PROPAGACION SIMBOLICA

La propagación simbólica es especialmente útil en los casos siguientes:

1. **Cuando no se dispone de la especificación numérica del modelo probabilístico**: La especificación numérica de estos parámetros puede no ser posible. Los métodos simbólicos de propagación son capaces de tratar los parámetros mismos, sin necesidad de asignarles valores.
2. **Cuando los especialistas sólo son capaces de especificar intervalos de los parámetros en vez de valores concretos**: Los métodos de simbólicos pueden utilizarse para obtener cotas inferiores y superiores de las probabilidades para todos los valores posibles de los parámetros en los intervalos dados.
3. **Cuando se requiere un análisis de sensibilidad**: Responde a la pregunta ¿cómo son de sensibles los resultados a cambios en los parámetros y a los valores evidenciales?

Universidad de Cantabria

NOTACION

La función de probabilidad conjunta es

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\pi_i). \qquad (1)$$

Definición 1 Nodo Simbólico. *Cuando $p(x_i|\pi_i)$ depende de al menos un parámetro en forma simbólica, el nodo X_i se denomina nodo simbólico, y se utiliza Θ_i para denotar el conjunto de sus parámetros simbólicos.*

Cuando X_i es un nodo simbólico, una elección conveniente de los parámetros es la siguiente

$$\theta_{ij\pi} = p(X_i = j|\Pi_i = \pi), \; j \in \{0, \ldots, r_i\}, \qquad (2)$$

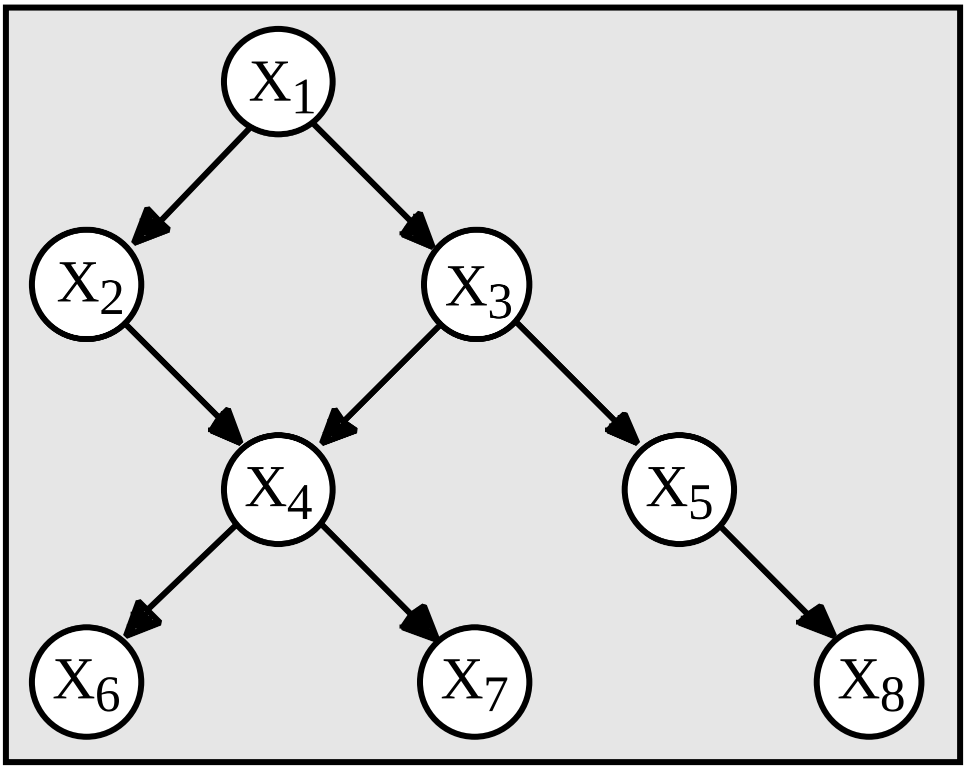
donde π es cualquier posible realización de los padres, Π_i, de X_i. El primer subíndice de $\theta_{ij\pi}$ es el número del nodo, el segundo subíndice es el estado del nodo, y los restantes subíndices se refieren a las realizaciones de sus padres. Puesto que $\Sigma_{j=0}^{r_i} \theta_{ij\pi} = 1$, para todo i y π:

$$\theta_{i0\pi} = 1 - \sum_{j=1}^{r_i} \theta_{ij\pi}. \qquad (3)$$

PROPAGACION SIMBOLICA
EJEMPLO

La estructura del grafo implica que la probabilidad conjunta del conjunto de nodos puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_1)p(x_2|x_1)p(x_3|x_1)p(x_4|x_2,x_3) \\ & \quad p(x_5|x_3)p(x_6|x_4)p(x_7|x_4)p(x_8|x_5). \end{aligned} \tag{4}$$



Se busca $P(X_7|X_1)$

Universidad de Cantabria

PROPAGACION SIMBOLICA EJEMPLO

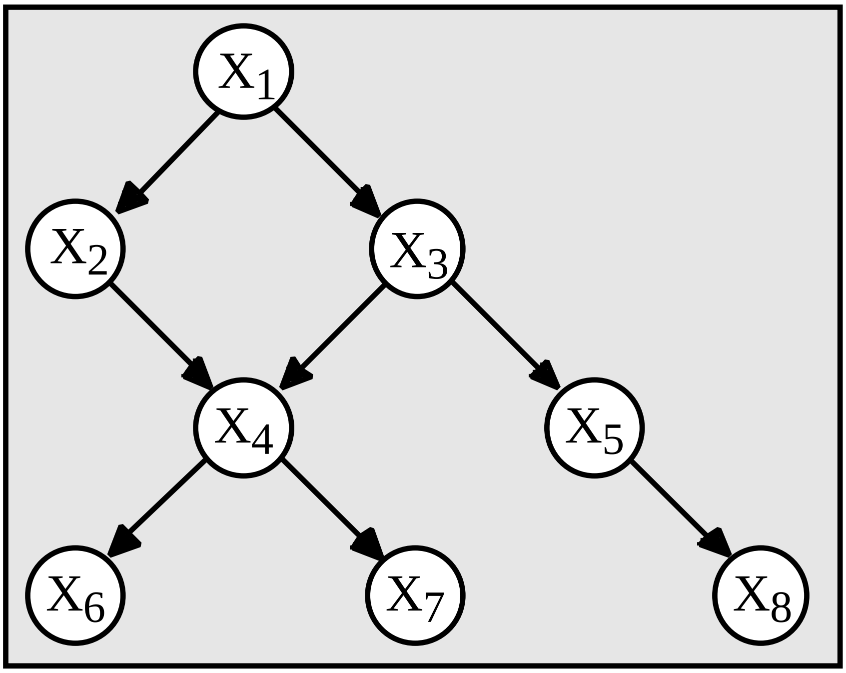
X_i	Π_i	Parámetros libres
X_1	ϕ	$\theta_{10} = p(X_1 = 0) = 0.2$
X_2	X_1	$\theta_{200} = p(X_2 = 0\|X_1 = 0) = 0.3$ $\theta_{201} = p(X_2 = 0\|X_1 = 1) = 0.5$
X_3	X_1	$\theta_{300} = p(X_3 = 0\|X_1 = 0)$ $\theta_{301} = p(X_3 = 0\|X_1 = 1) = 0.5$
X_4	X_2, X_3	$\theta_{4000} = p(X_4 = 0\|X_2 = 0, X_3 = 0) = 0.1$ $\theta_{4001} = p(X_4 = 0\|X_2 = 0, X_3 = 1) = 0.8$ $\theta_{4010} = p(X_4 = 0\|X_2 = 1, X_3 = 0) = 0.3$ $\theta_{4011} = p(X_4 = 0\|X_2 = 1, X_3 = 1) = 0.4$
X_5	X_3	$\theta_{500} = p(X_5 = 0\|X_3 = 0) = 0.3$ $\theta_{501} = p(X_5 = 0\|X_3 = 1) = 0.1$
X_6	X_4	$\theta_{600} = p(X_6 = 0\|X_4 = 0)$ $\theta_{601} = p(X_6 = 0\|X_4 = 1) = 0.9$
X_7	X_4	$\theta_{700} = p(X_7 = 0\|X_4 = 0) = 0.3$ $\theta_{701} = p(X_7 = 0\|X_4 = 1) = 0.6$
X_8	X_5	$\theta_{800} = p(X_8 = 0\|X_5 = 0) = 0.2$ $\theta_{801} = p(X_8 = 0\|X_5 = 1) = 0.4$

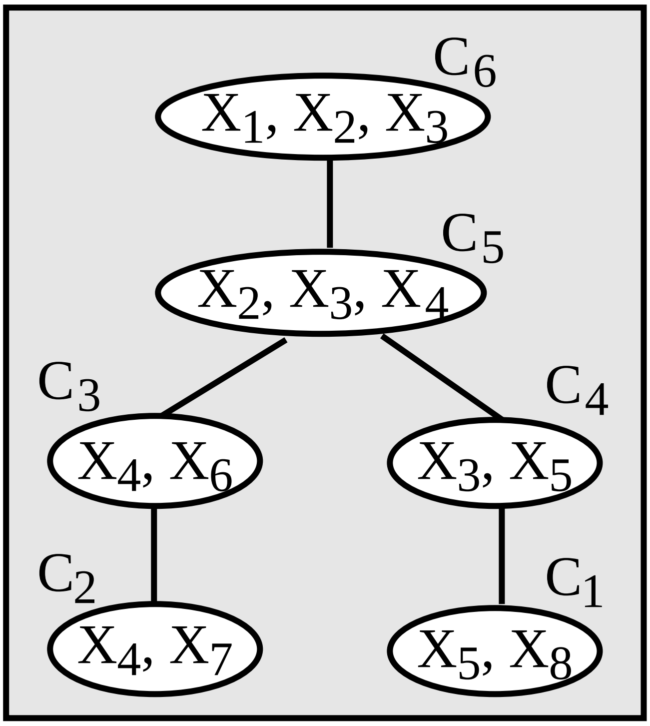
Hay otra tabla similar para los parámetros no libres.

De los métodos de propagación exacta resulta:

1. El número de argumentos que intervienen depende de la topología de red.
2. Dados dos conglomerados vecinos C_i y C_j con separador S_{ij}, C_i envía a C_j el mensaje
$$M_{ij}(s_{ij}) = \sum_{c_i \backslash s_{ij}} \psi_i(c_i) \prod_{k \neq j} M_{ki}(s_{ki}), \qquad (5)$$
que depende de los parámetros simbólicos de C_i y de sus vecinos excepto C_j.
3. La función de probabilidad conjunta es
$$p(c_i) = \psi_i(c_i) \prod_{k} M_{ki}(s_{ik}). \qquad (6)$$
Esta expresión depende de los parámetros de C_i y de sus vecinos C_k.
4. La función de probabilidad marginal de un nodo puede ser calculada de varias formas mediante la marginalización de la función de probabilidad conjunta de cualquier conglomerado que contenga al nodo.

GENERACION AUTOMATICA DE CODIGO SIMBOLICO





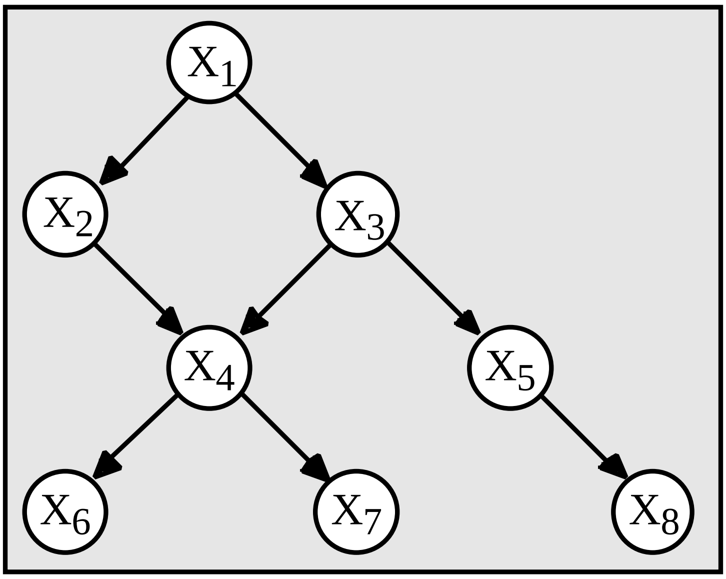
PROPAGACION SIMBOLICA CON MATHEMATICA

```
(* Tablas de Probabilidad *)
T={0.2,0.8};
n=1; Do[P1[i1]=T[[n]];n++,{i1,0,1}];
T={0.3,0.5,0.7,0.5};
n=1; Do[P2[i1,i2]=T[[n]];n++,{i1,0,1},{i2,0,1}];
T={a,0.5,1-a,0.5};
n=1; Do[P3[i1,i2]=T[[n]];n++,{i1,0,1},{i2,0,1}];
T={0.1,0.8,0.3,0.4,0.9,0.2,0.7,0.6};
n=1; Do[P4[i1,i2,i3]=T[[n]];n++,{i1,0,1},{i2,0,1},{i3,0,1}];
T={0.3,0.1,0.7,0.9};
n=1; Do[P5[i1,i2]=T[[n]];n++,{i1,0,1},{i2,0,1}];
T={b,0.9,1-b,0.1};
n=1; Do[P6[i1,i2]=T[[n]];n++,{i1,0,1},{i2,0,1}];
T={0.3,0.6,0.7,0.4};
n=1; Do[P7[i1,i2]=T[[n]];n++,{i1,0,1},{i2,0,1}];
T={0.2,0.4,0.8,0.6};
n=1; Do[P8[i1,i2]=T[[n]];n++,{i1,0,1},{i2,0,1}];

(* Funciones Potenciales *)
F1[X8_,X5_]:=P8[X8,X5];
F2[X7_,X4_]:=P7[X7,X4];
F3[X6_,X4_]:=P6[X6,X4];
F4[X5_,X3_]:=P5[X5,X3];
F5[X4_,X2_,X3_]:=P4[X4,X2,X3];
F6[X3_,X1_,X2_]:=P1[X1]*P2[X2,X1]*P3[X3,X1];

(* Iniciar Rangos *)
Do[inf[i]=0; sup[i]=1, {i,1,8}];
```

PROPAGACION SIMBOLICA CON MATHEMATICA

```
(* Definición de Mensajes *)
M14[X5_]:=Sum[F1[X8,X5],{X8,inf[8],sup[8]}];
M23[X4_]:=Sum[F2[X7,X4],{X7,inf[7],sup[7]}];
M35[X4_]:=Sum[F3[X6,X4]*M23[X4],{X6,inf[6],sup[6]}];
M45[X3_]:=Sum[F4[X5,X3]*M14[X5],{X5,inf[5],sup[5]}];
M56[X2_,X3_]:=Sum[F5[X4,X2,X3]*M35[X4]*M45[X3],{X4,inf[4],sup[4]}];
M65[X2_,X3_]:=Sum[F6[X3,X1,X2],{X1,inf[1],sup[1]}];
M53[X4_]:=Sum[F5[X4,X2,X3]*M45[X3]*M65[X2,X3],{X2,inf[2],sup[2]},
{X3,inf[3],sup[3]}];
M54[X3_]:=Sum[F5[X4,X2,X3]*M35[X4]*M65[X2,X3],{X4,inf[4],sup[4]},
{X2,inf[2],sup[2]}];
M32[X4_]:=Sum[F3[X6,X4]*M53[X4],{X6,inf[6],sup[6]}];
M41[X5_]:=Sum[F4[X5,X3]*M54[X3],{X3,inf[3],sup[3]}];
(* FPCs de los Conglomerados *)
Q1[X8_,X5_]:=F1[X8,X5]*M41[X5];
Q2[X7_,X4_]:=F2[X7,X4]*M32[X4];
Q3[X6_,X4_]:=F3[X6,X4]*M23[X4]*M53[X4];
Q4[X5_,X3_]:=F4[X5,X3]*M14[X5]*M54[X3];
Q5[X4_,X2_,X3_]:=F5[X4,X2,X3]*M35[X4]*M45[X3]*M65[X2,X3];
Q6[X3_,X1_,X2_]:=F6[X3,X1,X2]*M56[X2,X3];
(* Probabilidades Marginales de los Nodos *)
P[1,X1_]:=Sum[Q6[X3,X1,X2],{X3,inf[3],sup[3]},{X2,inf[2],sup[2]}];
P[2,X2_]:=Sum[Q6[X3,X1,X2],{X3,inf[3],sup[3]},{X1,inf[1],sup[1]}];
P[3,X3_]:=Sum[Q4[X5,X3],{X5,inf[5],sup[5]}];
P[4,X4_]:=Sum[Q3[X6,X4],{X6,inf[6],sup[6]}];
P[5,X5_]:=Sum[Q4[X5,X3],{X3,inf[3],sup[3]}];
P[6,X6_]:=Sum[Q3[X6,X4],{X4,inf[4],sup[4]}];
P[7,X7_]:=Sum[Q2[X7,X4],{X4,inf[4],sup[4]}];
P[8,X8_]:=Sum[Q1[X8,X5],{X5,inf[5],sup[5]}];
(* Normalización e Impresión *)
Do[c=Chop[Simplify[Sum[P[i,t],{t,inf[i],sup[i]}]]];
    Do[R[i,t]:=Simplify[Chop[P[i,t]]/c];
      Print["p(Node",i,"=",t,")=",R[i,t]],{t,inf[i],sup[i]}],{i,1,8}]
```

PROPAGACION SIMBOLICA
EJEMPLO



Probabilidades marginales de los nodos

X_i	$p(x_i = 0)$
X_1	0.2
X_2	0.46
X_3	$0.4 + 0.2\,\theta_{300}$
X_4	$0.424 - 0.056\,\theta_{300}$
X_5	$0.18 + 0.04\,\theta_{300}$
X_6	$0.5184 + 0.0504(\theta_{300} + 0.424 - 0.056\,\theta_{300})\theta_{600}$
X_7	$0.4728 + 0.0168\,\theta_{300}$
X_8	$0.364 - 0.008\,\theta_{300}$

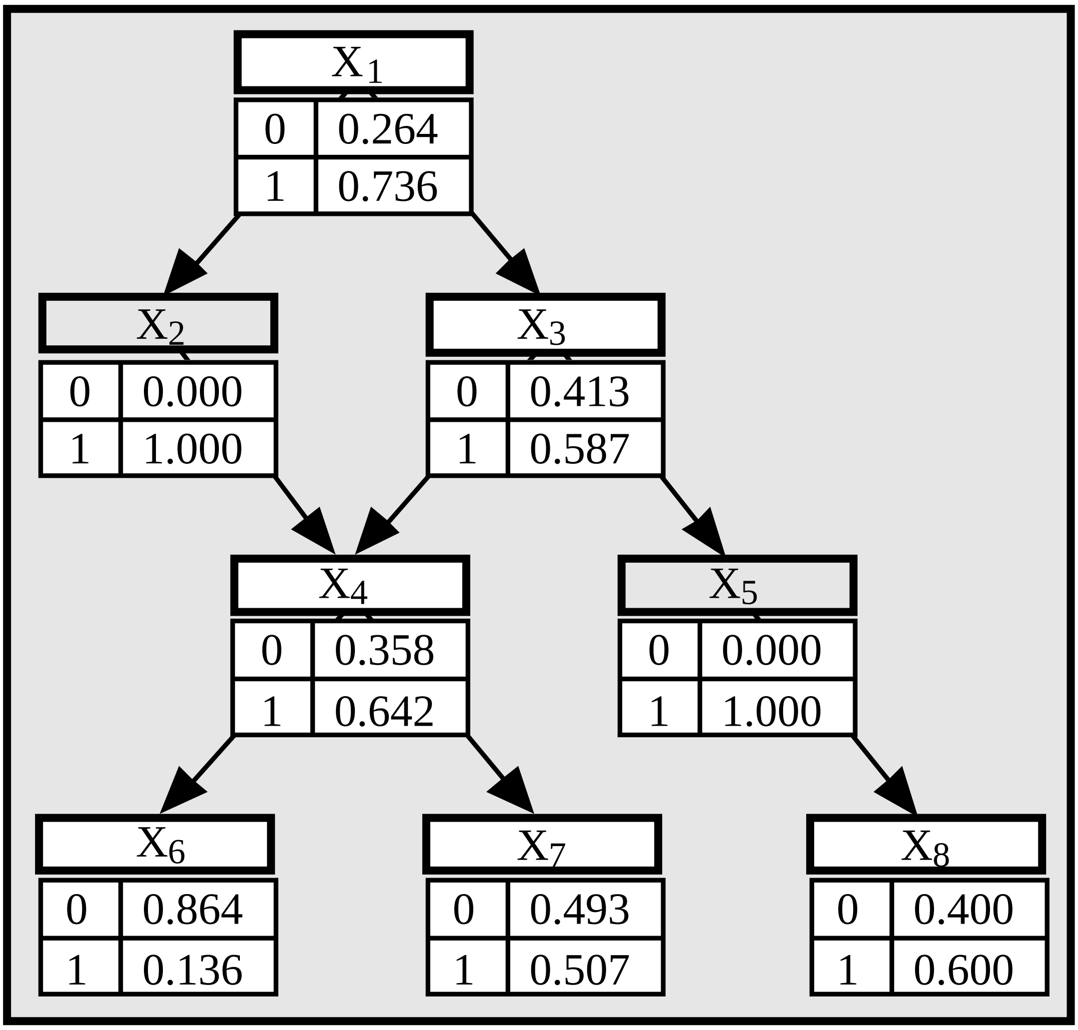
Probabilidades condicionales de los nodos dada la evidencia $\{X_2 = 1, X_5 = 1\}$

X_i	$p(x_i = 0 \mid X_2 = 1, X_5 = 1)$
X_1	$\dfrac{0.126 - 0.028\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_2	0
X_3	$\dfrac{0.14 + 0.098\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_4	$\dfrac{0.1644 - 0.021\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_5	0
X_6	$\dfrac{0.25 - 0.006\,\theta_{300} + 0.16\,\theta_{600} - 0.02\,\theta_{300}\theta_{600}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_7	$\dfrac{0.21828 - 0.0105\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_8	$\dfrac{0.178 - 0.011\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}} = 0.4$

Universidad de Cantabria

PROPAGACION SIMBOLICA
EJEMPLO

Probabilidades condicionales de los nodos dada la evidencia $\{X_2 = 1, X_5 = 1\}$



Universidad de Cantabria

ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LAS PROBABILIDADES

Teorema 1 *La probabilidad marginal de una realización dada, $(x_1, \ldots, x_n)$, de los nodos de una red Bayesiana es un polinomio en los parámetros simbólicos de grado menor o igual que el número de nodos simbólicos. Sin embargo, es un polinomio de primer grado en cada parámetro.*

Corolario 1 *La probabilidad marginal de cualquier conjunto de nodos $Y \subset X$ es un polinomio en los parámetros de grado menor que o igual al número de nodos simbólicos. Sin embargo, es un polinomio de primer grado en cada parámetro.*

Corolario 2 *La probabilidad condicional de cualquier conjunto de nodos Y dada la evidencia $E = e$ es una función racional (un cociente de dos funciones polinomiales) de los parámetros. Por otra parte, el polinomio denominador es el mismo para todos los nodos.*

PROPAGACION SIMBOLICA MEDIANTE METODOS NUMERICOS

Supóngase que se trata con un conjunto de nodos simbólicos $\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_s}\} \subset X$. Sea $\Theta = \{\Theta_1, \ldots, \Theta_s\}$ el conjunto de parámetros simbólicos, donde Θ_k son los del nodo X_{i_k}.
Se sabe:

1. que las probabilidades condicionales de X_i, dada la evidencia $E = e$, $p(X_i = j|E = e), j = 0, \ldots, r_i$, es o un polinomio o el cociente de dos polinomios de los parámetros.

2. que cada monomio que forma parte de estos polinomios contiene a lo sumo un parámetro de Θ_k, para cada $k = 1, \ldots, s$.

Por tanto, se construye el conjunto de los monomios posibles, M, tomando el producto cartesiano de los parámetros simbólicos, incluyendo un 1 para tener en cuenta los valores asignados a parámetros numéricos del nodo simbólico. Entonces, se tiene

$$M = \{1, \Theta_1\} \times \ldots \times \{1, \Theta_s\}. \tag{7}$$

Por ello, la forma general de estos polinomios es

$$\sum_{m_r \in M} c_r m_r. \tag{8}$$

En el Ejemplo resulta:

$$M = \{1, \theta_{300}\} \times \{1, \theta_{600}\}.$$

Las probabilidades marginales son de la forma

$$c_1 + c_2\,\theta_{300} + c_3\,\theta_{600} + c_4\,\theta_{300}\theta_{600}. \tag{9}$$

Una alternativa es

$$M = \{\theta_{300}, \theta_{310}\} \times \{\theta_{600}, \theta_{610}\},$$

$$c_1\,\theta_{300}\theta_{600} + c_2\,\theta_{310}\theta_{600} + c_3\,\theta_{300}\theta_{610} + c_4\,\theta_{310}\theta_{610}.$$

Ambas representaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned}
&c_1\theta_{300}\theta_{600} + c_2\theta_{310}\theta_{600} + c_3\theta_{300}\theta_{610} + c_4\theta_{310}\theta_{610} \\
&= c_1\theta_{300}\theta_{600} + \; c_2(1-\theta_{300})\theta_{600} + c_3\theta_{300}(1-\theta_{600}) \\
&+ c_4(1-\theta_{300})(1-\theta_{600}) = c_4 + \; (c_3 - c_4)\theta_{300} \\
&+ (c_2 - c_4)\theta_{600} + (c_4 + c_1 - c_2 - c_3)\theta_{300}\theta_{600},
\end{aligned}$$

PROPAGACION SIMBOLICA MEDIANTE METODOS NUMERICOS

Se trata de calcular los coeficientes c_k^{ij} de

$$p(X_i = j|E = e) \propto \sum_{m_k \in M} c_k^{ij} m_k = p_{ij}(\Theta). \qquad (10)$$

donde $p_{ij}(\Theta)$ representa las probabilidades $p(X_i = j|E = e)$ sin normalizar.
Si a los parámetros Θ se les asignan valores numéricos, por ejemplo, θ, entonces se tiene

$$p(X_i = j|E = e, \Theta = \theta) \propto \sum_{m_k \in M} c_k^{ij} m_k = p_{ij}(\theta).$$

Para calcular estos coeficientes, se necesita construir un conjunto de m ecuaciones linealmente independientes. Estas ecuaciones pueden obtenerse utilizando m realizaciones diferentes de Θ. Sean éstos $C = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$,

$$\mathbf{c}_{ij} = \begin{pmatrix} c_1^{ij} \\ \vdots \\ c_m^{ij} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_{ij} = \begin{pmatrix} p_{ij}(\theta_1) \\ \vdots \\ p_{ij}(\theta_m) \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Entonces resulta el sistema y la solución:

$$\mathbf{T}_{ij}\,\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{p}_{ij} \Rightarrow \mathbf{c}_{ij} = \mathbf{T}_{ij}^{-1}\,\mathbf{p}_{ij}.$$

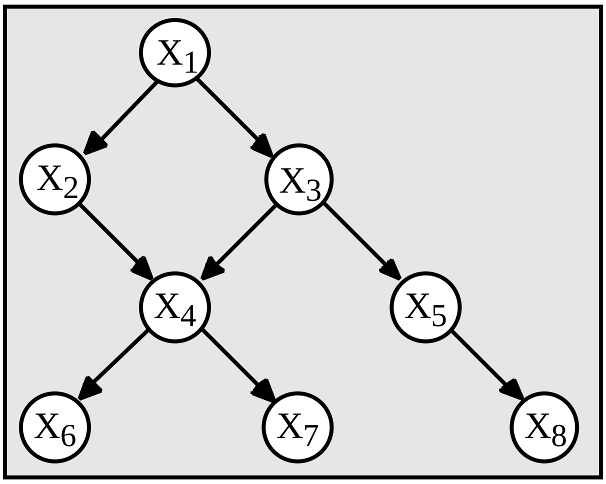
ALGORITMO 1 Componentes canónicas.

- **Datos:** Una red Bayesiana (D, P) y la evidencia $E = e$.
- **Resultados:** Las probabilidades simbólicas $p(X_i = j|E = e)$, $i = 1, \ldots, n$.

1. Construir m conjuntos de realizaciones de Θ: $\theta_1, \ldots, \theta_m$, que den lugar a m ecuaciones linealmente independientes en $\mathbf{c}_{ij}$.
2. Calcular la matriz $\mathbf{T}_{ij}$ no singular cuyo rk-ésimo elemento es el valor del monomio m_k obtenido reemplazando Θ por θ_r, la r-ésima realización de Θ.
3. Calcular el vector de probabilidades $\mathbf{p}_{ij}$ en (11) usando propagación numérica.
4. Resolver el sistema de ecuaciones resultante.
5. Sustituir los valores de $\mathbf{c}_{ij}$ en (10) y normalizar para obtener la expresión simbólica de las probabilidades $p(X_i = j|E = e)$.

EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA

Considérese la red de la Figura y la evidencia $e = \{X_2 = 1, X_5 = 1\}$.



El conjunto de nodos simbólicos es $\{X_3, X_6\}$.
El conjunto de parámetros es $\Theta = \{\Theta_3, \Theta_6\} = \{\{\theta_{300}, \theta_{310}\}, \{\theta_{600}, \theta_{610}\}\}$.
El conjunto de posibles monomios resulta

$$\begin{aligned} M &= \Theta_3 \times \Theta_6 = \{m_1, m_2, m_3, m_4\} \\ &= \{\theta_{300}\theta_{600}, \theta_{300}\theta_{610}, \theta_{310}\theta_{600}, \theta_{310}\theta_{610}\}. \end{aligned}$$

La probabilidad condicional sin normalizar $p(X_i = j|e)$ que se busca es:

$$p(X_i = j|e) \propto \sum_{k=1}^{4} c_k^{ij}\, m_k = p_{ij}(\Theta). \qquad (12)$$

EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA

Nuestro objetivo es obtener los coeficientes $\{c_k^{ij}\ ;\ k = 1,\ldots,4\}$ para cada nodo X_i y cada posible valor j. Se tiene el conjunto siguiente de componentes canónicas:

$$\begin{aligned} C &= \{c_1, c_2, c_3, c_4\} \\ &= \{\{1,0\},\{0,1\}\} \times \{\{1,0\},\{0,1\}\} \\ &= \{\{1,0;1,0\},\{1,0;0,1\},\{0,1;1,0\},\{0,1;0,1\}\}. \end{aligned}$$

Dando a los parámetros simbólicos los valores de sus componentes canónicas se obtiene:

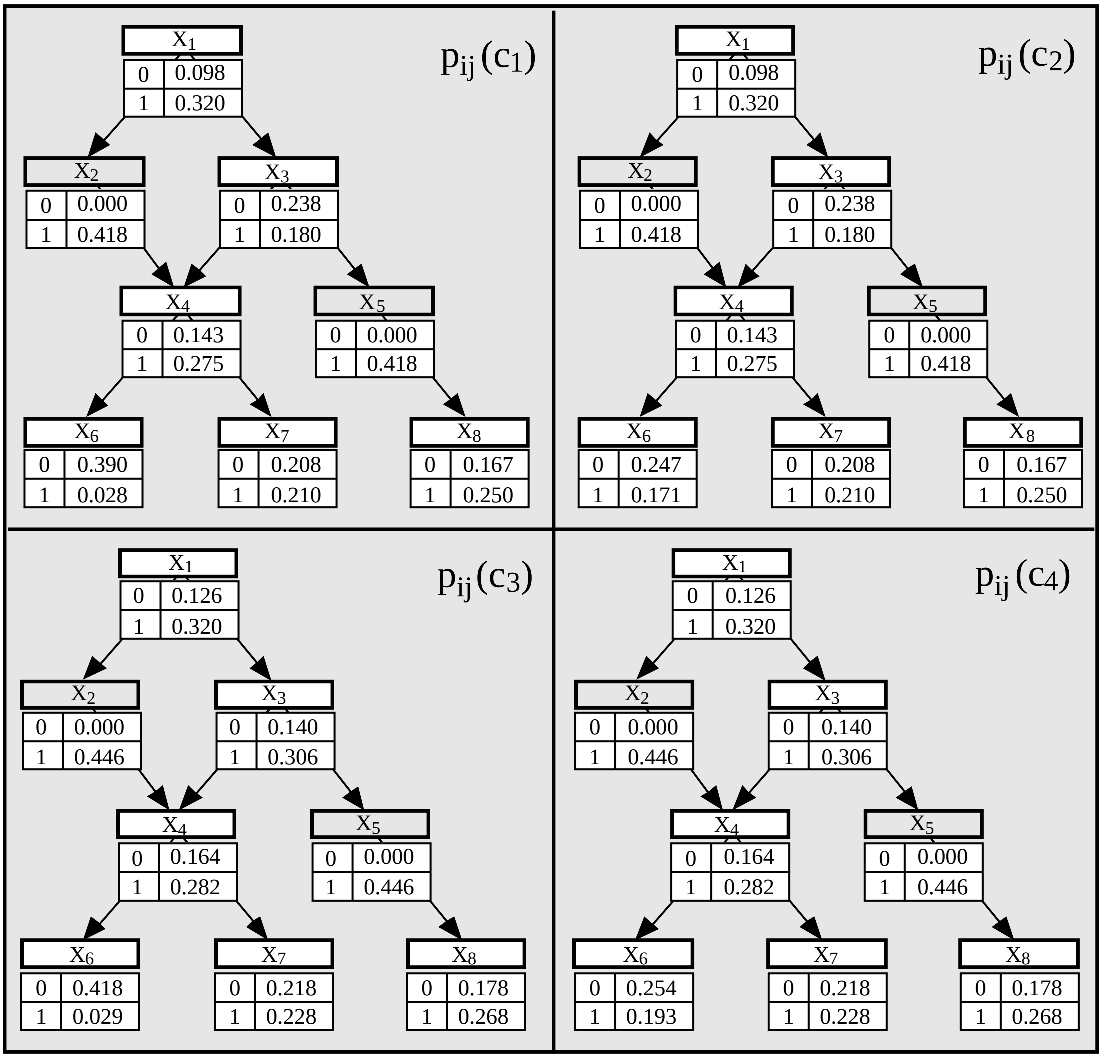
$$\begin{array}{ll} p_{ij}(\Theta = c_1) = c_1^{ij}, & p_{ij}(\Theta = c_2) = c_2^{ij}, \\ p_{ij}(\Theta = c_3) = c_3^{ij}, & p_{ij}(\Theta = c_4) = c_4^{ij}. \end{array}$$

En este caso, la matriz $\mathbf{T}_{ij}$ es la matriz identidad. Entonces, se tiene

$$\begin{pmatrix} c_1^{ij} \\ c_2^{ij} \\ c_3^{ij} \\ c_4^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{ij}(c_1) \\ p_{ij}(c_2) \\ p_{ij}(c_3) \\ p_{ij}(c_4) \end{pmatrix}.$$

Universidad de Cantabria

COMPUTACION EFICIENTE DE COMPONENTES CANONICAS



EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA

De la Figura para el nodo X_6 se obtiene:

$$\begin{pmatrix} c_1^{60} \\ c_2^{60} \\ c_3^{60} \\ c_4^{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.390 \\ 0.247 \\ 0.418 \\ 0.254 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c_1^{61} \\ c_2^{61} \\ c_3^{61} \\ c_4^{61} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.028 \\ 0.171 \\ 0.029 \\ 0.193 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

Sustituyendo estos valores en (12) resulta

$$\begin{aligned} p(X_6 = 0|e) \propto\ & 0.390\,\theta_{300}\theta_{600} + 0.247\,\theta_{300}\theta_{610} \\ & + 0.418\,\theta_{310}\theta_{600} + 0.254\,\theta_{310}\theta_{610}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(X_6 = 1|e) \propto\ & 0.028\,\theta_{300}\theta_{600} + 0.171\,\theta_{300}\theta_{610} \\ & + 0.029\,\theta_{310}\theta_{600} + 0.193\,\theta_{310}\theta_{610}. \end{aligned}$$

y sumando ambos polinomios, se obtiene el polinomio del denominador:

$$\begin{pmatrix} c_1^{60} \\ c_2^{60} \\ c_3^{60} \\ c_4^{60} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1^{61} \\ c_2^{61} \\ c_3^{61} \\ c_4^{61} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.418 \\ 0.418 \\ 0.447 \\ 0.447 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA

Por ello, se tiene

$$
\begin{aligned}
p(X_6 = 0|e) &= (0.390\theta_{300}\theta_{600} + 0.247\theta_{300}\theta_{610} \\
&\quad +0.418\theta_{310}\theta_{600} + 0.254\theta_{310}\theta_{610})/d, \\
p(X_6 = 1|e) &= (0.028\theta_{300}\theta_{600} + 0.171\theta_{300}\theta_{610} \\
&\quad +0.029\theta_{310}\theta_{600} + 0.193\theta_{310}\theta_{610})/d,
\end{aligned}
$$

donde
$d = 0.418\,\theta_{300}\theta_{600} + 0.418\,\theta_{300}\theta_{610} + 0.447\,\theta_{310}\theta_{600} + 0.447\,\theta_{310}\theta_{610}$.

Finalmente, eliminando los parámetros dependientes, θ_{310} y θ_{610}, es decir haciendo

$$\theta_{310} = 1 - \theta_{300}$$

y

$$\theta_{610} = 1 - \theta_{600},$$

se obtiene la expresión de la Tabla

Probabilidades condicionales de los nodos dada la evidencia $\{X_2 = 1, X_5 = 1\}$

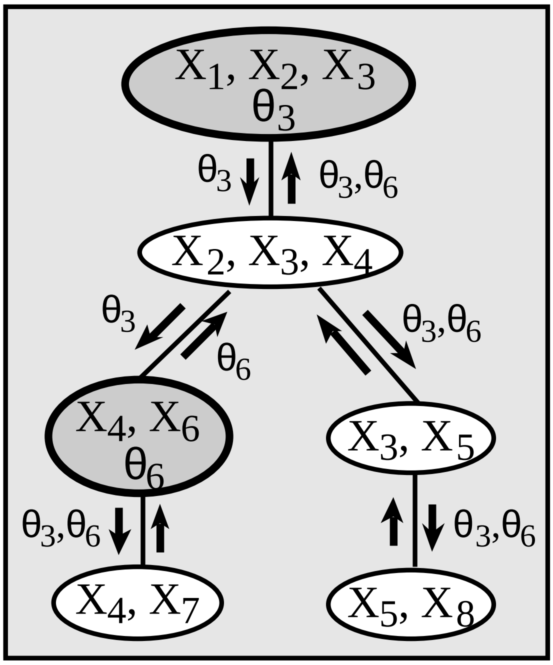
X_i	$p(x_i = 0 \mid X_2 = 1, X_5 = 1)$
X_1	$\dfrac{0.126 - 0.028\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_2	0
X_3	$\dfrac{0.14 + 0.098\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_4	$\dfrac{0.1644 - 0.021\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_5	0
X_6	$\dfrac{0.25 - 0.006\,\theta_{300} + 0.16\,\theta_{600} - 0.02\,\theta_{300}\theta_{600}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_7	$\dfrac{0.21828 - 0.0105\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}$
X_8	$\dfrac{0.178 - 0.011\,\theta_{300}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}} = 0.4$

AHORRO EN LA PROPAGACION SIMBOLICA

Se pueden distinguir dos tipos de mensajes:

1. Mensajes sin índice. Estos mensajes son comunes para todas las componentes canónicas. Por tanto, sólo hay que calcularlos una vez.

2. Mensajes con uno o más índices tales como Θ_3, Θ_6, ó $\Theta_3\Theta_6$. Estos mensajes dependen de los parámetros, y por tanto deben calcularse tantos mensajes como parámetros tengan asociados.



Universidad de Cantabria

PROPAGACION SIMBOLICA ORIENTADA A UN OBJETIVO

Supóngase que se está interesado en un determinado nodo X_i (nodo objetivo), y que se quiere obtener la función de probabilidad condicional $p(X_i = j|E = e)$.

Parte I: Identificar los nodos relevantes.
La función de probabilidad condicionada $p(X_i = j|E = e)$ no depende de todos los parámetros. Por ello, se identifican los nodos relevantes para $p(X_i = j|E = e)$ y el correspondiente conjunto de parámetros Θ. Seguidamente, los restantes nodos se eliminan del grafo.

Parte II: Identificar los parámetros suficientes.
Se identifican y eliminan los parámetros que están en contradicción con la evidencia, mediante las dos reglas siguientes:

- **Regla 1:** Eliminar los parámetros $\theta_{jk\pi}$ si $e_j \neq k$ para todo $X_j \in E$.
- **Regla 2:** Eliminar los parámetros $\theta_{jk\pi}$ si los valores de los padres π son incompatibles.

Parte III: Identificar los monomios factibles. Una vez que los subconjuntos mínimos de parámetros suficientes han sido identificados, los parámetros se combinan en monomios tomando el producto cartesiano de los subconjuntos suficientes minimales de parámetros y se eliminan los conjuntos de todas las combinaciones no factibles de los parámetros aplicando la regla siguiente:

- **Regla 3:** Los parámetros asociados a realizaciones condicionantes contradictorias no pueden aparecer en el mismo monomio.

Parte IV: Calcular los coeficientes de todos los monomios.

En esta parte se calculan los coeficientes aplicando el método de las componentes canónicas.

Universidad de Cantabria

PROPAGACION SIMBOLICA
ILUSTRACION DE REGLAS

$$\boxed{\text{Evidence} : X_2 = 1}$$

Rule 1

$$\theta_{200} = P(\cancel{X_2 = 0} \mid X_1 = 0)$$

Rule 2

$$\theta_{4001} = P(X_4 = 0 \mid \cancel{X_2 = 0}, X_3 = 1)$$

Rule 3

$$P(X_3 = 0 \mid X_1 = 1)$$

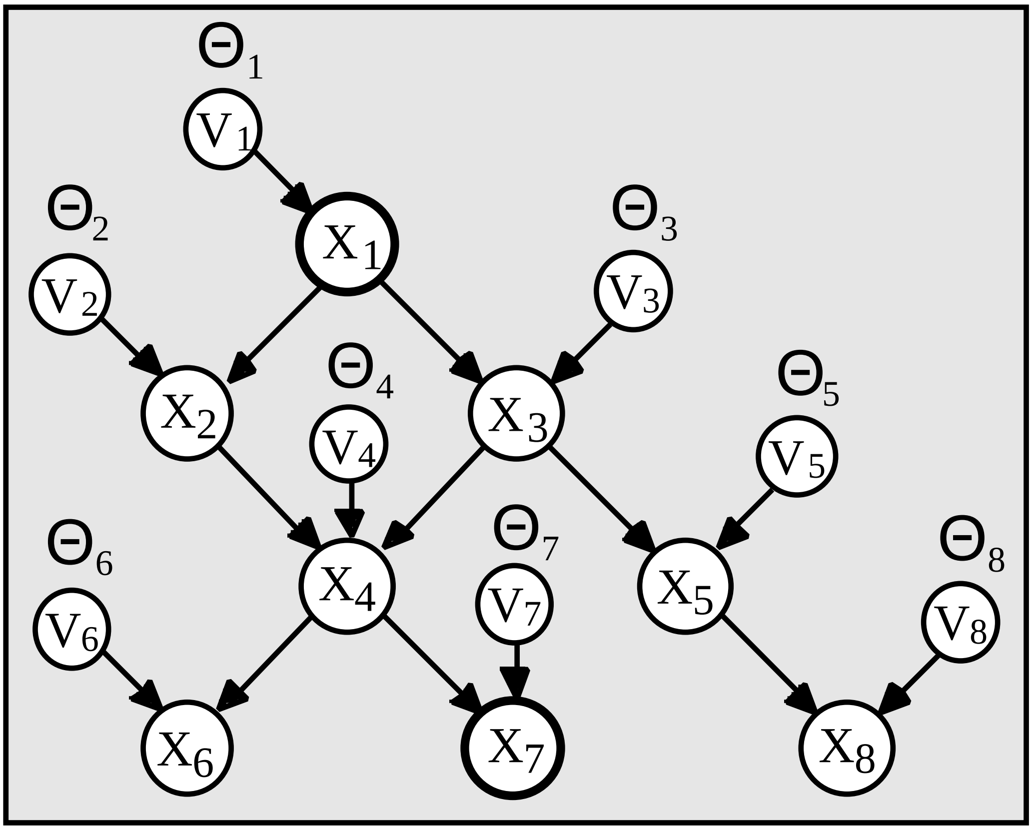
$$P(X_1 = 0) \qquad P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)$$

$$\theta_{10} \quad \theta_{301} \quad \theta_{210}$$

EJEMPLO DE
PROPAGACION SIMBOLICA ORIENTADA A UN
OBJETIVO

Parte I

Etapa 1: Siguiendo las etapas del Algoritmo, se necesita añadir al grafo inicial los nodos auxiliares $V_1, \ldots, V_8$. Esto conduce al nuevo grafo de la Figura.

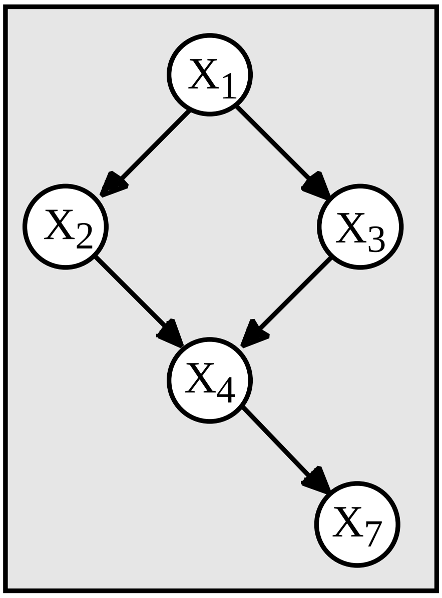


EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA ORIENTADA A UN OBJETIVO

Etapa 2: El conjunto V de nodos auxiliares D-separados de X_7 (objetivo) por X_1 (evidencial) es $V = \{V_5, V_6, V_8\}$.
El nuevo grafo resultante de eliminar los nodos X_5, X_6 y X_8 se muestra en la Figura. Por ello, el conjunto de parámetros resultante es

$$\Theta = \{\{\theta_{300}, \theta_{301}, \theta_{310}, \theta_{311}\}; \{\theta_{700}, \theta_{701}, \theta_{710}, \theta_{711}\}\}.$$

Los parámetros del nodo X_1 (θ_{10} y θ_{11}) no están incluídos en Θ puesto que X_1 es evidencial. El número de parámetros simbólicos se ha reducido de 22 a 8 (ó de 11 a 4 el de libres).



EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA ORIENTADA A UN OBJETIVO

Parte II

Etapa 3: El conjunto Θ no contiene parámetros asociados al nodo evidencial X_1. No es posible reducción alguna aplicando la Regla 1.

Etapa 4: Como θ_{300} y θ_{310} son inconsistentes con la evidencia ($X_1 = 0$), estos parámetros se pueden eliminar de Θ, obteniendo:

$$\Theta = \{\{\theta_{301}, \theta_{311}\}; \{\theta_{700}, \theta_{701}, \theta_{710}, \theta_{711}\}\}.$$

Parte III

Etapa 5: El conjunto inicial de monomios candidatos consiste en el producto cartesiano de los subconjuntos

$$M = \{\theta_{301}, \theta_{311}\} \times \{\theta_{700}, \theta_{701}, \theta_{710}, \theta_{711}\}.$$

M_0		M_1	
$\theta_{301}\theta_{700}$	$\theta_{301}\theta_{701}$	$\theta_{301}\theta_{710}$	$\theta_{301}\theta_{711}$
$\theta_{311}\theta_{700}$	$\theta_{311}\theta_{701}$	$\theta_{311}\theta_{710}$	$\theta_{311}\theta_{711}$

Etapa 6: Los padres de los nodos X_3 y X_7 no tienen elementos comunes; por tanto todos los monomios de la Tabla son factibles.

Universidad de Cantabria

EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA ORIENTADA A UN OBJETIVO

Parte IV

Etapa 7: En la Tabla se dan M_0 y M_1 para calcular $p(X_7=0|X_1=1)$ y $p(X_7=1|X_1=1)$.
Etapa 8: Para $j=0$ se tiene:

$$p_0(\Theta) = c_{01}m_{01} + c_{02}m_{02} + c_{03}m_{03} + c_{04}m_{04} = c_{01}\theta_{301}\theta_{700} + c_{02}\theta_{301}\theta_{701} + c_{03}\theta_{311}\theta_{700} + c_{04}\theta_{311}\theta_{701}.$$

Por ello, eligiendo las componentes canónicas

$$\theta_1 = (1,0,1,0,1,0),\ \theta_2 = (1,0,0,1,1,0),$$
$$\theta_3 = (0,1,1,0,1,0),\ \theta_4 = (0,1,0,1,1,0)$$

para $\Theta = \{\theta_{301}, \theta_{311}, \theta_{700}, \theta_{701}, \theta_{710}, \theta_{711}\}$ resulta:

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\theta_1) \\ p_0(\theta_2) \\ p_0(\theta_3) \\ p_0(\theta_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.85 \\ 0.35 \\ 0.65 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Similarmente, para $j=1$ se obtiene

$$c_1 = \begin{pmatrix} p_1(\theta_1) \\ p_1(\theta_2) \\ p_1(\theta_3) \\ p_1(\theta_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.85 \\ 0.35 \\ 0.65 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA ORIENTADA A UN OBJETIVO

La Tabla muestra los resultados de calcular las probabilidades numéricas necesarias para obtener las expresiones anteriores. Por tanto, se obtienen las expresiones polinomiales finales

$$p(X_7 = 0|X_1 = 1) \propto 0.15\theta_{301}\theta_{700} + 0.85\theta_{301}\theta_{701} + 0.35\theta_{311}\theta_{700} + 0.65\theta_{311}\theta_{701}.$$

Similarmente, para $X_7 = 1$ se obtiene

$$p(X_7 = 1|X_1 = 1) \propto 0.15\theta_{301}\theta_{710} + 0.85\theta_{301}\theta_{711} + 0.35\theta_{311}\theta_{710} + 0.65\theta_{311}\theta_{711}.$$

$X_7 = 0$			
$(\theta_{301}, \theta_{311}, \theta_{700}, \theta_{701}, \theta_{710}, \theta_{711})$	$p_0(\theta)$	Monomios	Coeficientes
(1,0,1,0,1,0)	0.15	$\theta_{301}\theta_{700}$	$c_{01} = 0.15$
(1,0,0,1,1,0)	0.85	$\theta_{301}\theta_{701}$	$c_{02} = 0.85$
(0,1,1,0,1,0)	0.35	$\theta_{311}\theta_{700}$	$c_{03} = 0.35$
(0,1,0,1,1,0)	0.65	$\theta_{311}\theta_{701}$	$c_{04} = 0.65$
$X_7 = 1$			
$(\theta_{301}, \theta_{311}, \theta_{700}, \theta_{701}, \theta_{710}, \theta_{711})$	$p_1(\theta)$	Monomios	Coeficientes
(1,0,1,0,1,0)	0.15	$\theta_{301}\theta_{710}$	$c_{11} = 0.15$
(1,0,0,1,1,0)	0.85	$\theta_{301}\theta_{711}$	$c_{12} = 0.85$
(0,1,1,0,1,0)	0.35	$\theta_{301}\theta_{710}$	$c_{13} = 0.35$
(0,1,0,1,1,0)	0.65	$\theta_{311}\theta_{711}$	$c_{14} = 0.65$

EJEMPLO DE PROPAGACION SIMBOLICA ORIENTADA A UN OBJETIVO

Etapa 9: Las expresiones pueden simplificarse reemplazando θ_{311}, θ_{710} y θ_{711} por $(1-\theta_{301})$, $(1-\theta_{700})$, y $(1-\theta_{701})$, respectivamente. Finalmente, se obtiene

$$\begin{aligned} p(X_7=0|X_1=1) &\propto 0.15\theta_{301}\theta_{700}+0.85\theta_{301}\theta_{701} \\ &\quad +(1-\theta_{301})(0.35\theta_{700}+0.65\theta_{701}) \\ &= 0.35\theta_{700}-0.2\theta_{301}\theta_{700} \\ &\quad +0.65\theta_{701}+0.2\theta_{301}\theta_{701} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & p(X_7=1|X_1=1) \\ &\quad \propto 0.15\theta_{301}(1-\theta_{700})+0.85\theta_{301}(1-\theta_{701}) \\ &\quad +0.35(1-\theta_{301})(1-\theta_{700}) \\ &\quad +0.65(1-\theta_{301})(1-\theta_{701}) \\ &\quad = 1+0.2\theta_{301}\theta_{700}-0.35\theta_{700} \\ &\quad -0.65\theta_{701}-0.2\theta_{301}\theta_{701}. \end{aligned}$$

Etapa 10: Sumando las probabilidades sin normalizar se obtiene la constante de normalización. Puesto que $\theta_{i0\pi}+\theta_{i1\pi}=1$, para todo i, la constante de normalización resulta ser 1.

Universidad de Cantabria

TRATAMIENTO SIMBOLICO DE EVIDENCIA ALEATORIA

En algunas situaciones la evidencia disponible puede ser aleatoria. Supóngase que se tiene una evidencia $E = e$ con probabilidad $q(e)$. Entonces, esta probabilidad condicionada es

$$p(x_i|(E = e \, con \, prob \, q(e))) = \sum_e q(e)p(x_i|e).$$

Esta probabilidad condicionada puede calcularse aplicando el método de las componentes canónicas para cada e.

Nótese que $p(x_i|(e \, con \, prob \, q(e)))$ es también una función racional ya que se trata de una combinación lineal convexa de $p(x_i|e)$, que es una función racional. Sin embargo, en este caso los polinomios pueden ser de grado mayor que uno.

Teorema 2 *La probabilidad condicionada de cualquier nodo no evidencial dada una evidencia estocástica es el cociente de dos funciones polinomiales, en las que el grado de los polinomios es como mucho igual a la suma de las cardinalidades de los nodos evidenciales.*

EJEMPLO DE TRATAMIENTO SIMBOLICO DE EVIDENCIA ALEATORIA

Sea $X_2 = 1; X_5 = x_5$ con $q(0) = p$ y $q(1) = 1 - p$. Se desea calcular $p(X_6|(X_2 = 1, X_5 = x_5)$.

$$s_0 = p(X_6 = 0|X_2 = 1, X_5 = 0)$$

$$= \frac{0.056 + 0.019\,\theta_{300} + 0.032\,\theta_{600} + 0.007\,\theta_{300}\,\theta_{600}}{0.094 + 0.028\,\theta_{300}}$$

$$s_1 = p(X_6 = 0|X_2 = 1, X_5 = 1)$$

$$= \frac{0.253 - 0.006\,\theta_{300} + 0.164\,\theta_{600} - 0.021\,\theta_{300}\,\theta_{600}}{0.446 - 0.028\,\theta_{300}}.$$

De donde se obtiene

$$p(x_i|X_2 = 1, X_5 = x_5) = ps_0 + (1 - p)s_1 = a/b,$$

donde

$$\begin{aligned} a &= -30.334 - 1.522p - 8.316\theta_{300} - 0.492p\theta_{300} \\ &\quad +0.214\theta_{300}^2 + 0.464p\theta_{300}^2 - 19.663\theta_{600} \\ &\quad +1.45, p\theta_{600} - 3.339\,\theta_{300}\theta_{600} \\ &\quad +0.5p\theta_{300}\theta_{600} + 0.75\theta_{300}^2\theta_{600} \\ &\quad -0.5p\theta_{300}^2\,\theta_{600}, \\ b &= -\,53.474 - 12.571\,\theta_{300} + \theta_{300}^2. \end{aligned}$$

Universidad de Cantabria

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Por análisis de sensibilidad se entiende el estudio de los efectos que producen los cambios de los valores de alguno de los parámetros en las probabilidades condicionales de los nodos no evidenciales dada la evidencia.

Teorema 3 Cotas de las probabilidades. *Si la función fraccional lineal del vector* $\mathbf{u}$,

$$f(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{c}\,\mathbf{u} - c_0}{\mathbf{d}\,\mathbf{u} - d_0}, \tag{16}$$

donde $\mathbf{c}$ *y* $\mathbf{d}$ *son coeficientes vectoriales y* c_0 *y* d_0 *son constantes reales, está definida en el poliedro convexo* $A\mathbf{u} \leq \mathbf{a_0}, \mathbf{u} \geq 0$, *donde* A *es una matriz constante y* $\mathbf{a_0}$ *es un vector constante y el denominador en (16) no se anula en el poliedro anterior, entonces el máximo de* $f(\mathbf{u})$ *tiene lugar en uno de los vértices del poliedro.*

EJEMPLO DE CALCULO DE COTAS DE PROBABILIDADES

Se supone que el experto humano da, como información inicial, las cotas inferiores y superiores:

θ	Inf	Sup	θ	Inf	Sup	θ	Inf	Sup
θ_{10}	0.7	0.9	θ_{300}	0.3	0.5	θ_{301}	0.1	0.4
θ_{500}	0.0	0.2	θ_{501}	0.8	1.0	θ_{600}	0.3	0.7
θ_{601}	0.4	0.5	θ_{700}	0.2	0.3	θ_{701}	0.5	0.7
θ_{800}	0.0	0.3	θ_{801}	0.4	0.6			

Con objeto de realizar una comparación, se calculan las probabilidades para dos modelos:

- El modelo especificado por los once parámetros simbólicos libres.
- El modelo reducido obtenido del modelo anterior reemplazando los parámetros de las variables X_3 y X_6 por valores numéricos fijos, es decir,

  $$\theta_{300} = 0.4, \theta_{301} = 0.2, \theta_{600} = 0.5, \theta_{601} = 0.4.$$

  Este modelo tiene siete parámetros simbólicos libres.

Universidad de Cantabria

EJEMPLO DE CALCULO DE COTAS DE PROBABILIDADES

	Once Parámetros			Siete Parámetros		
Nodo	Inf.	Sup.	Rango	Inf.	Sup.	Rango
X_1	0.700	0.900	0.200	0.700	0.900	0.2000
X_2	0.230	0.290	0.060	0.230	0.290	0.0600
X_3	0.240	0.490	0.250	0.340	0.380	0.0400
X_4	0.277	0.323	0.046	0.301	0.303	0.0020
X_5	0.408	0.808	0.400	0.496	0.728	0.232
X_6	0.368	0.565	0.197	0.430	0.430	0.0002
X_7	0.403	0.589	0.186	0.409	0.580	0.1705
X_8	0.077	0.478	0.401	0.109	0.451	0.3424

	Once Parámetros			Siete Parámetros		
Nodo	Inf.	Sup.	Rango	Inf.	Sup.	Rango
X_1	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	0.000
X_2	0.200	0.200	0.000	0.200	0.200	0.000
X_3	0.300	0.500	0.200	0.400	0.400	0.000
X_4	0.280	0.320	0.040	0.300	0.300	0.000
X_5	0.400	0.760	0.360	0.480	0.680	0.200
X_6	0.368	0.564	0.196	0.430	0.430	0.000
X_7	0.404	0.588	0.184	0.410	0.580	0.170
X_8	0.096	0.480	0.384	0.128	0.456	0.328