alpha} \Vdash \rho_\alpha$ es fuertemente $\check{\theta}_\delta^+$ -cerrado. Ahora basta comprobar la condición del teorema 17.13, es decir, que si $\text{cf } \lambda \leq \theta_\delta$ (en $M[G]$) entonces \mathbb{R}_λ es límite inverso, lo cual equivale a que lo sea $\mathbb{P}_{\delta+\lambda}$ y, a su vez, a que $\delta + \lambda$ no sea fuertemente inaccesible M .

En efecto, si $\delta + \lambda$ es fuertemente inaccesible M , entonces $\delta + \lambda = \lambda$, luego $|\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+\omega} \leq \beth_{\delta+\omega+\lambda} = \beth_\lambda = \lambda$, luego \mathbb{P}_δ conserva cardinales y cofinalidades $\geq \lambda$. En particular λ es un cardinal regular $M[G]$, y esto nos lleva a contradicción:

$$\lambda = \text{cf}^{M[G]} \lambda < \theta_\delta < \beth_{\delta+\omega}^M \leq \beth_{\delta+\omega+\lambda}^M = \beth_\lambda^M = \lambda.$$

Veamos ahora que si $\delta < \theta$, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\theta}_{\delta+1} = \check{\theta}_\delta^+$.

Por construcción tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}} \Vdash \check{\theta}_{\delta+1} = \check{\theta}_\delta^+$, pero podemos factorizar $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_{\delta+1} * \pi_{\delta+1\theta}$, donde $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}} \Vdash \pi_{\delta+1\theta}$ es fuertemente $\check{\theta}_{\delta+1}^+$ -cerrado.

Así, si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $M[G] = M[G_{\delta+1}][H]$, donde $G_{\delta+1}$ es $\mathbb{P}_{\delta+1}$ -genérico sobre M y, llamando $\mathbb{R} = (\pi_{\delta+1}\theta)_{G_{\delta+1}}$, el filtro H es \mathbb{R} -genérico sobre $M[G_{\delta+1}]$. Además \mathbb{R} es fuertemente $\theta_{\delta+1}^+$ -cerrado $^{M[G_{\delta+1}]}$.

Sabemos que $(\theta_{\delta+1} = \theta_{\delta}^+)^{M[G_{\delta+1}]}$ y, como \mathbb{R} es $\theta_{\delta+1}^+$ -cerrado, los cardinales $\leq \theta_{\delta+1}^+$ son los mismos en $M[G_{\delta+1}]$ y en $M[G]$, luego $(\theta_{\delta+1} = \theta_{\delta}^+)^{M[G]}$.

Veamos ahora que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \bigwedge \kappa (\omega \leq \kappa < \check{\theta} \rightarrow 2^{\kappa} = \kappa^+)$.

Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , del resultado anterior se sigue claramente que los cardinales $^{M[G]}$ infinitos menores que θ son exactamente los cardinales θ_{δ} . Por lo tanto hemos de probar que, para todo $\delta < \theta$, se cumple $(2^{\theta_{\delta}} = \theta_{\delta+1})^{M[G]}$. Factorizamos como antes $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_{\delta+1} * \pi_{\delta+1}\theta$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y sean \mathbb{R} , $G_{\delta+1}$ y H como antes. Así, $M[G] = M[G_{\delta+1}][H]$ y \mathbb{R} es $\theta_{\delta+1}^+$ -cerrado $^{M[G_{\delta+1}]}$.

A su vez, $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_{\delta} * \pi_{\delta}$, de modo que $M[G_{\delta+1}] = M[G_{\delta}][K]$, donde G_{δ} es un filtro \mathbb{P}_{δ} -genérico sobre M y K es $\mathbb{Q}_{\theta_{\delta}}^{M[G_{\delta}]}$ -genérico sobre $M[G_{\delta}]$.

Como $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{\theta_{\delta}}} \Vdash 2^{\check{\theta}_{\delta}} = \check{\theta}_{\delta}^+$, tenemos que $(2^{\theta_{\delta}} = \theta_{\delta}^+ = \theta_{\delta+1})^{M[G_{\delta+1}]}$. Como \mathbb{R} es $\theta_{\delta+1}^+$ -cerrado, se cumple que $(\mathcal{P}\theta_{\delta})^{M[G]} = (\mathcal{P}\theta_{\delta})^{M[G_{\delta+1}]}$, luego $(2^{\theta_{\delta}})^{M[G]} = (2^{\theta_{\delta}})^{M[G_{\delta+1}]} = \theta_{\delta+1} = (\theta_{\delta}^+)^{M[G]}$.

En particular tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\theta}$ es un límite fuerte. Como \mathbb{P} cumple la c.c. θ , también $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\theta}$ es regular, luego de hecho $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\theta}$ es fuertemente inaccesible.

Más aún, la sucesión $\{\theta_{\delta}\}_{\delta < \theta}$ es normal y hay un conjunto estacionario en θ de cardinales fuertemente inaccesibles M , luego un conjunto no acotado de cardinales θ_{δ} son fuertemente inaccesibles M .

Sea ahora κ un cardinal θ -supercompacto M , sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y sea μ un cardinal $^{M[G]}$ tal que $\kappa \leq \mu < \theta$. Hemos de probar que κ es μ -supercompacto $^{M[G]}$. Por la observación del párrafo precedente podemos suponer que μ es fuertemente inaccesible M . Tomamos cardinales $\kappa \leq \mu < \nu < \xi < \theta$, todos ellos fuertemente inaccesibles M .

En M , sea U_{ξ} una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\xi)$, sea M_{ξ} la ultrapotencia asociada y $j_{\xi} : M \rightarrow M_{\xi}$ la inmersión natural. Como $M \cap M_{\xi}^{\xi} \subset M_{\xi}$, en particular $V_{\xi}^M = V_{\xi}^{M_{\xi}}$.

Veamos ahora que $\bigwedge \alpha < \xi \mathbb{P}_{\alpha} \in V_{\xi}^M$. Más concretamente, si $\hat{\alpha}$ es el menor cardinal fuertemente inaccesible M mayor que α , se cumple que $\mathbb{P}_{\alpha} \in V_{\hat{\alpha}}^M$. En efecto, supuesto cierto para α , es claro que $\theta_{\alpha} < \hat{\alpha}$, luego existe un ordinal $\delta < \hat{\alpha}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\alpha}} \Vdash \mathbb{Q}_{\check{\theta}_{\alpha}} \subset V_{\check{\delta}}$. Sea $\{\rho_{\delta}\}_{\delta < \hat{\alpha}}$ la sucesión definida en la prueba de 17.21 tal que $\text{rang } \rho_{\delta} < \hat{\alpha}$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\alpha}} \Vdash \rho_{\delta} = V_{\check{\delta}}$. En la definición de π_{α} podemos exigir que éste sea un buen nombre para un subconjunto de ρ_{δ} , con lo que $\text{rang } \pi_{\alpha} < \hat{\alpha}$. A partir de aquí se razona como en 17.21 para concluir que $\text{rang } \mathbb{P}_{\alpha+1} < \hat{\alpha}$. El caso límite es trivial.

Al igual que en 17.21 hicimos con $\mathbb{P}_{\kappa} * \pi$, se prueba que si $\mathbb{Q} \in M_{\xi}$ es un c.p.o. con $\text{rang } \mathbb{Q} < \xi$ y G es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M (luego sobre M_{ξ}),

entonces $M[G] \cap M_\xi[G]^\xi \subset M_\xi[G]$. De aquí se sigue que $M[G]$ y $M_\xi[G]$ tienen los mismos conjuntos de rango $< \xi$. En particular, las fórmulas

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi = \mathbb{Q}_{\check{\theta}} \quad \text{y} \quad \mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}} \Vdash \check{\theta}' = \check{\theta}^+$$

absolutas para $M_\xi - M$ (para ordinales $\theta, \theta' < \xi$). De aquí se sigue que la definición de $(\{P_\alpha\}_{\alpha < \xi}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \xi})$ y $\{\theta_\alpha\}_{\alpha < \xi}$ es absoluta para $M_\xi - M$. Por otra parte,

$$j(\{P_\alpha\}_{\alpha \leq \xi}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \xi}) = (\{\mathbb{R}_\alpha\}_{\alpha \leq j(\xi)}, \{\rho_\alpha\}_{\alpha < j(\xi)})$$

es una iteración de preórdenes $^{M_\xi}$ que, junto con $j(\{\theta_\alpha\}_{\alpha < \xi})$, satisface en M_ξ la misma definición, luego $\bigwedge \alpha < \xi \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{P}_\alpha$. Más aún, ξ es fuertemente inaccesible $^{M_\xi}$, por lo que \mathbb{R}_ξ es el límite directo de los términos anteriores, al igual que \mathbb{P}_ξ , luego también $\mathbb{R}_\xi = \mathbb{P}_\xi$.

Por otra parte, $j(\mathbb{P}_\nu) = \mathbb{R}_{j(\nu)}$ y $j(\nu) > j(\kappa) \geq \xi$. Hemos probado (en M) que la iteración puede factorizarse en cualquier punto. Lo mismo vale ahora en M_ξ , luego $j(\mathbb{P}_\nu) \cong \mathbb{R}_\xi * \pi = \mathbb{P}_\xi * \pi$, para cierto π tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \Vdash \pi$ es fuertemente ξ -cerrado.

Si $p \in \mathbb{P}_\nu$, entonces $p|_\kappa \in \mathbb{P}_\kappa$, que es límite directo, luego existe un $p_0 \in \mathbb{P}_0$, con $\alpha < \kappa$, tal que $p|_\kappa = i_{\alpha\kappa}(p_0)$ y, como $p_0 \in V_\kappa$, se cumple que $j(p_0) = p_0$. Así, $j(p)|_{j(\kappa)} = i_{\alpha j(\kappa)}(p_0)$ y, a través de la semejanza $j(\mathbb{P}_\nu) \cong \mathbb{P}_\xi * \pi$, queda $j(p) = (s, \sigma)$, donde $s = j(p)|_\xi = i_{\alpha j(\kappa)}(p_0)|_\xi = i_{\kappa\xi}(p|_\kappa)$.

Recordemos que habíamos tomado un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Sean G_ν y G_ξ sus restricciones a \mathbb{P}_ν y \mathbb{P}_ξ . Notemos que G_ξ es también \mathbb{P}_ξ -genérico sobre M_ξ . Sea $\mathbb{Q} = \pi_{G_\xi}$, que es un c.p.o. fuertemente ξ -cerrado $^{M_\xi[G_\xi]}$.

$$D = \{q \in \mathbb{Q} \mid \forall p \in G_\nu \forall \sigma (j(p) = (i_{\kappa\xi}(p|_\kappa), \sigma) \wedge q = \sigma_{G_\xi})\} \in M_\xi[G_\xi].$$

Claramente $|D|^{M_\xi[G_\xi]} \leq |\mathbb{P}_\nu|^{M_\xi[G_\xi]} \leq |\mathbb{P}_\nu|^{M_\xi} < \xi$. Como en el teorema 17.21 se comprueba que D es un conjunto dirigido, luego existe un $a \in \mathbb{Q}$ tal que $\bigwedge d \in D \ a \leq d$.

Sea H un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G_\xi]$ —luego también sobre $M_\xi[G_\xi]$ —, tal que $a \in H$. Entonces $K = G_\xi * H$ es un filtro $j(\mathbb{P}_\nu)$ -genérico sobre M_ξ y si $p \in G_\nu$, entonces $j(p) \in K$, pues $j(p) = (i_{\kappa\xi}(p|_\kappa), \sigma)$, luego $\sigma_{G_\xi} \in D$, luego $a \leq \sigma_{G_\xi} \in H$ y, por otra parte, $p \leq i_{\kappa\xi}(p|_\kappa) \in G_\xi$. Por lo tanto $j(p) \in K$.

Definimos $\bar{j} : M[G_\nu] \longrightarrow M_\xi[K]$ mediante $\bar{j}(\rho_{G_\nu}) = j(\rho)_K$. Como en 17.21 se comprueba que \bar{j} es una inmersión elemental que extiende a j .

Según hemos observado antes, se cumple $M[G_\xi] \cap M_\xi[G_\xi]^\xi \subset M_\xi[G_\xi]$, de donde resulta que \mathbb{Q} tiene los mismos conjuntos dirigidos de cardinal $< \xi$ tanto en $M[G_\xi]$ como en $M_\xi[G_\xi]$, luego \mathbb{Q} es fuertemente ξ -cerrado $^{M[G_\xi]}$.

Razonando como en 17.21 concluimos que $\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ son los mismos en $M[G_\xi][H]$ y en $M[G_\xi]$. Más aún, con la factorización $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\nu * \pi_{\nu\theta}$, donde

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\nu} \Vdash \pi_{\nu\theta} \text{ es fuertemente } \check{\nu}^+\text{-cerrado,}$$

de hecho podemos probar que $\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ son los mismos en $M[G]$ y en $M[G_\nu]$. Teniendo en cuenta las inclusiones $M[G_\nu] \subset M[G_\xi] \subset M[G]$,

vemos que estos conjuntos son los mismos en todos los modelos que estamos considerando. Por consiguiente, si definimos

$$U' = \{x \in M[G_\xi][H] \mid x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G_\xi][H]} \wedge j[\mu] \in \bar{j}(x)\},$$

como en 17.21 se prueba que $U' \in M[G_\xi][H]$, luego en $M[G_\xi]$, luego en $M[G_\nu]$. El mismo argumento de 17.21 prueba que U' es una medida fina normal $^{M[G_\nu]}$ en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y, obviamente, esto sigue siendo válido en $M[G]$. ■

17.5 La independencia de la HCS

Finalmente estamos en condiciones de construir un modelo transitivo de ZFC en el que no se cumple la hipótesis de los cardinales singulares. Necesitamos dos resultados previos que tienen interés por sí mismos. El teorema 15.40 implica que no es posible demostrar la consistencia de que exista un cardinal medible κ tal que $2^\kappa > \kappa^+$ ni siquiera suponiendo consistente la existencia de un cardinal medible. Ahora probamos que no ocurre lo mismo con los cardinales supercompactos:

Teorema 17.23 *Si es consistente la existencia de un cardinal supercompacto, también es consistente que exista un cardinal supercompacto κ (en particular medible) tal que $2^\kappa > \kappa^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M_0 un modelo transitivo numerable de ZFC con un cardinal supercompacto κ . Sea M una extensión genérica de M_0 obtenida con el c.p.o. del teorema 17.21. Así, κ es supercompacto M y sigue siendo supercompacto en cualquier extensión de M obtenida con un c.p.o. fuertemente κ -cerrado.

Si $(2^\kappa = \kappa^+)^M$, tomamos $\mathbb{P} = \text{Fn}(\kappa^{++}, 2, \kappa)^M$. Como κ es fuertemente inaccesible M , el teorema 5.14 nos da que \mathbb{P} cumple la (c.c. κ^+) M y es claro que es fuertemente κ -cerrado. Por consiguiente, si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M tenemos que $M[G]$ tiene los mismos cardinales que M y κ es supercompacto $^{M[G]}$. Además los argumentos usuales nos dan que $(2^\kappa = \kappa^{++})^{M[G]}$. ■

Ejercicio: En el teorema anterior hemos construido un modelo con un cardinal supercompacto tal que $2^\kappa = \kappa^{++}$ supuesto que el modelo de partida cumpliera $2^\kappa = \kappa^+$. Llegar a la misma conclusión en el caso de que el modelo de partida cumpla $2^\kappa > \kappa^{++}$.

Una de las consecuencias del lema del cubrimiento de Jensen (teorema 14.30) era que para que una extensión genérica conserve cardinales pero no cofinalidades es necesario que en el modelo base exista 0^\sharp . Ahora veremos que una condición suficiente para que exista tal extensión es que el modelo base contenga un cardinal medible.

Teorema 17.24 (Prikry) *Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y κ un cardinal medible M . Existe una extensión genérica de M con los mismos cardinales pero en la que κ tiene cofinalidad numerable. Además κ tiene en la extensión los mismos subconjuntos acotados que en M .*

DEMOSTRACIÓN: Todo lo que sigue ha de entenderse relativizado a M . Sea D una medida normal en κ , sea \mathbb{P} el conjunto de los pares $p = (s_p, A_p)$ tales que $s \in [\kappa]^{<\omega}$ y $A \in D$. Consideramos a \mathbb{P} como c.p.o. con el orden dado por

$$p \leq q \leftrightarrow \forall \alpha \in \Omega \ s_q = s_p \cap \alpha \wedge A_p \subset A_q \wedge s_p \setminus s_q \subset A_q.$$

Claramente \mathbb{P} tiene máximo $\mathbb{1} = (\emptyset, \kappa)$. Observemos que si $p, q \in \mathbb{P}$ cumplen $s_p = s_q$, entonces son compatibles, pues $(s_p, A_p \cap A_q)$ es una extensión común. En consecuencia toda anticadena de \mathbb{P} tiene cardinal menor o igual que $|\kappa|^{<\omega} = \kappa$, es decir, \mathbb{P} cumple la c.c. κ^+ . En particular, \mathbb{P} conserva cardinales y cofinalidades mayores que κ .

Para probar que los cardinales menores que κ también se conservan demostraremos primero que si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula, $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ y $(s_0, A_0) \in \mathbb{P}$, entonces existe un $A \in D$, $A \subset A_0$ tal que $(s_0, A) \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$, es decir,⁶

$$(s_0, A) \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \quad \text{o} \quad (s_0, A) \Vdash \neg \phi(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

Sea $\bar{A}_0 = A_0 \setminus s_0 \in D$. Sea S^+ el conjunto de los $s \in [\bar{A}_0]^{<\omega}$ tales que $(s_0 \cup s, X) \Vdash \phi$ para algún $X \in D$, $X \subset \bar{A}_0$. Sea S^- el conjunto de los $s \in [\bar{A}_0]^{<\omega}$ tales que $(s_0 \cup s, X) \Vdash \neg \phi$ para algún $X \in D$, $X \subset \bar{A}_0$, sea $T = [\bar{A}_0]^{<\omega} \setminus (S^+ \cup S^-)$ y sea $U = [\kappa]^{<\omega} \setminus [\bar{A}_0]^{<\omega}$.

De este modo, S^+, S^-, T, U es una partición de $[\kappa]^{<\omega}$. Por el teorema 12.27, existe un $A \in D$ homogéneo para ella. Sea $0 < n < \omega$. Como $|A \cap \bar{A}_0| = \kappa$, se cumple que $[A]^n \cap [\bar{A}_0]^n \neq \emptyset$, luego no puede ser $[A]^n \subset U$. Así pues, $[A]^n$ ha de estar contenido en S^+, S^- o en T , y en cualquier caso $[A]^n \subset [\bar{A}_0]^n$, luego $A \subset \bar{A}_0 \subset A_0$.

Veamos que la condición (s_0, A) cumple lo pedido. En otro caso existen extensiones $(s, X), (t, Y)$ de (s_0, A) tales que $(s, X) \Vdash \phi$ y $(t, Y) \Vdash \neg \phi$. Extendiendo aún más podemos suponer que $|s| = |t| = m$.

Tenemos que $s_0 \subset s, s_0 \subset t$ y $s \setminus s_0, t \setminus s_0 \subset A$. Sea $n = m - |s_0|$. Así resulta que $s \setminus s_0, t \setminus s_0 \in [A]^n$, pero $s \setminus s_0 \in S^+$ y $t \setminus s_0 \in S^-$, contradicción.

Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Vamos a probar que todo subconjunto acotado de κ en $M[G]$ está en M . Sea, pues, $x = \tau_G \in M[G]$ y $\alpha < \kappa$ de modo que $x \subset \alpha$. Sea $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash \tau \subset \check{\alpha}$. Según hemos demostrado, para cada $p \leq p_0$ y cada $\delta < \alpha$ existe un $A_\delta \subset A_p$ tal que $(s, A_\delta) \Vdash \check{\delta} \in \tau$.

Sea $B = \bigcap_{\delta < \alpha} A_\delta \in D$ y sea $q_p = (s, B)$. Así $q_p \leq p$ y $q_p \Vdash \check{\delta} \in \tau$ para todo $\delta < \alpha$. Sea $Z_p = \{\delta < \alpha \mid q_p \Vdash \check{\delta} \in \tau\} \in M$. Claramente $q_p \Vdash \tau = \check{Z}_p$. El conjunto $\{q_p \mid p \leq p_0\}$ es obviamente denso bajo p_0 , luego existe un $q_p \in G$ y, consecuentemente, $x = \tau_G = Z_p \in M$.

Ahora es fácil ver que todo cardinal^M $\mu < \kappa$ es también un cardinal^{M[G]}. En efecto, si existiera $\nu < \mu$ y $f \in M[G]$ tal que $f : \nu \rightarrow \mu$ biyectiva, tomamos $g \in M$ tal que $g : \nu \times \mu \rightarrow \mu$ biyectiva, de modo que $x = g[f] \in M[G]$ es

⁶Se lee “ (s_0, A) decide ϕ ”.

un subconjunto acotado de κ (acotado por μ), luego $x \in M$ y, en consecuencia, $f \in M$, contradicción.

Como κ es medible^M, en particular es un cardinal límite, luego es supremo de cardinales^M, los cuales son también cardinales^{M[G]}, luego κ es un cardinal^{M[G]} y, en definitiva, M y $M[G]$ tienen los mismos cardinales.

Finalmente, sea $S = \bigcup_{p \in G} s_p \in M[G]$. Es claro que, para cada $\alpha < \kappa$, el conjunto $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall \beta \in s_p \alpha < \beta\} \in M$ es denso en \mathbb{P} , pues si $q \in \mathbb{P}$, existe un $\beta > \alpha$ tal que $\beta \in A_q$ y $s_q \subset \beta$. Basta tomar $s_p = s_q \cup \{\beta\}$ y $A_p = A_q$. Así $p \in D_\alpha$ y $p \leq q$. Esto implica que S no está acotado en κ . Si probamos que S es numerable^{M[G]}, tendremos que κ tiene cofinalidad numerable^{M[G]}.

Para ello veamos que si $\alpha \in S$ existe un $p \in G$ tal que $S \cap \alpha \subset s_p$. En efecto, existe un $p \in G$ tal que $\alpha \in s_p$. Si $\beta \in S \cap \alpha$ entonces existe un $q \in G$ tal que $\beta \in s_q \cap \alpha$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Entonces $s_p = s_r \cap \gamma$, para cierto ordinal γ . Como $\alpha \in s_p$, ha de ser $\alpha < \gamma$ y, como $\beta < \alpha$, se cumple que $\beta \in s_r \cap \gamma = s_p$. Por consiguiente todos los segmentos de S son finitos, luego $\text{ord } S = \omega$. ■

Ahora es fácil violar la HCS:

Teorema 17.25 *Si es consistente la existencia de un cardinal supercompacto, también lo es la negación de la HCS. Más concretamente, es consistente que exista un cardinal κ de cofinalidad numerable que cumpla cualquiera de los dos casos siguientes:*

- a) κ es límite fuerte y $\kappa^+ < \kappa^{\text{cf } \kappa} = 2^\kappa$.
- b) $2^{\text{cf } \kappa} < \kappa$ y $\kappa^+ < \kappa^{\text{cf } \kappa} < 2^\kappa$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 17.23 existe un modelo transitivo numerable M de ZFC en el que existe un cardinal medible κ tal que $2^\kappa > \kappa^+$. Aplicando el teorema anterior a dicho modelo, obtenemos una extensión genérica $M[G]$ con los mismos cardinales y donde κ tiene cofinalidad numerable. Obviamente,

$$(2^\kappa)^{M[G]} \geq (2^\kappa)^M > (\kappa^+)^M = (\kappa^+)^{M[G]}.$$

Si $\mu < \kappa$, el teorema anterior nos da también que $(\mathcal{P}\mu)^{M[G]} = (\mathcal{P}\mu)^M$, luego $(2^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^M < \kappa$. Así pues, κ es un límite fuerte^{M[G]}.

Estos hechos implican en general la igualdad $\kappa^{\text{cf } \kappa} = 2^\kappa$:

$$\kappa^+ < 2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\text{cf } \kappa} = \kappa^{\text{cf } \kappa} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa.$$

Así pues, $M[G]$ es un modelo de a). Para obtener un modelo de b) tomamos un cardinal fuertemente inaccesible^M $\mu < \kappa$ (existe porque κ es medible^M). En particular μ es un límite fuerte^M y, según lo visto, también es un límite fuerte^{M[G]}, es decir, $(2^{<\mu} = \mu)^{M[G]}$. Del hecho de que M y $M[G]$ tengan los mismos subconjuntos acotados de κ se sigue inmediatamente que μ sigue siendo

regular en $M[G]$, es decir, μ es fuertemente inaccesible $^{M[G]}$. Consideremos también $\xi = ((2^\kappa)^+)^{M[G]}$.

Sea $\mathbb{Q} = \text{Fn}(\xi, 2, \mu)^{M[G]}$ y sea H un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre $M[G]$. Por el teorema 5.16 los cardinales y las cofinalidades de $M[G][H]$ son los mismos que los de $M[G]$. En particular κ sigue teniendo cofinalidad numerable. Además es claro que en $M[G][H]$ se cumple $2^\mu \geq \xi$.

Como \mathbb{Q} es μ -cerrado $^{M[G]}$, es claro que en $M[G][H]$ se cumple que $2^{\text{cf } \kappa} = 2^{\aleph_0} < \kappa$, pero

$$(\kappa^{\text{cf } \kappa})^{M[G][H]} = (\kappa^{\text{cf } \kappa})^{M[G]} = (2^\kappa)^{M[G]} < \xi \leq (2^\mu)^{M[G][H]} \leq (2^\kappa)^{M[G][H]}.$$

En conclusión, $M[G][H]$ cumple b). ■

M. Magidor refinó considerablemente la idea del teorema de Prikry para obtener resultados mucho más precisos. Como ilustración probaremos la consistencia de que \aleph_ω viole la HCS.

En lo sucesivo, κ será un cardinal κ^+ -supercompacto y U una medida fina normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+)$. Entonces $\text{Ult}_U(V)^{\kappa^+} \subset \text{Ult}_U(V)$, lo que implica que κ es fuertemente inaccesible $^{\text{Ult}}$ y $\kappa^+ = (\kappa^+)^{\text{Ult}}$. Teniendo en cuenta el teorema 16.11, esto implica que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+) \mid P \cap \kappa \text{ es f.i.} \wedge (P \cap \kappa)^+ = \text{ord } P\} \in U$ (Más concretamente, usamos que $\kappa = [g]$, donde $g(P) = P \cap \kappa$ y $\kappa^+ = [f]$, donde $f(P) = \text{ord}(P \cap \kappa^+) = \text{ord } P$). Por consiguiente,

$$D = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+) \mid P \cap \kappa \text{ es f.i.} \wedge |P| = (P \cap \kappa)^+\} \in U. \quad (17.10)$$

Conviene recordar que los elementos de $\mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+)$ que vamos a manejar estarán, de hecho, en D . En particular hemos de tener presente que los conjuntos $P \cap \kappa$ son cardinales fuertemente inaccesibles. También conviene observar que, sobre D , la relación definida en 16.18 es mucho más natural:

$$P \underset{\sim}{\subset} Q \Leftrightarrow P \subset Q \wedge P \cap \kappa < Q \cap \kappa.$$

(En principio sería $(P \cap \kappa)^+ < Q \cap \kappa$, pero como $Q \cap \kappa$ es inaccesible, es lo mismo.) Recordemos el orden colapsante de Lévy definido en 5.28:

$$\text{Lv}(\kappa, \mu) = \{p \subset \kappa \times \mu \times \kappa \mid p \text{ es una función} \wedge |p| < \mu \wedge$$

$$\bigwedge \alpha\beta((\alpha, \beta) \in \text{Dominio}(p) \rightarrow p(\alpha, \beta) < \alpha)\}.$$

Según el teorema 5.31, si $\mu < \kappa$, μ es regular y κ es fuertemente inaccesible, $\text{Lv}(\kappa, \mu)$ conserva cardinales y cofinalidades $\leq \mu$ y $\geq \kappa$, pero colapsa los cardinales intermedios, es decir, $\mathbb{1} \Vdash \check{\kappa} = \check{\mu}^+$.

Las condiciones Sea \mathbb{P} el conjunto de todas las condiciones de la forma

$$\pi = (P_1, \dots, P_l, f_0, \dots, f_l, A, G),$$

donde

- a) $P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_l$ son elementos de D .
- b) Llamando $\kappa_i = P_i \cap \kappa$ (que son cardinales fuertemente inaccesibles), se cumple que

$$f_0 \in \text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1), \quad f_i \in \text{Lv}(\kappa_{i+1}, \kappa_i^{++}), \quad 1 \leq i < l, \quad f_l \in \text{Lv}(\kappa, \kappa_l^{++}).$$

- c) $A \subset D$, $A \in U$ y para todo $Q \in A$,

$$P_l \subsetneq Q \quad \text{y} \quad f_l \in \text{Lv}(Q \cap \kappa, \kappa_l^{++}).$$

- d) G es una función de dominio A tal que $G(Q) \in \text{Lv}(\kappa, (Q \cap \kappa)^+)$. Además, si $P, Q \in A$ cumplen $P \subsetneq Q$, entonces $G(P) \in \text{Lv}(Q \cap \kappa, (P \cap \kappa)^{++})$.

Diremos que $l \geq 1$ es la *longitud* de π , la sucesión (P_1, \dots, P_l) es la P -parte de π , mientras que la sucesión (f_0, \dots, f_l) es la f -parte de π . Convendremos en que \mathbb{P} contiene además una condición trivial $\mathbf{1}$ que hará el papel de máximo cuando definamos el orden en \mathbb{P} .

Para entender esta definición conviene pensar en lo que pretendemos conseguir con un filtro \mathbb{P} -genérico sobre un modelo M . Nuestro propósito es que las P -partes de las condiciones del filtro se combinen en una sucesión infinita $P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq P_3 \subsetneq \dots$ que a su vez dé lugar a una sucesión de cardinales inaccesibles

$$\aleph_1 < \kappa_1 < \kappa_1^+ < \kappa_1^{++} < \kappa_2 < \kappa_2^+ < \kappa_2^{++} < \dots < \kappa.$$

Nuestra intención es que estos cardinales sigan siendo cardinales en la extensión genérica y que su supremo sea κ .

Por otro lado, las f -partes de las condiciones del filtro se combinarán para producir aplicaciones que colapsen todos los cardinales intermedios de la sucesión anterior. El resultado será que los únicos cardinales menores que κ en la extensión serán los de dicha sucesión. En particular esto implicará que κ se convertirá en \aleph_ω en la extensión genérica.

Estos comentarios explican los apartados a) y b) de la definición de \mathbb{P} . El apartado c) afirma que A es el conjunto de candidatos a extender la P -parte de π . Notemos que, como π no determina κ_{l+1} , en b) sólo podemos exigir que f_l esté en $\text{Lv}(\kappa, \kappa_l^{++})$, pero esto es provisional: en c) se exige que esté en $\text{Lv}(Q \cap \kappa, \kappa_l^{++})$, para todo posible candidato a κ_{l+1} , es decir, para todo $Q \cap \kappa$ con $Q \in A$.

La función G , descrita en d), asigna a cada candidato P a extender la P -parte de π , un candidato a extender la f -parte: si queremos añadir P a la P -parte, entonces $\kappa_{l+1} = P \cap \kappa$, luego f_{l+1} tendrá que ser, según b), un elemento de $\text{Lv}(\kappa, (P \cap \kappa)^{++})$, que es lo que d) exige para $G(P)$. Más aún, si después de añadir P queremos añadir Q , entonces nos encontraremos con que f_{l+1} debía ser, de hecho, un elemento de $\text{Lv}((Q \cap \kappa), (P \cap \kappa)^{++})$, y en d) se exige que $G(P)$ siga siendo aceptable.

Quizá el lector se pregunte si existen condiciones. Es fácil ver que sí. Por ejemplo, podemos partir de cualquier sucesión $P_1 \subset \dots \subset P_l \subset Q$ en D . Esto nos da una P -parte. Tomamos funciones arbitrarias f_i según b), pero exigiendo que $f_i \in Lv(Q \cap \kappa, \kappa_i^{++})$. Tomamos $A = \{P \in D \mid Q \subset P\} \in U$, de modo que se cumple c) y tomamos como G la función que asigna a cada $P \in A$ el máximo $G(P) = \mathbf{1} \in Lv(\kappa, (P \cap \kappa)^{++})$, con lo que se cumple trivialmente d).

El orden Dadas dos condiciones $\pi, \pi' \in \mathbb{P}$, diremos que

$$\pi' = (Q_1, \dots, Q_l, g_0, \dots, g_l, B, H) \leq (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_n, A, G) = \pi$$

si

- a) $n \leq l$ y $Q_i = P_i$ para $1 \leq i \leq n$,
- b) $f_i \subset g_i$ para $0 \leq i \leq n$,
- c) $Q_i \in A$ y $G(Q_i) \subset g_i$, para $n < i \leq l$,
- d) $B \subset A$,
- e) $G(P) \subset H(P)$, para todo $P \in B$.

Además exigimos que cualquier condición extiende a la condición $\mathbf{1}$, que se convierte así en el máximo de \mathbb{P} .

La propiedad a) exige que la P -parte de π' prolongue a la P -parte de π , con lo que la sucesión $\kappa_1 < \dots < \kappa_l$ también se ve prolongada, no modificada. La propiedad b) es clara. La c) exige que los nuevos términos de la P -parte de π' se obtengan del conjunto de candidatos A de π , y que los nuevos términos de la f -parte de π' extiendan a las “propuestas” de la función G de π (no podemos exigir la igualdad, pues con ella estaríamos prohibiendo futuras extensiones de estos términos de la f -parte). d) y e) son claras también.

Es inmediato comprobar que esta relación es realmente un orden parcial en \mathbb{P} . Conviene introducir algunas nociones adicionales relacionadas con este orden:

Si $0 \leq j \leq n$, diremos que π' es una *extensión j -directa* de π , y lo representaremos por $\pi' \leq_{\text{dir}}^j \pi$, si además se cumple

- a) $f_i = g_i$, para $j \leq i \leq n$,
- b) $G(Q_i) = g_i$, para $n < i \leq l$,
- c) $B = \{P \in A \mid Q_i \subset P\}$,
- d) $G(P) = H(P)$, para todo $P \in B$.

Diremos que π' es una *extensión directa* de π si es una extensión 0-directa (abreviadamente, $\pi' \leq_{\text{dir}} \pi$).

Observemos que, dado π , eligiendo conjuntos $Q_{n+1} \subsetneq \cdots \subsetneq Q_l \in A$ y funciones g_0, \dots, g_{j-1} tales que

$$g_0 \in \text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1), \quad g_i \in \text{Lv}(\kappa_{i+1}, \kappa_i^{++}), \quad 1 \leq i < j,$$

podemos construir una única extensión j -directa π' . En particular, una extensión directa de π es la mínima extensión que puede obtenerse completando la P -parte de π con una sucesión prefijada $Q_{n+1} \subsetneq \cdots \subsetneq Q_l \in A$.

Si $0 \leq j \leq n$, diremos que π' es una *extensión j -conservativa* de π , y lo representaremos por $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$, si $\pi' \leq \pi$ y además se cumple

- a) $n = l$,
- b) $f_i = g_i$, para $0 \leq i < j$.

Diremos que π' es una *extensión conservativa* de π si es 0-conservativa (abreviadamente, $\pi' \leq_{\text{con}} \pi$).

Así, las extensiones conservativas son las que se obtienen conservando la longitud de π , es decir, sin extender la P -parte.

Es fácil ver que si $\pi' \leq \pi$ y $0 \leq j \leq n$, entonces existe un único $\pi'' \in \mathbb{P}$ tal que $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi'' \leq_{\text{dir}}^j \pi$, es decir, que toda extensión puede obtenerse (de forma única) como una extensión j -directa seguida de una extensión j -conservativa. En efecto, π'' es necesariamente⁷

$$\pi'' = (Q_1, \dots, Q_l, g_0, \dots, g_{j-1}, f_j, \dots, f_n, G(Q_{n+1}), \dots, G(Q_l), C, K),$$

donde $C = \{P \in A \mid Q_l \subsetneq P\}$ y $K = G|_C$.

Llamaremos a π'' la *condición j -interpolante* de π' y π , abreviadamente $\pi'' = \text{Int}_j(\pi', \pi)$. Una comprobación rutinaria justifica que si $\pi'' \leq \pi' \leq \pi$, entonces $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \leq \text{Int}_j(\pi'', \pi)$.

Por otra parte, es obvio que si $\pi' \leq \pi$, entonces $\text{Int}_j(\pi', \text{Int}_j(\pi', \pi)) = \text{Int}_j(\pi', \pi)$, pues esto expresa simplemente que $\pi' \leq_{\text{con}}^j \text{Int}_j(\pi', \pi)$.

Resultados preliminares Vamos a probar un teorema cuya célula de origen es el resultado demostrado en la prueba del teorema de Prikry, según el cual, para pasar de una condición (s, A) a otra que decida una fórmula dada, basta extenderla reduciendo A , pero sin alterar s . Veamos primero un resultado sencillo que usaremos varias veces:

⁷Aquí, como en todo momento hasta ahora, sobrentendemos que π y π' tienen la forma explícita dada en la definición del orden.

Teorema 17.26 Sea $\pi = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_n, A, G) \in \mathbb{P}$ y $0 \leq j \leq n$. Sea $\{\pi_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ una sucesión decreciente de extensiones j -conservativas de π . Supongamos que $\beta \leq \kappa_j^+$ si $j > 0$ o bien que $\beta \leq \omega$ si $j = 0$. Entonces existe $\pi' \in \mathbb{P}$ tal que $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$ y $\bigwedge \alpha < \beta \pi' \leq_{\text{con}}^j \pi_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\pi_\alpha = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_{j-1}, f_j^\alpha, \dots, f_n^\alpha, A^\alpha, G^\alpha)$. Sea

$$\pi' = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_{j-1}, g_j, \dots, g_n, B, H),$$

donde $g_i = \bigcup_{\alpha < \beta} f_i^\alpha$, para $j \leq i \leq n$, $B = \bigcap_{\alpha < \beta} A^\alpha$ y $H(P) = \bigcup_{\alpha < \beta} G^\alpha(P)$.

Si $j > 0$, entonces $f_i^\alpha \in \text{Lv}(\kappa_{i+1}, \kappa_i^{++})$, que es claramente κ_j^{++} -cerrado, luego también $g_i \in \text{Lv}(\kappa_{i+1}, \kappa_i^{++})$. Por el contrario, si $j = 0$ tenemos $f_0^\alpha \in \text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1)$, que sólo es \aleph_1 -cerrado, por lo que hemos de exigir $\beta \leq \omega$. En cualquier caso $\beta < \kappa$, por lo que $B \in U$. Ahora es fácil ver que $\pi' \in \mathbb{P}$ y claramente cumple lo pedido. ■

Dada una condición π de longitud $n \geq j$, llamaremos *restricción* de π a j a $\pi|_j = (P_1, \dots, P_j, f_0, \dots, f_{j-1})$.

Diremos que una condición π *decide*⁸ una fórmula $\Phi \equiv \bigvee x \phi(x, \sigma_1, \dots, \sigma_r)$ si existe un x tal que $\pi \Vdash \phi(\check{x}, \sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Lo representaremos por $\pi \Vdash \Phi$. Es claro que si $\pi' \leq \pi$ y $\pi \Vdash \Phi$, entonces $\pi' \Vdash \Phi$. El teorema principal es el siguiente:

Teorema 17.27 Sea $\Phi \equiv \bigvee x \phi(x, \sigma_1, \dots, \sigma_r)$ una fórmula (metamatemática), con $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in V^{\mathbb{P}}$. Sea $\pi \in \mathbb{P}$ una condición de longitud n y $0 \leq j \leq n$. Existe $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$ que decide Φ salvo extensiones j -directas, es decir, si $\pi'' \leq \pi'$ y $\pi'' \Vdash \Phi$, entonces $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \Vdash \Phi$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que el teorema se sigue de

A) Sea η la restricción a j de una extensión de π . Entonces existe $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$ que cumple el teorema para toda $\pi'' \in \mathbb{P}$ tal que $\pi''|_j = \eta$.

En efecto, admitiendo A), si $j = 0$ el teorema es lo mismo que A), pues $\pi''|_j = \eta$ no es ninguna restricción. Supongamos, pues que $j \neq 0$. Hay a lo sumo κ valores posibles para η , pues a lo sumo hay tantos como elementos tiene

$$\text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1) \times \text{Lv}(\kappa_2 \times \kappa_1^{++}) \times \dots \times \text{Lv}(\kappa_j, \kappa_{j-1}^{++}),$$

o sea, κ_j . Sea $\{\eta_\alpha\}_{\alpha < \kappa_j}$ una enumeración de todos los η 's posibles.

Sea $\pi_0 = \pi$. Definido π_α , definimos $\pi_{\alpha+1}$ como un π' que cumpla A) para π_α y η_α (en el caso de que η_α sea la restricción a j de una extensión de π_α) o $\pi_{\alpha+1} = \pi_\alpha$ (en caso contrario). Definidos $\{\pi_\delta\}_{\delta < \lambda}$, definimos π_λ mediante el teorema anterior.

Tenemos así una sucesión $\{\pi_\alpha\}_{\alpha < \kappa_j}$ y podemos aplicar una vez más el teorema anterior para obtener una extensión j -conservativa común $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$. Veamos que cumple el teorema.

⁸Notemos que no es el mismo concepto de decidir introducido en la prueba de 17.24. Lo habitual en este caso es decir que π decide x .

Si $\pi'' \leq \pi'$ y $\pi'' \parallel \Phi$, sea $\eta_\delta = \pi''|_j$, que es la restricción a j de una extensión de π_δ , luego $\pi_{\delta+1}$ viene dado por A), es decir, $\text{Int}_j(\pi'', \pi_{\delta+1}) \parallel \Phi$.

Como $\pi'' \leq \pi' \leq \pi_{\delta+1}$, se cumple $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \leq \text{Int}_j(\pi'', \pi_{\delta+1})$, luego también $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \parallel \Phi$.

Veamos ahora que A) se sigue de

B) *Sea η la restricción a j de una extensión de π y $l < \omega$. Entonces existe $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$ que cumple el teorema para toda $\pi'' \in \mathbb{P}$ de longitud $n + l$ tal que $\pi''|_j = \eta$.*

En efecto, supuesto B) y fijados η y π , sea $\pi_0 = \pi$, supuesto definido π_l , definimos π_{l+1} como un π' que cumpla B) para η y l (en el supuesto de que η sea la restricción a j de una extensión de π_l) o $\pi_{l+1} = \pi_l$ en caso contrario. Tenemos así $\{\pi_l\}_{l < \omega}$. Sea $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$ una extensión j -conservativa común.

Si $\pi'' \leq \pi'$ y $\pi''|_j = \eta$, entonces la longitud de π'' será $n + l$ para cierto $l < \omega$ y η es la restricción a j de una extensión de π_l , luego π_{l+1} viene dado por B), con lo que $\text{Int}_j(\pi'', \pi_{l+1}) \parallel \Phi$. Como $\pi'' \leq \pi' \leq \pi_{\delta+1}$, se cumple $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \leq \text{Int}_j(\pi'', \pi_{\delta+1})$, luego también $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \parallel \Phi$.

Demostramos B) por inducción sobre l . Digamos que

$$\pi = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_n, A, G).$$

Para $l = 0$ distinguimos dos casos:

1) Existe $\pi^* \leq \pi$ de longitud n tal que $\pi^*|_j = \eta$ y $\pi^* \parallel \Phi$.

Digamos que $\pi^* = (P_1, \dots, P_n, g_0, \dots, g_n, B, H)$ y definimos

$$\pi' = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_{j-1}, g_j, \dots, g_n, B, H).$$

Claramente $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$ y cumple B), pues si $\pi'' \leq \pi'$ tiene longitud n , $\pi''|_j = \eta$ y $\pi'' \parallel \Phi$, entonces, teniendo en cuenta que $\eta = (P_1, \dots, P_j, g_0, \dots, g_{j-1})$, es claro que $\text{Int}_j(\pi'', \pi') = \pi^*$, luego $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \parallel \Phi$.

2) En caso contrario sirve $\pi' = \pi$, porque ninguna función en las hipótesis de B) está también en las hipótesis del teorema.

Supongamos B) para l y probémoslo para $l + 1$. Como la relación \subsetneq está bien fundada en A , podemos extenderla a un buen orden, digamos⁹ \preceq .

Definimos $\{\pi_Q\}_{Q \in A}$ por recurrencia sobre \preceq de modo que se cumpla

$$\text{a) } \pi_Q = (P_1, \dots, P_n, Q, f_0, \dots, f_{j-1}, f_j^Q, \dots, f_n^Q, f^Q, B^Q, H^Q),$$

$$\text{b) } \pi_Q \leq \pi,$$

⁹Consideramos un buen orden \leq en A y definimos

$$P \preceq Q \leftrightarrow (P, \subsetneq) < \text{rang}(Q, \subsetneq) \vee (\text{rang}(P, \subsetneq) = \text{rang}(Q, \subsetneq) \wedge P \leq Q).$$

- c) Si $P, Q, T \in A$, $P \subsetneq T$, $Q \subsetneq T$, $T \in B^P \cap B^Q$, entonces $H^P(T)$ y $H^Q(T)$ son compatibles (de hecho, $Q \preceq P \rightarrow H^Q(T) \subset H^P(T)$).

En particular, π_Q es una extensión de π de longitud $n+1$ y $\pi_Q|_j = \pi|_j$.

Sea $P \in A$ y supongamos definido π_Q para $Q \prec P$. En particular para $Q \subsetneq P$. Definimos

$$\rho_P = (P_1, \dots, P_n, P, f_0, \dots, f_n, g^P, A^P, G^P),$$

con

$$g^P = G(P) \cup \bigcup_{Q \subsetneq P} H^Q(P),$$

donde se entiende que $Q \in A$ y que si $P \notin B^Q$ entonces $H^Q(P) = G(P)$,

$$A^P = \{T \in A \mid T \in \bigcap_{Q \subsetneq T} B^Q \wedge P \subsetneq T\},$$

donde Q recorre sólo los conjuntos $Q \in A$, $Q \prec P$,

$$G^P(T) = G(T) \cup \bigcup_{Q \subsetneq T} H^Q(T),$$

donde Q recorre sólo los conjuntos $Q \in A$, $Q \prec P$.

Veamos que, efectivamente, $\rho_P \in \mathbb{P}$.

Como $P \in A$, se cumple $P_n \subsetneq P$ y $f_n \in \text{Lv}(P \cap \kappa, \kappa_n^{++})$.

Por la propiedad c), las funciones que forman g^P son compatibles dos a dos, luego g^P es una función. Además el número de conjuntos $Q \subsetneq P$ es a lo sumo

$$|P|^{<P \cap \kappa} = ((P \cap \kappa)^+)^{<P \cap \kappa} \leq (P \cap \kappa)^+ < (P \cap \kappa)^{++},$$

y $\text{Lv}(\kappa, (P \cap \kappa)^{++})$ es $(P \cap \kappa)^{++}$ -cerrado, luego¹⁰ $g^P \in \text{Lv}(\kappa, (P \cap \kappa)^{++})$.

Se cumple que $A^P \in U$, pues es la intersección $\{T \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+) \mid P \subsetneq T\}$ con A y con la intersección diagonal de los conjuntos

$$X_Q = \begin{cases} B^Q & \text{si } Q \in A, Q \prec P, \\ \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $T \in A$, entonces $g^P \in \text{Lv}(T \cap \kappa, (P \cap \kappa)^{++})$. En efecto, por una parte

$$G(P) \in \text{Lv}(P \cap \kappa, \kappa_n^{++}) \subset \text{Lv}(T \cap \kappa, (P \cap \kappa)^{++}),$$

y por otra, si $Q \in A$, $Q \subsetneq P$, $P \in B^Q$, entonces $H^Q(P) \in \text{Lv}(P \cap \kappa, (Q \cap \kappa)^{++})$ y, como $Q \subsetneq P \subsetneq T$, también $H^Q(P) \in \text{Lv}(T \cap \kappa, (P \cap \kappa)^{++})$.

¹⁰Éste es el punto de la prueba que requiere trabajar con $\text{Lv}(\kappa_{i+1}, \kappa_i^{++})$ en lugar de con $\text{Lv}(\kappa_{i+1}, \kappa_i)$, que sería más natural.

Si $T \in A^P$, entonces $G^P(T) \in \text{Lv}(\kappa, (T \cap \kappa)^{++})$. En efecto, tenemos que $G(P) \in \text{Lv}(\kappa, \kappa_n^{++}) \subset \text{Lv}(\kappa, (T \cap \kappa)^{++})$ y, para cada $Q \underset{\sim}{\subset} T$, se cumple que $H^Q(T) \in \text{Lv}(\kappa, (T \cap \kappa)^{++})$. Por la propiedad c), las funciones $H^Q(T)$ son compatibles dos a dos. El mismo razonamiento empleado con g^P prueba que a lo sumo hay $(T \cap \kappa)^+$ valores posibles para Q , por lo que la unión sigue en $\text{Lv}(\kappa, (T \cap \kappa)^{++})$.

Por último, si $T \underset{\sim}{\subset} T'$ están en A^P , entonces, para cada $Q \underset{\sim}{\subset} T$, se cumple que $H^Q(T) \in \text{Lv}(T' \cap \kappa, (T \cap \kappa)^{++})$, luego $G^P(T)$ está en este mismo conjunto.

La condición ρ_P cumple claramente las propiedades a), b) y c). Concretamente, para la propiedad c) hemos de ver que si $T \in B^Q \cap A^P$ y $Q \prec P$, entonces $H^Q(T) \subset G^P(T)$, lo cual es obvio.

Si η no es la restricción a j de una extensión de ρ_P , tomamos $\pi_P = \rho_P$, y en caso contrario tomamos π_P como un π' según B) para l , con ρ_P como π y $n+1$ en lugar de n . Así se sigue cumpliendo a), b) y c). En efecto, a) se cumple porque $\pi_P \leq_{\text{con}}^j \rho_P$, b) se cumple porque $\pi_P \leq \rho_P \leq \pi$ y c) porque si $T \in B^Q \cap A^P$ y $Q \prec P$, entonces $H^Q(T) \subset G^P(T) \subset H^P(T)$.

Así tenemos construida la familia $\{\pi_P\}_{P \in A}$. Veamos que existe un $B \in U$ tal que $B \subset A$ y de modo que, para todo $P \in B$ se cumple $(f_j^P, \dots, f_n^P) = (g_j, \dots, g_n)$, para ciertas funciones fijas g_i .

En efecto, para $j \leq i < n$, tenemos que $f_i^P \in \text{Lv}(\kappa_{i+1}, \kappa_i^{++})$, luego hay $\kappa_n < \kappa$ valores posibles para $(f_j^P, \dots, f_{n-1}^P)$ y por la κ -completitud de U existe un conjunto $B_1 \subset A$, $B_1 \in U$ tal que $(f_j^P, \dots, f_{n-1}^P)$ es constante en B_1 . Por otra parte, $f_n^P \in \text{Lv}(P \cap \kappa, \kappa_n^{++})$, pero como $P \cap \kappa$ es inaccesible, de hecho existe un $\alpha_P \in P \cap \kappa$ tal que $f_n^P \in \text{Lv}(\alpha_P, \kappa_n^{++})$. Aplicando la normalidad de U a la aplicación $P \mapsto \alpha_P$ encontramos un $B_2 \subset B_1$, $B_2 \in U$ donde α_P es constante igual a α_0 . Ahora, para $P \in B_2$, las posibilidades para f_n^P son a lo sumo $|\text{Lv}(\alpha_P, \kappa_n^{++})| < \kappa$, luego otra vez por normalidad existe un $B \subset B_2$, $B \in U$ donde f_n^P es constante.

Definimos

$$\pi' = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_{j-1}, g_j, \dots, g_n, C, H),$$

donde $C = B \cap \Delta_Q B^Q$ (entendiendo que $B^Q = \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+)$ si $Q \notin A$) y $H(P) = f^P$.

Es claro que $\pi' \in \mathbb{P}$. Notemos únicamente si $P, Q \in C$, $P \underset{\sim}{\subset} Q$, se cumple que $H(P) = f^P \in \text{Lv}(Q \cap \kappa, (P \cap \kappa)^{++})$ porque $Q \in B^P$ y f^P forma parte de la condición π_P . Es claro además que

$$\bigcup_{Q \underset{\sim}{\subset} P} H^Q(P) \subset f^P \quad \text{y} \quad G(P) \subset f^P, \quad (17.11)$$

pues π_P extiende a ρ_P .

Veamos que π' cumple B) para $l+1$. Claramente, $\pi' \leq_{\text{con}}^j \pi$. Supongamos que $\pi'' \leq \pi'$ es una condición de longitud $n+l+1$, $\pi''|_j = \eta$ y $\pi'' \parallel \Phi$. Sea

$\rho = \text{Int}_j(\pi'', \pi')$. Entonces $\rho \leq_{\text{dir}}^j \pi'$, luego

$$\rho = (P_1, \dots, P_n, P, Q_1, \dots, Q_l, h_0, \dots, h_{j-1}, g_j, \dots, g_n, f^P, f^{Q_1}, \dots, f^{Q_l}, C', H'),$$

para ciertos $P, Q_1, \dots, Q_l \in C$.

Ahora resulta que $\pi'' \leq \rho \leq \pi_P$. En efecto,¹¹ como $P \in B$, resulta que

$$\pi_P = (P_1, \dots, P_n, P, f_0, \dots, f_{j-1}, g_j, \dots, g_n, f^P, B^P, H^P).$$

Teniendo en cuenta que $\eta = (P_1, \dots, P_j, h_0, \dots, h_{j-1})$ y que η es la restricción a j de una extensión de π , vemos que las funciones h_i extienden a las f_i . Además $Q_i \in B^P$, $H^P(Q_i) \subset f^{Q_i}$ por (17.11), si $Q \in C'$ entonces $P \subseteq Q$ y $Q \in C$, luego $Q \in B^P$, y si $Q \in C'$ entonces, por (17.11) tenemos que $H^P(Q) \subset f^Q = H(Q) = H'(Q)$.

Así pues, $\pi'' \leq \pi_P$, $\pi''|_j = \eta$, luego η es la restricción a j de una extensión de ρ_P y π'' tiene longitud $n + 1 + l$, luego por construcción de π_P podemos aplicar B) y concluir que $\text{Int}_j(\pi'', \pi_P) \parallel \Phi$.

Pero $\rho = \text{Int}_j(\pi'', \rho) \leq \text{Int}_j(\pi'', \pi_P)$ y, por consiguiente, $\rho \parallel \Phi$. ■

En realidad, el resultado que vamos a necesitar es la siguiente consecuencia del teorema anterior:

Teorema 17.28 *Sea $\pi \in \mathbb{P}$ una condición de longitud n , sea $1 \leq j \leq n$, $\alpha \leq \kappa_j^+$ y $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ de modo que $\pi \Vdash \tau : \check{\alpha} \longrightarrow \Omega$. Entonces existe $\pi' \leq \pi$ tal que para todo $\pi'' \leq \pi'$, todo $\beta < \alpha$ y todo γ tales que $\pi'' \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}$, se cumple $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a construir una sucesión decreciente $\{\pi_\beta\}_{\beta < \alpha}$ de extensiones j -conservativas de π . Partimos de $\pi_0 = \pi$, tomamos $\pi_{\beta+1} \leq_{\text{con}}^j \pi_\beta$ que cumpla el teorema anterior para $\Phi \equiv \forall x \tau(\check{\beta}) = x$ y, supuestos definidos $\{\pi_\delta\}_{\delta < \lambda}$, tomamos π_λ según el teorema 17.26. Finalmente, sea π' una extensión común de todos los π_β .

Si $\pi'' \leq \pi'$ y $\pi'' \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}$, entonces $\pi'' \leq \pi_\beta$ y $\pi'' \parallel \forall x \tau(\check{\beta}) = x$. Por lo tanto $\text{Int}_j(\pi'', \pi_\beta) \parallel \forall x \tau(\check{\beta}) = x$, es decir, existe un ordinal γ' tal que $\text{Int}_j(\pi'', \pi_\beta) \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}'$. Pero entonces también $\pi'' \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}'$, lo que obliga a que $\gamma' = \gamma$.

Por otra parte, $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \leq \text{Int}_j(\pi'', \pi_\beta)$, luego también se cumple que $\text{Int}_j(\pi'', \pi') \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}$. ■

La extensión genérica A partir de aquí consideramos un modelo transitivo numerable M de ZFC en el que existe un cardinal κ que es κ^+ -supercompacto y consideramos todo lo anterior relativizado a M . Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M .

¹¹Éste es el punto de la prueba donde se requiere la existencia de la función G en cada condición, para obligar a que en ρ aparezca f^P .

Es claro que toda condición puede extenderse hasta una condición de longitud arbitrariamente grande (por ejemplo, mediante extensiones directas), luego G contiene condiciones de cualquier longitud. Si dos condiciones son compatibles, la P -parte de una extiende a la de la otra, luego las P -partes de las condiciones de G determinan una sucesión infinita

$$P_1 \subset \underset{\sim}{\subset} P_2 \subset \underset{\sim}{\subset} P_3 \subset \cdots$$

a la que llamaremos P -parte de G . A su vez ésta determina una sucesión creciente de cardinales fuertemente inaccesibles^M $\kappa_n = P_n \cap \kappa$.

Por otra parte, dado un $n < \omega$, las componentes n -simas de las f -partes de las condiciones en G de longitud $\geq n$ son compatibles en $\text{Lv}(\kappa_{n+1}, \kappa_n^{++})^M$ (o $\text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1)^M$ para $n = 0$). También es claro que si $\pi \in G$ tiene longitud $> n$ y D es un conjunto denso en $\text{Lv}(\kappa_{n+1}, \kappa_n^{++})^M$, el conjunto de las condiciones $\pi' \leq \pi$ con $f_n \in D$ es denso bajo π , luego en G hay condiciones con $f_n \in D$. De aquí se sigue que la unión de las funciones f_n de las condiciones de G de longitud $\geq n$ determinan una función¹² $f_n : \kappa_{n+1} \times \kappa_n^{++} \rightarrow \kappa_{n+1}$ con la propiedad de que, para cada $\alpha < \kappa_{n+1}$, la función $f_{n\alpha}$ dada por $f_{n\alpha}(\beta) = f_n(\alpha, \beta)$ cumple que

$$f_{n\alpha} : \kappa_n^{++} \rightarrow \alpha \text{ suprayectiva.}$$

(Para $n = 0$ tenemos $f_0 : \kappa_1 \times \omega_1^M \rightarrow \kappa_1$ con $f_{0\alpha} : \omega_1^M \rightarrow \alpha$ suprayectiva.)

Esto significa que en $M[G]$ no hay cardinales entre \aleph_1^M y κ_1 , ni entre cada κ_n^{++} y κ_{n+1} . A la sucesión $\{f_n\}_{n \in \omega}$ la llamaremos f -parte de G .

Teorema 17.29 *La sucesión $\{\kappa_n\}$ es cofinal en κ y la sucesión $\{\sup P_n\}$ es cofinal en κ^+ .*

DEMOSTRACIÓN: El argumento es el mismo en los dos casos: sea $\alpha < \kappa$ (resp. $< \kappa^+$). Basta probar que el conjunto de condiciones $\pi \in \mathbb{P}$ tales que para cierto $n < \omega$ se cumple $\alpha \in P_n$ es denso en \mathbb{P} , pues entonces existirá una condición $\pi \in G$ con $\alpha \in P_n \cap \kappa = \kappa_n$ (resp. $\alpha \leq \sup P_n$). Ahora bien, dada una condición $\pi = (P_1, \dots, P_l, f_0, \dots, f_l, A, H)$, existe $P \in A$ tal que $\alpha \in P$ (porque $B = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+) \mid \alpha \in P\} \in U$, luego $A \cap B \neq \emptyset$). Ahora basta considerar la extensión directa de π que añade P a la P -parte. ■

Como consecuencia, ahora sabemos que los cardinales^{M[G]} menores que κ son a lo sumo los de la sucesión

$$\aleph_0, \aleph_1^M, \kappa_1, \kappa_1^+, \kappa_1^{++}, \kappa_2, \kappa_2^+, \kappa_2^{++}, \kappa_3, \kappa_3^+, \kappa_3^{++}, \dots \quad (17.12)$$

Pero de momento no sabemos si alguno de ellos es un cardinal^{M[G]}. Lo que sí que sabemos es que κ y $(\kappa^+)^M$ tienen cofinalidad numerable en $M[G]$. Esto implica que $(\kappa^+)^M$ no puede ser un cardinal^{M[G]}, ya que si lo fuera sería un cardinal límite^{M[G]} y también un cardinal límite^M, lo cual es falso.

¹²En lo sucesivo y, mientras no se indique lo contrario, se entenderá que α^+ significa $(\alpha^+)^M$.

Reduciremos el problema de estudiar los cardinales de $M[G]$ al estudio de los cardinales en extensiones genéricas intermedias mucho más simples. Para cada $j < \omega$ definimos

$$\mathbb{P}_j = \text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1)^M \times \text{Lv}(\kappa_2, \kappa_1^{++})^M \times \cdots \times \text{Lv}(\kappa_j, \kappa_{j-1}^{++})^M \in M.$$

Llamaremos $G|_j$ como el conjunto de las j -tuplas (f_0, \dots, f_{j-1}) tales que existe $\pi \in G$ de la forma $\pi = (P_0, \dots, P_l, f_0, \dots, f_l, A, H)$, con $l \geq j$. Es claro que $G|_j$ es un filtro \mathbb{P}_j -genérico sobre M .

Teorema 17.30 *Si $x \in M[G]$, $x \subset \kappa_j^+$, entonces $x \in M[G|_j]$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\mu = \kappa_j^+$ y sea $x = \tau_G$, donde τ es un buen nombre para un subconjunto de $\check{\mu}$. Así $\mathbb{1} \Vdash \tau \subset \check{\mu}$.

El filtro G contiene una condición de longitud $\geq j$, que podemos reducir a

$$\pi = (P_1, \dots, P_{j-1}, \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}, A, H),$$

donde $A = \{P \in D \mid P_{j-1} \subset P\}$ y $H(P) = \mathbb{1}$ para todo $P \in A$.

Sea $i : \mathbb{P}_j \rightarrow \mathbb{P}$ dada por

$$(f_0, \dots, f_{j-1}) \mapsto (P_1, \dots, P_{j-1}, f_0, \dots, f_{j-1}, A, H).$$

Es claro que si $p \in \mathbb{P}_j$, entonces $i(p) \in G \leftrightarrow p \in G|_j$. Por lo tanto, la aplicación inducida $i : M^{\mathbb{P}_j} \rightarrow M^{\mathbb{P}}$ cumple que, $i(\sigma)_G = \sigma_{G|_j}$, para todo $\sigma \in M^{\mathbb{P}_j}$. Llamaremos $\tilde{\sigma} = i(\sigma)$.

Veamos que para cada $\pi' \leq \pi$ existen $\rho \leq \pi'$ y $\sigma \in M^{\mathbb{P}_j}$ tales que $\rho \Vdash \tau = \tilde{\sigma}$.

Esto prueba el teorema, pues entonces el conjunto

$$\{\rho \in \mathbb{P} \mid \forall \sigma \in M^{\mathbb{P}_j} \rho \Vdash \tau = \tilde{\sigma}\} \in M$$

es denso bajo π , luego existe un $\rho \in G$ y un $\sigma \in M^{\mathbb{P}_j}$ de modo que $\rho \Vdash \tau = \tilde{\sigma}$, con lo que $x = \tau_G = \tilde{\sigma}_G = \sigma_{G|_j} \in M[G|_j]$.

Extendiendo π' podemos suponer que su longitud es mayor que j . Tomamos $\tau' \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \tau'$ es la función característica de τ en $\check{\mu}$. Podemos aplicarle el teorema 17.28, que nos da un $\rho' \leq \pi'$ de modo que si $\rho'' \leq \rho'$, $\beta \in \mu$ y

$$\rho'' \Vdash \check{\beta} \in \tau, \quad \text{o bien} \quad \rho'' \Vdash \check{\beta} \notin \tau,$$

entonces $\text{Int}_j(\rho'', \rho')$ fuerza lo mismo.

Sea $\rho' = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_n, A, H)$. Vamos a definir (en M) una partición $F : [A]^{(<\omega)} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}_j \times \mu \times 3)$ (ver 16.22). Notemos que $|\mathbb{P}_j| = \kappa_j$, luego tenemos que $|\mathcal{P}(\mathbb{P}_j \times \mu \times 3)| < \kappa$.

Si $Q_1 \subset \cdots \subset Q_l$, definimos $F(\{Q_1, \dots, Q_l\})$ como el conjunto de todas las ternas $(\eta, \beta, i) \in \mathbb{P}_j \times \mu \times 3$ tales que $\eta = (g_0, \dots, g_{j-1})$ con $f_i \subset g_i$ y

- a) Si $i = 0$, la extensión j -directa de ρ' determinada por (Q_1, \dots, Q_l) y η fuerza $\check{\beta} \notin \tau$.

- b) Si $i = 1$, la extensión j -directa de ρ' determinada por (Q_1, \dots, Q_i) y η fuerza $\check{\beta} \in \tau$.
- c) Si $i = 2$, la extensión j -directa de ρ' determinada por (Q_1, \dots, Q_i) y η no fuerza $\check{\beta} \in \tau$ ni $\check{\beta} \notin \tau$.

Por el teorema 16.22, existe $B \in U$, $B \subset A$ tal que F es constante en cada conjunto $[B]^{(l)}$. Sea E_l este valor constante. Notemos que $E = \{E_l\}_{l < \omega} \in M$.

Notemos que si $(\eta, \beta, 1) \in E_l$, no puede ocurrir que $(\eta', \beta, 0) \in E_{l'}$ para un η' compatible con η . En efecto, en tal caso, tomando una extensión común $\eta'' \leq \eta$, $\eta'' \leq \eta'$, sea $m = \max\{l, l'\}$ y $Q_1 \simeq \dots \simeq Q_m \in B$, llegamos a que la extensión j -directa de ρ' determinada por η'' y (Q_1, \dots, Q_m) fuerza a la vez $\check{\beta} \in \tau$ y $\check{\beta} \notin \tau$, pues extiende tanto a la extensión j -directa de ρ' determinada por η y (Q_1, \dots, Q_l) y a la extensión j -directa de ρ' determinada por η' y $(Q_1, \dots, Q_{l'})$.

Sea $\rho = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_n, B, H|_B)$. Veamos que cumple lo pedido. Tomamos $\sigma \in M^{\mathbb{P}_j}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_j} \Vdash \sigma = \{\beta < \check{\mu} \mid \forall l < \omega \forall \eta \in \Gamma (\eta, \beta, 1) \in \check{E}_l\},$$

donde Γ es el nombre canónico del filtro genérico.

Veamos que si G' es un filtro \mathbb{P}_j -genérico sobre M y $(f_0, \dots, f_{j-1}) \in G'$, entonces, o bien $(\eta, \beta, 1) \in E_l$, para ciertos $l < \omega$ y $\eta \in G'$, o bien $(\eta, \beta, 0) \in E_l$ para ciertos $l < \omega$ y $\eta \in G'$. (Antes hemos visto que no pueden darse los dos casos a la vez.)

En efecto, sea $\eta' \in \mathbb{P}_j$ tal que $\eta' \leq (f_0, \dots, f_{j-1})$. Consideremos

$$\pi_0 = (P_1, \dots, P_n, g_0, \dots, g_{j-1}, f_j, \dots, f_n, B, H|_B) \in \mathbb{P},$$

donde $(g_0, \dots, g_{j-1}) = \eta'$, y tomemos una extensión $\pi_1 \leq \pi_0$ tal que

$$\pi_1 \Vdash \check{\beta} \in \tau \quad \text{o bien} \quad \pi_1 \Vdash \check{\beta} \notin \tau.$$

Como $\pi_1 \leq \pi_0 \leq \rho \leq \rho'$, por construcción de ρ' tenemos que

$$\text{Int}_j(\pi_1, \rho') \Vdash \check{\beta} \in \tau \quad \text{o bien} \quad \text{Int}_j(\pi_1, \rho') \Vdash \check{\beta} \notin \tau.$$

Pero $\text{Int}_j(\pi_1, \rho')$ es la extensión j -directa de ρ' determinada por ciertos $Q_1, \dots, Q_l \in B$ (están en B porque forman parte de π_1) y $\eta'' \leq \eta'$ (porque η'' está en π_1). Por consiguiente $(\eta'', \beta, 1) \in E_l$ o bien $(\eta'', \beta, 0) \in E_l$.

Con esto hemos probado que el conjunto

$$\{\eta \in \mathbb{P}_j \mid \forall l < \omega ((\eta, \beta, 1) \in E_l \vee (\eta, \beta, 0) \in E_l)\} \in M$$

es denso bajo (f_0, \dots, f_{j-1}) , luego corta a G' , que es lo que había que probar.

Como consecuencia,

$$(f_0, \dots, f_{j-1}) \Vdash \sigma = \check{\mu} \setminus \{\beta < \check{\mu} \mid \forall l < \omega \forall \eta \in \Gamma (\eta, \beta, 0) \in \check{E}_l\}. \quad (17.13)$$

Veamos finalmente que $\rho \Vdash \tau = \tilde{\sigma}$. En caso contrario existen $\rho_0 \leq \rho$ y $\beta < \mu$ tales que

$$\rho_0 \Vdash \check{\beta} \in \tau \wedge \check{\beta} \notin \tilde{\sigma} \quad \text{o bien} \quad \rho_0 \Vdash \check{\beta} \notin \tau \wedge \check{\beta} \in \tilde{\sigma}.$$

Supongamos el primer caso. Como $\rho_0 \leq \rho \leq \rho'$, por construcción de ρ' se cumple que $\text{Int}_j(\rho_0, \rho') \Vdash \check{\beta} \in \tau$, pero $\text{Int}_j(\rho_0, \rho')$ es la extensión j -directa de ρ' determinada por un cierto $\eta \in \mathbb{P}_j$ y por $Q_1, \dots, Q_l \in B$ (están en B porque están en $\rho_0 \leq \rho$). Por definición de F tenemos que $(\eta, \beta, 1) \in F(\{Q_1, \dots, Q_l\}) = E_l$. Si G es \mathbb{P} -genérico sobre M y $\rho_0 \in G$, entonces $\beta \in \tau_G$ y $\beta' \notin \tilde{\sigma}_G = \sigma_{G|_j}$, pero como $\rho_0 \in G$, se cumple que $\eta \in G|_j$, y la definición de σ nos da que $\beta \in \sigma_{G|_j}$, contradicción.

En el segundo caso razonamos igualmente usando (17.13) en lugar de la definición de σ . Hemos de observar además que si $\rho_0 \in G$ entonces $\rho \in G$, luego $(f_0, \dots, f_{j-1}) \in G|_j$. ■

Este teorema nos aporta mucha información sobre $M[G]$. Por lo pronto, los cardinales $^{M[G]} \leq (\kappa_j^+)^M$ son los mismos que los cardinales $^{M[G|_j]} \leq \kappa_j^+$, pues si $\mu \leq \kappa_j^+$ no es un cardinal $^{M[G]}$, existe una biyección $f : \alpha \rightarrow \mu$, con $\alpha < \mu$ y $f \in M[G]$. Tomamos $g \in M$ tal que $g : \mu \times \mu \rightarrow \mu$ biyectiva, con lo que $g[f] \in M[G]$ y, por el teorema anterior, $g[f] \in M[G|_j]$, luego $f \in M[G|_j]$ y μ no es tampoco un cardinal $^{M[G|_j]}$.

Similarmente, si $\mu \leq (\kappa_j^+)^M$ es un cardinal $^{M[G]}$, entonces el teorema anterior nos da que $(\mathcal{P}\mu)^{M[G]} = (\mathcal{P}\mu)^{M[G|_j]}$, de donde $(2^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^{M[G|_j]}$.

Los cardinales y la función del continuo en las extensiones $M[G|_j]$ son fáciles de calcular con las técnicas del capítulo V. En concreto es fácil ver que los cardinales infinitos en $M[G]$ bajo κ resultan ser \aleph_0, \aleph_1^M y los κ_n, κ_n^+ y κ_n^{++} . Si queremos calcular explícitamente la función del continuo conviene anticipar una hipótesis que necesitaremos después: a partir de aquí suponemos $(2^\kappa = \kappa^{++})^M$. Entonces, como todos los subconjuntos M de κ están en $\text{Ult}_U(M)$, se cumple $(2^\kappa > \kappa^+)^{\text{Ult}}$, luego en la definición (17.10) del conjunto D podemos añadir la condición $2^{P \cap \kappa} > (P \cap \kappa)^+$, con lo que tenemos $(2^{\kappa_n} \geq \kappa_n^{++})^M$ para todo n .

Por no complicar la notación estudiamos los cardinales y la función del continuo en $M[G|_3]$, aunque todos los razonamientos son generales. La técnica es la misma que empleamos en el teorema 5.25, basándonos ahora en los teoremas 5.31 y 5.33. Tenemos que

$$\mathbb{P}_3 = \text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1)^M \times \text{Lv}(\kappa_2, \kappa_1^{++})^M \times \text{Lv}(\kappa_3, \kappa_2^{++})^M.$$

Según 6.29, podemos factorizar $G|_3 = G_1 \times G_2 \times G_3$ y, según el teorema del producto, $M[G|_3] = M[G_3][G_2][G_1]$.

Según 5.31, los cardinales (y las cofinalidades) en $M[G_3]$ son los mismos que en M , salvo que se han colapsado todos los cardinales M entre $(\kappa_2^{++})^M$ y κ_3 . Según el teorema 5.33, la función del continuo en $M[G_3]$ es la misma que en M , salvo que $(2^{\kappa_2} = 2^{\kappa_2^+} = \kappa_2^{++})^{M[G_3]}$ y $(2^{\kappa_2^{++}} = \kappa_3)^{M[G_3]}$ (notemos que κ_2^+ y κ_2^{++} es lo mismo en M y en $M[G_3]$). En particular, los cardinales κ_n (para $n \neq 3$) siguen siendo fuertemente inaccesibles en $M[G_3]$ y, teniendo

en cuenta que $\text{Lv}(\kappa_3, \kappa_2^{++})^M$ es κ_2^{++} -cerrado^M, es claro que $\text{Lv}(\kappa_2, \kappa_1^{++})^M = \text{Lv}(\kappa_2, \kappa_1^{++})^{M[G_3]}$. Esto justifica que podamos usar los teoremas sobre Lv para estudiar la extensión $M[G_3][G_2]$. Razonamos igualmente y luego usamos que el producto $\text{Lv}(\kappa_2, \kappa_1^{++})^M \times \text{Lv}(\kappa_3, \kappa_2^{++})^M$ es κ_1^{++} -cerrado^M para concluir que $\text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1)^M = \text{Lv}(\kappa_1, \aleph_1)^{M[G_3][G_2]}$, lo que nos permite abordar la tercera extensión.

En resumen, llegamos a que los cardinales infinitos^{M[G₃]} $\leq \kappa_3^{++}$ son exactamente los indicados en (17.12) y, además, en $M[G_3]$ se cumple:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1^M, \quad 2^{\aleph_1^M} = \kappa_1, \quad 2^{\kappa_1} = 2^{\kappa_1^+} = \kappa_1^{++}, \quad 2^{\kappa_1^{++}} = \kappa_2,$$

$$2^{\kappa_2} = 2^{\kappa_2^+} = \kappa_2^{++}, \quad 2^{\kappa_2^{++}} = \kappa_3.$$

Según hemos dicho, esto es obviamente válido en general para todo $M[G|_j]$, con lo que también es cierto en $M[G]$: los cardinales infinitos^{M[G]} $\leq \kappa$ son exactamente $\aleph_0, \aleph_1^{M[G]}$ y los κ_n, κ_n^+ y κ_n^{++} . Por lo tanto κ es un cardinal^{M[G]} (porque es supremo de cardinales) y, como el conjunto de cardinales^{M[G]} $< \kappa$ tiene ordinal ω , ha de ser $\kappa = \aleph_\omega^{M[G]}$. Esto nos da los siguientes valores para la función \aleph y para la función del continuo en $M[G]$:

μ	\aleph_0	\aleph_1^M	κ_1	κ_1^+	κ_1^{++}	κ_2	κ_2^+	κ_2^{++}	κ_3	κ_3^+	κ_3^{++}	\dots
\aleph	\aleph_0	\aleph_1	\aleph_2	\aleph_3	\aleph_4	\aleph_5	\aleph_6	\aleph_7	\aleph_8	\aleph_9	\aleph_{10}	\dots
2^μ	\aleph_1	\aleph_2	\aleph_4	\aleph_4	\aleph_5	\aleph_7	\aleph_7	\aleph_8	\aleph_{10}	\aleph_{10}	\aleph_{11}	\dots

En particular ($\bigwedge n < \omega \ 2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$)^{M[G]} o, dicho de otro modo, (\aleph_ω es un límite fuerte)^{M[G]}.

Hemos visto antes que κ^+ se colapsa en $M[G]$. Ahora podemos probar que, en cambio, κ^{++} se conserva. Por lo tanto $\kappa^{++} = \aleph_{\omega+1}^{M[G]}$.

Teorema 17.31 κ^{++} es un cardinal^{M[G]}.

DEMOSTRACIÓN: Si $\xi = \kappa^{++}$ no es un cardinal^{M[G]}, entonces es un ordinal límite singular. Sea μ su cofinalidad^{M[G]}. Como $\mu < \kappa^{++}$ ha de ser un cardinal regular^{M[G]}, necesariamente $\mu < \kappa$ (no puede ser κ^+ porque no es un cardinal^{M[G]} y no puede ser κ porque es singular^{M[G]}), luego existe un $j < \omega$ tal que $\mu < \kappa_j$. Sea $\tau_G : \mu \rightarrow \xi$ cofinal y sea $\pi \in G$ tal que $\pi \Vdash \tau : \check{\mu} \rightarrow \check{\xi}$ cofinal. Extendiendo π podemos suponer que su longitud es mayor que j . Aplicamos 17.28 para obtener $\pi' \leq \pi$ tal que si $\pi'' \leq \pi'$ y $\pi'' \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}$, para cualesquiera $\beta < \mu$ y γ , entonces $\text{Int}_j(\pi'', \pi')$ fuerza lo mismo. Para cada $\beta < \mu$ sea

$$A_\beta = \{ \gamma < \kappa^{++} \mid \forall \pi'' \leq \pi' \ \pi'' \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma} \} \in M.$$

Admitamos —de momento— que (en M) $\bigwedge \beta < \mu \ |A_\beta| \leq \kappa^+$.

Entonces $\bigcup_{\beta < \mu} A_\beta$ tiene cardinal^M $\leq \kappa^+$, luego está acotado en κ^{++} , digamos por $\delta < \kappa^{++}$. Esto implica que $\tau_G : \mu \rightarrow \delta$, lo que contradice que sea cofinal en κ^{++} y el teorema queda probado.

Veamos, pues, que $(|A_\beta| \leq \kappa^+)^M$. Todo lo que sigue se entiende relativizado a M . Para cada $\gamma \in A_\beta$, sea $\pi_\gamma \in \mathbb{P}$ tal que $\pi_\gamma \leq \pi'$ y $\pi_\gamma \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}$. Por la construcción de π' podemos suponer que $\pi_\gamma \leq_{\text{dir}}^j \pi'$. Más concretamente, π_γ será la extensión j -directa de π' determinada por ciertos $Q_1^\gamma, \dots, Q_{I_\gamma}^\gamma \in A$ y cierto $\eta_\alpha \in \mathbb{P}_j$.

Si $|A_\beta| = \kappa^{++}$, como $|\mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+)| = \kappa^+$ y $|\mathbb{P}_j| < \kappa$, ha de existir $B \subset A_\beta$ con $|B| = \kappa^{++}$ tal que para todo $\gamma \in B$ se cumpla que las sucesiones $\{Q_1^\gamma, \dots, Q_{I_\gamma}^\gamma\}$ y $\{\eta_\gamma\}$ sean constantes. En particular, si $\gamma_1, \gamma_2 \in B$ son distintos, tenemos que $\pi_{\gamma_1} = \pi_{\gamma_2}$, lo cual es imposible, porque fuerzan afirmaciones contradictorias. ■

El modelo M_0 Ya estamos cerca de nuestro objetivo, pero nos encontramos con un último problema. Recordemos que nuestra intención era violar la HCS en \aleph_ω . Lo tenemos casi todo arreglado, pues en $M[G]$ se cumple que \aleph_ω es un límite fuerte y bastaría probar que $2^\kappa \geq \kappa^{++}$ para contradecir la HCS. Ahora bien, sabemos que $(2^\kappa = \kappa^{++})^M$, pero, como κ^+ se colapsa en $M[G]$, esto no impide que $(2^\kappa = \kappa^+)^{M[G]}$. Para superar este inconveniente pasaremos a un modelo intermedio $M \subset M_0 \subset M[G]$.

Concretamente, aplicamos el teorema 7.35 para obtener el modelo

$$M_0 = M[\{\kappa_n\}_{n < \omega}, \{f_n\}_{n < \omega}],$$

es decir, el menor modelo de ZF que extiende a M y contiene las sucesiones $\{\kappa_n\}_{n < \omega}$ y $\{f_n\}_{n < \omega}$. Para aplicar 7.35 basta observar que estas sucesiones pueden codificarse con un subconjunto de M . Por ejemplo,

$$A = \bigcup_{n < \omega} ((\kappa_n \times \{n\} \times \{0\}) \cup (f_n \times \{n\} \times \{1\})) \subset M, \quad A \in M[G].$$

A partir de $\{f_n\}$ puede reconstruirse cada filtro $G|_j$, luego $G|_j \in M_0$ y, por consiguiente, $M[G|_j] \subset M_0$. El teorema 17.30 nos da que M_0 y $M[G]$ tienen los mismos subconjuntos acotados de κ . De aquí se sigue que los cardinales $^{M_0} \kappa < \kappa$ son los mismos que los cardinales $^{M[G]} \kappa$, al igual que la función del continuo. Por lo tanto, también $\kappa = \aleph_\omega^{M_0}$ y, obviamente, κ^{++} sigue siendo un cardinal en M_0 (por serlo en $M[G]$).

Claramente $(2^\kappa)^{M_0} \geq (\kappa^{++})^M$, luego si demostramos que κ^+ sigue siendo un cardinal en M_0 , tendremos que $(\kappa^{++})^M = (\kappa^{++})^{M_0}$, luego en M_0 se cumplirá que \aleph_ω es un límite fuerte y $2^{\aleph_\omega} \geq \aleph_{\omega+2}$, en contradicción con la HCS.

Teorema 17.32 κ^+ es un cardinal M_0 .

DEMOSTRACIÓN: Casi toda la prueba del teorema 17.31 sigue siendo válida: si $\xi = \kappa^+$ no es un cardinal M_0 , su cofinalidad M_0 ha de ser un cardinal $^{M_0} \mu < \kappa$, luego existe un $j < \omega$ tal que $\mu < \kappa_j$. Sea $\tau_G \in M_0$ tal que $\tau_G : \mu \rightarrow \xi$ cofinal y sea $\pi \in G$ tal que $\pi \Vdash \tau : \check{\mu} \rightarrow \check{\xi}$ cofinal, pasamos a π' y construimos los conjuntos $A_\beta \in M$, $A_\beta \subset \kappa^+$. Ahora hemos de probar que $|A_\beta|^M \leq \kappa$ y con ello llegaremos a la misma contradicción que en 17.31.

Definimos igualmente $\pi_\gamma \leq_{\text{dir}}^j \pi'$. Si $\pi' = (P_1, \dots, P_n, f_1, \dots, f_n, A, H)$, entonces, cada π_γ será de la forma

$$(P_1, \dots, P_n, Q_1^\gamma, \dots, Q_{l^\gamma}^\gamma, g_0^\gamma, \dots, g_{j-1}^\gamma, f_j, \dots, f_n, H(Q_1^\gamma), \dots, H(Q_{l^\gamma}^\gamma), B^\gamma, H|_{B^\gamma}),$$

pero ahora tenemos demasiadas sucesiones posibles $\{Q_1^\gamma, \dots, Q_{l^\gamma}^\gamma\}$ (hay, como antes, κ^+ , pero estamos suponiendo que $|A_\beta| = \kappa^+$). Lo que podemos decir es que hay a lo sumo $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ sucesiones $\{Q_1^\gamma \cap \kappa, \dots, Q_{l^\gamma}^\gamma \cap \kappa\}$, luego podemos tomar $B \subset A_\beta$, $|B| = \kappa^+$ de modo que todos los π_γ con $\gamma \in B$ estén determinados por una misma sucesión $\eta = (g_0, \dots, g_{j-1}) \in \mathbb{P}_j$ y unas sucesiones $\{Q_1^\gamma, \dots, Q_{l^\gamma}^\gamma\}$ con l constante y con $\{Q_1^\gamma \cap \kappa, \dots, Q_{l^\gamma}^\gamma \cap \kappa\} = \{\nu_1, \dots, \nu_l\}$ constante. Más aún, las posibilidades para la sucesión

$$(H(Q_1^\gamma), \dots, H(Q_{l^\gamma}^\gamma)) \in \text{Lv}(\nu_2, \nu_1^{++}) \times \dots \times \text{Lv}(\nu_l, \nu_{l-1}^{++}) \times \text{Lv}(\kappa, \nu_l^{++})$$

son a lo sumo κ , luego reduciendo B podemos suponerla también constante.

En resumen, si tomamos $\gamma_1, \gamma_2 \in B$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma_1} &= (P_1, \dots, P_n, Q_1^{\gamma_1}, \dots, Q_{l^{\gamma_1}}^{\gamma_1}, h_0, \dots, h_{n+l}, B^{\gamma_1}, H|_{B^{\gamma_1}}), \\ \pi_{\gamma_2} &= (P_1, \dots, P_n, Q_1^{\gamma_2}, \dots, Q_{l^{\gamma_2}}^{\gamma_2}, h_0, \dots, h_{n+l}, B^{\gamma_2}, H|_{B^{\gamma_2}}), \quad (17.14) \\ Q_i^{\gamma_1} \cap \kappa &= Q_i^{\gamma_2} \cap \kappa, \quad \pi_{\gamma_i} \Vdash \tau(\beta) = \check{\gamma}_i. \end{aligned}$$

Más aún, extendiéndolas podemos sustituir B^{γ_i} por $B^{\gamma_1} \cap B^{\gamma_2}$, con lo que π_{γ_1} y π_{γ_2} sólo se diferencian en la P -parte. Para llegar a una contradicción necesitamos ideas nuevas:

Sea \mathcal{G} el grupo de las permutaciones de κ^+ que fijan a cada ordinal de κ . Si $g \in \mathcal{G}$ y $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+)$, definimos $g(P) = g[P]$, con lo que \mathcal{G} puede identificarse un grupo de permutaciones de $\mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+)$. Similarmente, para cada $A \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+)$, definimos $g(A) = g[A]$. Finalmente, para cada

$$\pi = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_n, A, H) \in \mathbb{P},$$

definimos

$$g(\pi) = (g(P_1), \dots, g(P_n), f_0, \dots, f_n, g(A), g^{-1} \circ H).$$

Es fácil ver que $g(\pi) \in \mathbb{P}$. Notemos que como g fija a los ordinales menores que κ se cumple $P_i \cap \kappa = g(P_i) \cap \kappa$, por lo que las funciones f_i pertenecen a los c.p.o.s correctos. Así mismo, $g[D] = D$, etc. El único punto que no es evidente es que $g(A) \in U$. Esto es consecuencia del hecho siguiente:

$$F = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+) \mid g(P) = P\} \in U \quad (17.15)$$

En efecto, supongamos que $B = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+) \mid g(P) \neq P\} \in U$. Entonces para cada $P \in B$ existe un $\beta_P \in P$ tal que $g(\beta_P) \notin P$ o bien $g^{-1}(\beta_P) \notin P$. Como U es normal, existe un $C \subset B$, $C \in U$ y un $\beta \in \kappa^+$ de modo que $\beta_P = \beta$ para todo $P \in C$. Ahora bien, $L = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\kappa^+) \mid \{\beta, g(\beta), g^{-1}(\beta)\} \subset P\} \in U$, y un $P \in C \cap L$ nos da una contradicción.

Así pues, podemos identificar a \mathcal{G} con un subgrupo de $\text{Aut } \mathbb{P}$. Consideramos la extensión simétrica $SM[G]$ de M determinada por \mathcal{G} y por el filtro normal de subgrupos $\Gamma = \{G\}$ (ver la sección 6.2). Tenemos que $M \subset SM[G] \subset M[G]$. Veamos que $\{\kappa_n\}_{n < \omega}$, $\{f_n\}_{n < \omega} \in SM[G]$. Para ello hemos de mostrar que tienen nombres hereditariamente simétricos. Un nombre para $\{\kappa_n\}_{n < \omega}$ es

$$\sigma = \{(\text{p.o.}(\check{n}, \check{\mu}), \pi) \mid \pi \in \mathbb{P} \wedge 0 < n < \omega \wedge \text{long } \pi \geq n \wedge \mu = P_n^\pi \cap \kappa\} \in M,$$

y es claro que $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$. Por otra parte, un nombre para f_n es

$$\sigma_n = \{(\text{p.o.}(\text{p.o.}(\check{\alpha}, \check{\beta}), \check{\gamma}), \pi) \mid \pi \in \mathbb{P} \mid \text{long } \pi \geq n \wedge (\alpha, \beta, \gamma) \in f_n^\pi\} \in SM^{\mathbb{P}},$$

con lo que un nombre para $\{f_n\}$ es

$$\sigma' = \{(\text{p.o.}(\check{n}, \sigma_n), \mathbb{1}) \mid n < \omega\} \in SM^{\mathbb{P}}.$$

Como M_0 es el menor modelo de ZF que extiende a M y que contiene las sucesiones $\{\kappa_n\}_{n < \omega}$ y $\{f_n\}_{n < \omega}$, concluimos que $M_0 \subset SM[G]$.

Al principio de la demostración hemos tomado $\tau_G \in M_0$, tal que $\tau_G : \mu \rightarrow \xi$ cofinal. Según lo visto, podemos exigir que $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Ahora ya podemos terminar la prueba: demostraremos que existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $g(\pi_{\gamma_1})$ es compatible con π_{γ_2} , lo cual es contradictorio pues, por la simetría de τ , se cumple también $g(\pi_{\gamma_1}) \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{\gamma}_1$, y así $g(\pi_{\gamma_1})$ y π_{γ_2} fuerzan afirmaciones contradictorias.

Simplificando la notación de (17.14), tenemos dos condiciones

$$\pi = (P_1, \dots, P_n, f_0, \dots, f_n, A, H), \quad \pi' = (P'_1, \dots, P'_n, f_0, \dots, f_n, A, H)$$

tales que $P_i \cap \kappa = P'_i \cap \kappa = \kappa_i$ y hemos de encontrar $g \in \mathcal{G}$ tal que $\neg g(\pi) \perp \pi'$.

De hecho, basta conseguir que $g(P_i) = P'_i$, pues entonces

$$g(\pi) = (P'_1, \dots, P'_n, f_0, \dots, f_n, g(A), g^{-1} \circ H).$$

Por (17.15) se cumple que $B = \{P \in A \mid g(P) = P\} \in U$, y una extensión común de $g(\pi)$ y π' es $(P'_1, \dots, P'_n, f_0, \dots, f_n, B, H|_B)$.

La construcción de g no presenta ninguna dificultad: consideramos una biyección entre $P_1 \setminus \kappa$ y $P'_1 \setminus \kappa$ (notemos que ambos conjuntos tienen cardinal κ_1^+), la extendemos a una biyección entre $P_2 \setminus \kappa$ y $P'_2 \setminus \kappa$ (lo cual es posible porque $|P_2 \setminus P_1| = |P'_2 \setminus P'_1| = \kappa_2^+$, etc., hasta llegar a una biyección entre $P_n \setminus \kappa$ y $P'_n \setminus \kappa$. A su vez extendemos ésta a una biyección entre $\kappa^+ \setminus \kappa$ y $\kappa^+ \setminus \kappa$ (lo cual es posible porque $|\kappa^+ \setminus P_n| = |\kappa^+ \setminus P'_n| = \kappa^+$) y por último la extendemos a $g \in \mathcal{G}$ que claramente cumple lo pedido. ■

Según hemos visto, esto nos garantiza que $(2^{\aleph_\omega} \geq \aleph_{\omega+2})^{M_0}$. Es posible probar la igualdad, pero es más fácil extender M_0 con $\text{Fn}(\aleph_{\omega+2}, 2^{\aleph_\omega}, \aleph_{\omega+2})^{M_0}$. La función del continuo en la extensión cumple claramente las mismas propiedades que hemos probado para M_0 y además se da la igualdad $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$.

Recapitulando, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 17.33 (Magidor) *Si es consistente la existencia de un cardinal supercompacto, entonces también lo es que \aleph_ω sea un límite fuerte y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$.*

Más concretamente, en el modelo que hemos construido la función del continuo es

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1, \quad 2^{\aleph_1} = \aleph_2, \quad 2^{\aleph_2} = 2^{\aleph_3} = \aleph_4, \quad 2^{\aleph_4} = \aleph_5, \quad 2^{\aleph_5} = 2^{\aleph_6} = \aleph_7, \quad \dots$$

Modificando levemente la prueba se puede conseguir $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+k}$, para cualquier $2 \leq k < \omega$ (ver [14]). En [15], Magidor refina el argumento para probar, bajo la hipótesis de que exista un cardinal supercompacto por debajo de un cardinal enorme, la consistencia de $\bigwedge n < \omega \ 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} \wedge 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$.

Por otra parte, en [13], Magidor desarrolla una teoría de extensiones de Prikry iteradas que le permite obtener una extensión genérica en la que un conjunto prefijado de cardinales medibles del modelo base pasa a tener cofinalidad numerable en la extensión. Como aplicación obtiene los teoremas siguientes:

Teorema 1 *Si es consistente la existencia de un cardinal compacto, también lo es la existencia de un único cardinal compacto que a la vez sea el único cardinal medible.*

Teorema 2 *Si es consistente la existencia de un cardinal supercompacto, también lo es la existencia de un único cardinal supercompacto que a la vez sea el único cardinal compacto.*

El teorema 1 se demuestra cambiando la cofinalidad de todos los cardinales medibles por debajo del primer cardinal compacto. Éste sigue siendo compacto en la extensión, pero ya no tiene cardinales medibles por debajo.

Para probar el teorema 2 se parte de un modelo con un cardinal supercompacto κ tal que $2^\kappa = \kappa^{++}$, con lo que la HCG es violada en un conjunto no acotado de cardinales medibles bajo κ . Dichos cardinales se convierten en cardinales singulares en la extensión, de modo que κ sigue siendo supercompacto, pero tiene por debajo un conjunto no acotado de cardinales que violan la HCS. Por el teorema 16.8, ningún cardinal menor que κ puede ser compacto.

Bibliografía

- [1] BARWISE, J. (editor), *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977.
- [2] BAUMGARTNER, J.E. (editor), *Iterated Forcing*, (en Mathias).
- [3] COHEN, P. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W.A.Benjamin inc. reading, New York, 1966.
- [4] DEVLIN, K.J. *Constructibility*, (en Barwise).
- [5] — *Constructibility*, Springer, New York, (1984)
- [6] EKLOF, P.C. *Ultraproducts for Algebraists*, (en Barwise).
- [7] JECH, T.J. *The Axiom of Choice*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [8] — *Set Theory*, Academic Press, New York, 1978.
- [9] KEISLER, K.J. *Fundamentals of Model Theory*, (en Barwise).
- [10] KUNEN, K. *Combinatorics*, (en Barwise).
- [11] — *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [12] LAVER, R. *Making the Supercompactness of κ Indestructible under κ -directed closed Forcing*, Israel J. Math. **29** (1978) 385–388.
- [13] MAGIDOR, M. *How Large is the First Strongly Compact Cardinal?*, Ann.Math.Logic **10** (1976) 33–57.
- [14] — *On the Singular Cardinals Problem I*, Israel J. Math. **28** (1977) 1–31.
- [15] — *On the Singular Cardinals Problem II*, Ann. of Math. **106** (1977) 517–547.
- [16] MATHIAS, A.R.D. *Surveys in Set Theory*, London Math. Soc. Lecture Notes, 87 (1983).
- [17] MENAS, T.K. *Consistency Results concerning Supercompactness*, Trans. Amer. Math. Soc. **223** (1976) 61–91.

- [18] MITCHELL, W. *Aronszajn Trees and the Independence of the Transfer Property*, Ann. Math. Logic **5** (1972) 21–46.
- [19] ROSSER, J.B. *Simplified Independence Proofs*, Academic Press, New York, 1969.
- [20] SIKORSKI, R. *Boolean Algebras*. Springer Verlag, Berlin, 1969.

Índice de Materias

- abierto regular, 172
- absoluta (expresión), 20, 25
- álgebra
 - cociente, 192
 - de Boole, 167
 - completa, 171
 - de Borel, 252
 - de Cantor, 255
 - de conjuntos, 168
 - de Lindenbaum, 168
 - degenerada, 170
 - medida, 247
- altura (en un árbol), 203
 - de una rama, 204
- anticadena, 113, 204
- árbol, 203
 - bien podado, 205
 - completo, 206
 - de Aronszajn, 206, 297
 - de Suslin, 208
 - ramificado, 208
- átomo
 - de una medida, 250
 - en un c.p.o., 86
- atómica (medida), 250
- atómico (c.p.o.), 86
- automorfismo, 136

- bien podado (árbol), 205
- Borel (álgebra de), 252
- buen nombre, 121

- cadena
 - de signos, 5
 - en un árbol, 204
- camino (en un árbol), 204
- cardinal
 - compacto, 419
 - de Ramsey, 313
 - débilmente compacto, 297
 - débilmente medible, 401
 - enorme, 435, 437, 438
 - extensible, 438
 - indescriptible, 310
 - medible, 271
 - medible Ulam, 271
 - supercompacto, 427
- casi homogéneo, 137
- cero-dimensional, 194
- cerrado, 114
- cilindro, 253
- compatibilidad
 - en un c.p.o., 83
 - en un árbol, 204
- compleción, 177
- completitud, 192, 193, 270
- condición, 83
- condición de cadena, 113, 194
- congruencia, 192
- conjugado, 50
- conjunto
 - D-finito, 149
 - de Ehrenfeucht-Mostowski, *véase* Ehrenfeucht
 - dirigido, 458
 - dual, 171
 - hereditariamente simétrico, 51
 - homogéneo, 292, 313
 - preordenado, 83
 - simétrico, 50, 141
- conservación
 - de cardinales, 112
 - de cofinalidades, 112

- constructibilidad, 67
 - relativa, 77, 321
- cuasidisjunta (familia), 116
- cubo de Cantor, 253
- degenerada (álgebra), 170
- denotación, 6
- denso, 84, 87
- designador, 6
- D-finito (conjunto), 149
- diamante, 212
- diferencia simétrica, 179
- dirigido (conjunto), 458
- dual (conjunto), 171
- débilmente
 - compacto (cardinal), 297
 - medible (cardinal), 401
- Easton
 - función de, 158
 - producto, 158
- Ehrenfeucht-Mostowski, 346
 - bien fundado, 349
 - no acotado, 350
 - notable, 351
- elementalmente equivalentes, 9
- equivalencia (de condiciones), 461
- escala, 416
- espacio medida, 252
- estabilizador, 54
- extensional (nombre), 185
- extensión
 - genérica, 89
 - simétrica, 141
- filtro, 84
 - de subgrupos, 50
 - de un álgebra, 178
 - genérico, 84
 - normal, 286
- fuertemente
 - cerrado (conjunto), 458
 - compacto (cardinal), 419
- función de Skolem, 10
- fórmula, 5
- grupo de simetrías, 49, 141
- hereditariamente
 - extensional (nombre), 185
 - simétrico (conjunto), 51
 - simétrico (nombre), 141
 - unívoco (nombre), 184
- homogéneo (conjunto), 292, 313
- ideal, 178
 - primo, 180
- incompatibilidad
 - en un c.p.o., 83
 - en un árbol, 204
- indescribible (cardinal), 310
- indiscernibles, 315, 346
 - de Silver, 356
- inmersión, 8, 131
 - completa, 131
 - densa, 131
 - elemental, 9, 280
 - no trivial, 281
 - natural, 281
- isomorfismo, 8
- iteración de preórdenes, 226
- Lema de los sistemas Δ , 116
- lenguaje formal, 4
- Lévy
 - jerarquía de, 29
 - orden colapsante de, 128
- Martin (axioma de), 230
- medible (cardinal), 271
 - de Ulam, 271
- medida, 247, 271
 - aditiva, 256
 - atómica, 250
 - de Borel, 252
 - de Cantor, 255
 - de Ulam, 271
 - débil, 401
 - en un conjunto, 262
 - fina, 420, 435
 - normal, 427, 435
 - finita, 247
 - finitamente aditiva, 247
 - fuerte, 264
 - no trivial, 262

- normal, 403
- producto, 253
- unitaria, 247
- modelo, 6
 - interno, 58
 - natural, 14
 - transitivo, 14
- nivel (en un árbol), 203
- no atómico (c.p.o.), 86
- nombre, 88
 - bueno, 121
 - canónico, 89
 - para un c.p.o., 221
- nulo (elemento), 247
- partes definibles, 64, 320
- partición, 292
- producto
 - de c.p.o.s, 156
 - generalizado, 221
 - de Easton, 158
- \mathbb{R} -medible (cardinal), 264
- rama, 204
- ramificado, 208
- Ramsey (cardinal), 313
- reducción, 131
- relativización, 15
- satisfacción, 6
- saturación, 194
- semejanza, 131
- sentencia, 6
- separativo (c.p.o.), 132
- σ -álgebra, 251
- simétrico (conjunto), 50
- simétrico (nombre), 141
- sistema delta, 116
- soporte, 54, 226, 379
 - finito, 379, 380
- Stone (espacio de), 195
- submodelo, 8
 - elemental, 9
- subálgebra, 170
- subárbol, 204
- Suslin
 - hipótesis de, 201
 - recta de, 201
- Teorema
 - de compacidad, 275, 302
 - de Easton, 163
 - de Erdős-Rado, 295
 - de factorización, 388, 461
 - de Fubini, 253
 - de isomorfía, 192
 - de la forma normal, 340
 - de Löwenheim-Skolem, 11
 - de Ramsey, 291, 294
 - de reflexión, 22
 - de Stone, 194
 - del ideal primo, 180
 - del modelo genérico, 105
 - del producto, 157
 - del ultrafiltro, 180
 - fundamental de la teoría de extensiones, 99, 182
- término, 5
- ultrafiltro, 180
 - principal, 270
- ultrapotencia, 275, 279
- ultraproducto, 272
- valor, 88, 181