Isomorfismos de marcas y de latices de subgrupos

Gerardo Raggi-Cárdenas y Luis Valero-Elizondo

Octubre 2013

Mérida

Disponible en línea en: www.fismat.umich.mx/~valero

Isomorfismo de tablas de marcas

Definición

Sean G, Q grupos finitos. Sea $\mathfrak{C}(G)$ la familia de clases de conjugación de subgrupos de G. Supondremos que los elementos de $\mathfrak{C}(G)$ están ordenados de menor a mayor. Sea ψ una función de $\mathfrak{C}(G)$ a $\mathfrak{C}(Q)$. Dado un subgrupo H de G, denotamos como H' a cualquier representante de $\psi([H])$. Decimos que ψ es un *isomorfismo entre las tablas de marcas de G y Q* si ψ es una biyección y si $\#((Q/K')^{H'}) = \#((G/K)^{H})$ para todos los subgrupos H, K de G.

Isomorfismo de tablas de marcas

Definición

Sean G, Q grupos finitos. Sea $\mathfrak{C}(G)$ la familia de clases de conjugación de subgrupos de G. Supondremos que los elementos de $\mathfrak{C}(G)$ están ordenados de menor a mayor. Sea ψ una función de $\mathfrak{C}(G)$ a $\mathfrak{C}(Q)$. Dado un subgrupo H de G, denotamos como H' a cualquier representante de $\psi([H])$. Decimos que ψ es un *isomorfismo entre las tablas de marcas de G y Q* si ψ es una biyección y si $\#((Q/K')^{H'}) = \#((G/K)^H)$ para todos los subgrupos H, K de G.

Isomorfismo de tablas de marcas

Definición

Sean G, Q grupos finitos. Sea $\mathfrak{C}(G)$ la familia de clases de conjugación de subgrupos de G. Supondremos que los elementos de $\mathfrak{C}(G)$ están ordenados de menor a mayor. Sea ψ una función de $\mathfrak{C}(G)$ a $\mathfrak{C}(Q)$. Dado un subgrupo H de G, denotamos como H' a cualquier representante de $\psi([H])$. Decimos que ψ es un *isomorfismo entre las tablas de marcas de G y Q* si ψ es una biyección y si $\#((Q/K')^{H'}) = \#((G/K)^{H})$ para todos los subgrupos H, K de G.

Isomorfismo de tablas de marcas

Definición

Sean G, Q grupos finitos. Sea $\mathfrak{C}(G)$ la familia de clases de conjugación de subgrupos de G. Supondremos que los elementos de $\mathfrak{C}(G)$ están ordenados de menor a mayor. Sea ψ una función de $\mathfrak{C}(G)$ a $\mathfrak{C}(Q)$. Dado un subgrupo H de G, denotamos como H' a cualquier representante de $\psi([H])$. Decimos que ψ es un *isomorfismo entre las tablas de marcas de G y Q* si ψ es una biyección y si $\#((Q/K')^{H'}) = \#((G/K)^{H})$ para todos los subgrupos H, K de G.

Isomorfismo de tablas de marcas

Definición

Sean G, Q grupos finitos. Sea $\mathfrak{C}(G)$ la familia de clases de conjugación de subgrupos de G. Supondremos que los elementos de $\mathfrak{C}(G)$ están ordenados de menor a mayor. Sea ψ una función de $\mathfrak{C}(G)$ a $\mathfrak{C}(Q)$. Dado un subgrupo H de G, denotamos como H' a cualquier representante de $\psi([H])$. Decimos que ψ es un *isomorfismo entre las tablas de marcas de G y Q* si ψ es una biyección y si $\#((Q/K')^{H'}) = \#((G/K)^{H})$ para todos los subgrupos H, K de G.

Tabla de marcas

Definición

La matriz cuadrada cuya entrada H, K es $\#((G/K)^H)$ se llama la **tabla de marcas** de G (donde H, K corren sobre todos los elementos en $\mathfrak{C}(G)$). Algunos autores definen la tabla de marcas de G como la transpuesta de la matriz anterior (por ejemplo, GAP). Esta matriz esta definida hasta un reordenamiento de los elementos de $\mathfrak{C}(G)$, de manera que los grupos G y Q tienen tablas de marcas isomorfas si y solamente si es posible reordenar los elementos de $\mathfrak{C}(G)$ y/o $\mathfrak{C}(Q)$ de manera que G y Q tengan tablas de marcas idénticas.

Tabla de marcas

Definición

La matriz cuadrada cuya entrada H, K es $\#((G/K)^H)$ se llama la **tabla de marcas** de G (donde H, K corren sobre todos los elementos en $\mathfrak{C}(G)$). Algunos autores definen la tabla de marcas de G como la transpuesta de la matriz anterior (por ejemplo, GAP). Esta matriz esta definida hasta un reordenamiento de los elementos de $\mathfrak{C}(G)$, de manera que los grupos G y Q tienen tablas de marcas isomorfas si y solamente si es posible reordenar los elementos de $\mathfrak{C}(G)$ y/o $\mathfrak{C}(Q)$ de manera que G y Q tengan tablas de marcas idénticas.

Tabla de marcas

Definición

La matriz cuadrada cuya entrada H, K es $\#((G/K)^H)$ se llama la **tabla de marcas** de G (donde H, K corren sobre todos los elementos en $\mathfrak{C}(G)$). Algunos autores definen la tabla de marcas de G como la transpuesta de la matriz anterior (por ejemplo, GAP). Esta matriz esta definida hasta un reordenamiento de los elementos de $\mathfrak{C}(G)$, de manera que los grupos G y Q tienen tablas de marcas isomorfas si y solamente si es posible reordenar los elementos de $\mathfrak{C}(G)$ y/o $\mathfrak{C}(Q)$ de manera que G y Q tengan tablas de marcas idénticas.

Anillo de Burnside

Definición

El **anillo de Burnside** de G, denotado $B(G)$, es el subanillo de $\mathbb{Z}^{\mathfrak{C}(G)}$ generado por las columnas de la tabla de marcas de G.

Observación

Es fácil ver que si G y Q tienen tablas de marcas isomorfas, entonces tienen anillos de Burnside isomorfos; el recíproco es un problema abierto.

Anillo de Burnside

Definición

El **anillo de Burnside** de G, denotado $B(G)$, es el subanillo de $\mathbb{Z}^{\mathfrak{C}(G)}$ generado por las columnas de la tabla de marcas de G.

Observación

Es fácil ver que si G y Q tienen tablas de marcas isomorfas, entonces tienen anillos de Burnside isomorfos; el recíproco es un problema abierto.

Atributos preservados

Un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q preserva muchas propiedades, (es decir, si H tiene cierta propiedad, también la tiene H'). Por ejemplo, tenemos

- $G' = Q, (1_G)' = 1_Q, |G| = |G'|, |H| = |H'|, \alpha(H,K) = \alpha(H',K'), \beta(H,K) = \beta(H',K'), |N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

Atributos preservados

Un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q preserva muchas propiedades, (es decir, si H tiene cierta propiedad, también la tiene H'). Por ejemplo, tenemos

- $G' = Q, (1_G)' = 1_Q, |G| = |G'|, |H| = |H'|, \alpha(H,K) = \alpha(H',K'), \beta(H,K) = \beta(H',K'), |N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

Atributos preservados

Un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q preserva muchas propiedades, (es decir, si H tiene cierta propiedad, también la tiene H'). Por ejemplo, tenemos

- $G' = Q, (1_G)' = 1_Q, |G| = |G'|, |H| = |H'|, \alpha(H,K) = \alpha(H',K'), \beta(H,K) = \beta(H',K'), |N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

Atributos preservados

Un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q preserva muchas propiedades, (es decir, si H tiene cierta propiedad, también la tiene H'). Por ejemplo, tenemos

- $G' = Q, (1_G)' = 1_Q, |G| = |G'|, |H| = |H'|, \alpha(H,K) = \alpha(H',K'), \beta(H,K) = \beta(H',K'), |N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

Atributos preservados

Un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q preserva muchas propiedades, (es decir, si H tiene cierta propiedad, también la tiene H'). Por ejemplo, tenemos

- $G' = Q, (1_G)' = 1_Q, |G| = |G'|, |H| = |H'|, \alpha(H,K) = \alpha(H',K'), \beta(H,K) = \beta(H',K'), |N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

Atributos preservados

Un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q preserva muchas propiedades, (es decir, si H tiene cierta propiedad, también la tiene H'). Por ejemplo, tenemos

- $G' = Q, (1_G)' = 1_Q, |G| = |G'|, |H| = |H'|, \alpha(H,K) = \alpha(H',K'), \beta(H,K) = \beta(H',K'), |N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

Atributos preservados

Un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q preserva muchas propiedades, (es decir, si H tiene cierta propiedad, también la tiene H'). Por ejemplo, tenemos

- $G' = Q, (1_G)' = 1_Q, |G| = |G'|, |H| = |H'|, \alpha(H,K) = \alpha(H',K'), \beta(H,K) = \beta(H',K'), |N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

Atributos preservados

Un isomorfismo entre tablas de marcas de G y Q preserva muchas propiedades, (es decir, si H tiene cierta propiedad, también la tiene H'). Por ejemplo, tenemos

- $G' = Q, (1_G)' = 1_Q, |G| = |G'|, |H| = |H'|, \alpha(H,K) = \alpha(H',K'), \beta(H,K) = \beta(H',K'), |N_G(H)| = |N_Q(H')|.$

Atributos preservados II

- H es normal en G si y solamente si H' es normal en Q. En este caso, G/H y Q/H'tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si $K \leq H$ y al menos uno de los dos es normal en G, entonces $K' \leq H'$ para cualquier elección de K' y H'.
- Si K y H son subgrupos normales de G, entonces $(K \cap H)' = K' \cap H'$ y $(KH)' = K'H'$.
- Si $G = K \times H$, entonces $Q = K' \times H'$, K y K' tienen tablas de marcas isomorfas, y H y H' tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si G es un p-grupo, entonces $soclo(Z(G))' = soclo(Z(Q))$.

Atributos preservados II

- H es normal en G si y solamente si H' es normal en Q. En este caso, G/H y Q/H'tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si $K \leq H$ y al menos uno de los dos es normal en G, entonces $K' \leq H'$ para cualquier elección de K' y H'.
- Si K y H son subgrupos normales de G, entonces $(K \cap H)' = K' \cap H'$ y $(KH)' = K'H'$.
- Si $G = K \times H$, entonces $Q = K' \times H'$, K y K' tienen tablas de marcas isomorfas, y H y H' tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si G es un p-grupo, entonces $soclo(Z(G))' = soclo(Z(Q))$.

Atributos preservados II

- H es normal en G si y solamente si H' es normal en Q. En este caso, G/H y Q/H'tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si $K \leq H$ y al menos uno de los dos es normal en G, entonces $K' \leq H'$ para cualquier elección de K' y H'.
- Si K y H son subgrupos normales de G, entonces $(K \cap H)' = K' \cap H'$ y $(KH)' = K'H'$.
- Si $G = K \times H$, entonces $Q = K' \times H'$, K y K' tienen tablas de marcas isomorfas, y H y H' tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si G es un p-grupo, entonces $soclo(Z(G))' = soclo(Z(Q))$.

Atributos preservados II

- H es normal en G si y solamente si H' es normal en Q. En este caso, G/H y Q/H'tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si $K \leq H$ y al menos uno de los dos es normal en G, entonces $K' \leq H'$ para cualquier elección de K' y H'.
- Si K y H son subgrupos normales de G, entonces $(K \cap H)' = K' \cap H'$ y $(KH)' = K'H'$.
- Si $G = K \times H$, entonces $Q = K' \times H'$, K y K' tienen tablas de marcas isomorfas, y H y H' tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si G es un p-grupo, entonces $soclo(Z(G))' = soclo(Z(Q))$.

Atributos preservados II

- H es normal en G si y solamente si H' es normal en Q. En este caso, G/H y Q/H'tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si $K \leq H$ y al menos uno de los dos es normal en G, entonces $K' \leq H'$ para cualquier elección de K' y H'.
- Si K y H son subgrupos normales de G, entonces $(K \cap H)' = K' \cap H'$ y $(KH)' = K'H'$.
- Si $G = K \times H$, entonces $Q = K' \times H'$, K y K' tienen tablas de marcas isomorfas, y H y H' tienen tablas de marcas isomorfas.
- Si G es un p-grupo, entonces $soclo(Z(G))' = soclo(Z(Q))$.

Atributos preservados III

- El subgrupo H es maximal en G si y solamente si H' es maximal en Q.
- Los subgrupos de Frattini se corresponden, es decir, $\Phi(G)' = \Phi(Q)$.
- El grupo G es nilpotente si y solamente si Q es nilpotente. Sin embargo, existen p-grupos no isomorfos con tablas de marcas isomorfas.
- Para cualquier divisor d del orden de H, el número de subgrupos de H de orden d se preserva; en particular, el número total de subgrupos de H se preserva.
- El subgrupo H es cíclico si y solamente si H' es cíclico.

Atributos preservados III

- El subgrupo H es maximal en G si y solamente si H' es maximal en Q.
- Los subgrupos de Frattini se corresponden, es decir, $\Phi(G)' = \Phi(Q)$.
- El grupo G es nilpotente si y solamente si Q es nilpotente. Sin embargo, existen p-grupos no isomorfos con tablas de marcas isomorfas.
- Para cualquier divisor d del orden de H, el número de subgrupos de H de orden d se preserva; en particular, el número total de subgrupos de H se preserva.
- El subgrupo H es cíclico si y solamente si H' es cíclico.

Atributos preservados III

- El subgrupo H es maximal en G si y solamente si H' es maximal en Q.
- Los subgrupos de Frattini se corresponden, es decir, $\Phi(G)' = \Phi(Q)$.
- El grupo G es nilpotente si y solamente si Q es nilpotente. Sin embargo, existen p-grupos no isomorfos con tablas de marcas isomorfas.
- Para cualquier divisor d del orden de H, el número de subgrupos de H de orden d se preserva; en particular, el número total de subgrupos de H se preserva.
- El subgrupo H es cíclico si y solamente si H' es cíclico.

Atributos preservados III

- El subgrupo H es maximal en G si y solamente si H' es maximal en Q.
- Los subgrupos de Frattini se corresponden, es decir, $\Phi(G)' = \Phi(Q)$.
- El grupo G es nilpotente si y solamente si Q es nilpotente. Sin embargo, existen p-grupos no isomorfos con tablas de marcas isomorfas.
- Para cualquier divisor d del orden de H, el número de subgrupos de H de orden d se preserva; en particular, el número total de subgrupos de H se preserva.
- El subgrupo H es cíclico si y solamente si H' es cíclico.

Atributos preservados III

- El subgrupo H es maximal en G si y solamente si H' es maximal en Q.
- Los subgrupos de Frattini se corresponden, es decir, $\Phi(G)' = \Phi(Q)$.
- El grupo G es nilpotente si y solamente si Q es nilpotente. Sin embargo, existen p-grupos no isomorfos con tablas de marcas isomorfas.
- Para cualquier divisor d del orden de H, el número de subgrupos de H de orden d se preserva; en particular, el número total de subgrupos de H se preserva.
- El subgrupo H es cíclico si y solamente si H' es cíclico.

Atributos preservados IV

- Si H es isomorfo al grupo de los cuaternios de orden 8, entonces H' es isomorfo a H.
- Si G es abeliano entonces $G \cong Q$.
- Los subgrupos conmutadores se corresponden, es decir, $[G, G]' = [Q, Q]$. Más aún, los grupos abelianizados son isomorfos, es decir, $G/[G, G] \cong Q/[Q, Q]$.
- Si G es isomorfo a S_n para algún $n \geq 5$, entonces Q es isomorfo a G.
- El subgrupo H es elemental abeliano si y solamente si H' es elemental abeliano (en cuyo caso, son grupos isomorfos).

Atributos preservados IV

- Si H es isomorfo al grupo de los cuaternios de orden 8, entonces H' es isomorfo a H.
- Si G es abeliano entonces $G \cong Q$.
- Los subgrupos conmutadores se corresponden, es decir, $[G, G]' = [Q, Q]$. Más aún, los grupos abelianizados son isomorfos, es decir, $G/[G, G] \cong Q/[Q, Q]$.
- Si G es isomorfo a S_n para algún $n \geq 5$, entonces Q es isomorfo a G.
- El subgrupo H es elemental abeliano si y solamente si H' es elemental abeliano (en cuyo caso, son grupos isomorfos).

Atributos preservados IV

- Si H es isomorfo al grupo de los cuaternios de orden 8, entonces H' es isomorfo a H.
- Si G es abeliano entonces $G \cong Q$.
- Los subgrupos conmutadores se corresponden, es decir, $[G,G]' = [Q,Q]$. Más aún, los grupos abelianizados son isomorfos, es decir, $G/[G,G] \cong Q/[Q,Q]$.
- Si G es isomorfo a S_n para algún $n \geq 5$, entonces Q es isomorfo a G.
- El subgrupo H es elemental abeliano si y solamente si H' es elemental abeliano (en cuyo caso, son grupos isomorfos).

Atributos preservados IV

- Si H es isomorfo al grupo de los cuaternios de orden 8, entonces H' es isomorfo a H.
- Si G es abeliano entonces $G \cong Q$.
- Los subgrupos conmutadores se corresponden, es decir, $[G, G]' = [Q, Q]$. Más aún, los grupos abelianizados son isomorfos, es decir, $G/[G, G] \cong Q/[Q, Q]$.
- Si G es isomorfo a S_n para algún $n \geq 5$, entonces Q es isomorfo a G.
- El subgrupo H es elemental abeliano si y solamente si H' es elemental abeliano (en cuyo caso, son grupos isomorfos).

Atributos preservados IV

- Si H es isomorfo al grupo de los cuaternios de orden 8, entonces H' es isomorfo a H.
- Si G es abeliano entonces $G \cong Q$.
- Los subgrupos conmutadores se corresponden, es decir, $[G,G]' = [Q,Q]$. Más aún, los grupos abelianizados son isomorfos, es decir, $G/[G,G] \cong Q/[Q,Q]$.
- Si G es isomorfo a S_n para algún $n \geq 5$, entonces Q es isomorfo a G.
- El subgrupo H es elemental abeliano si y solamente si H' es elemental abeliano (en cuyo caso, son grupos isomorfos).

Atributos que no se preservan

Teorema

Sean G y Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas, y denote $H \mapsto H'$ un isomorfismo de tablas de marcas. Tenemos que

1. *H y H' pueden no ser isomorfos.*
2. *Incluso si H es abeliano, H' puede no ser abeliano.*
3. *H y H' pueden tener tablas de marcas no isomorfas.*
4. *Incluso si $K \times L = H$, puede que no existan K', L' y H' tales que $K' \times L' = H'$.*
5. *Incluso si K es normal en H, puede que no sea posible escoger K' y H' tales que K' es normal en H'.*
6. *Dado H, la tabla de marcas no determina qué subgrupo de G es el normalizador de H en G.*

Atributos que no se preservan

Teorema

Sean G y Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas, y denote $H \mapsto H'$ un isomorfismo de tablas de marcas. Tenemos que

1. *H y H' pueden no ser isomorfos.*
2. *Incluso si H es abeliano, H' puede no ser abeliano.*
3. *H y H' pueden tener tablas de marcas no isomorfas.*
4. *Incluso si $K \times L = H$, puede que no existan K', L' y H' tales que $K' \times L' = H'$.*
5. *Incluso si K es normal en H, puede que no sea posible escoger K' y H' tales que K' es normal en H'*
6. *Dado H, la tabla de marcas no determina qué subgrupo de G es el normalizador de H en G.*

Atributos que no se preservan

Teorema

Sean G y Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas, y denote $H \mapsto H'$ un isomorfismo de tablas de marcas. Tenemos que

1. *H y H' pueden no ser isomorfos.*
2. *Incluso si H es abeliano, H' puede no ser abeliano.*
3. *H y H' pueden tener tablas de marcas no isomorfas.*
4. *Incluso si $K \times L = H$, puede que no existan K', L' y H' tales que $K' \times L' = H'$.*
5. *Incluso si K es normal en H, puede que no sea posible escoger K' y H' tales que K' es normal en H'*
6. *Dado H, la tabla de marcas no determina qué subgrupo de G es el normalizador de H en G.*

Atributos que no se preservan

Teorema

Sean G y Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas, y denote $H \mapsto H'$ un isomorfismo de tablas de marcas. Tenemos que

1. *H y H' pueden no ser isomorfos.*
2. *Incluso si H es abeliano, H' puede no ser abeliano.*
3. *H y H' pueden tener tablas de marcas no isomorfas.*
4. *Incluso si $K \times L = H$, puede que no existan K', L' y H' tales que $K' \times L' = H'$.*
5. *Incluso si K es normal en H, puede que no sea posible escoger K' y H' tales que K' es normal en H'*
6. *Dado H, la tabla de marcas no determina qué subgrupo de G es el normalizador de H en G.*

Atributos que no se preservan

Teorema

Sean G y Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas, y denote $H \mapsto H'$ un isomorfismo de tablas de marcas. Tenemos que

1. *H y H' pueden no ser isomorfos.*
2. *Incluso si H es abeliano, H' puede no ser abeliano.*
3. *H y H' pueden tener tablas de marcas no isomorfas.*
4. *Incluso si $K \times L = H$, puede que no existan K', L' y H' tales que $K' \times L' = H'$.*
5. *Incluso si K es normal en H, puede que no sea posible escoger K' y H' tales que K' es normal en H'*
6. *Dado H, la tabla de marcas no determina qué subgrupo de G es el normalizador de H en G.*

Atributos que no se preservan

Teorema

Sean G y Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas, y denote $H \mapsto H'$ un isomorfismo de tablas de marcas. Tenemos que

1. *H y H' pueden no ser isomorfos.*
2. *Incluso si H es abeliano, H' puede no ser abeliano.*
3. *H y H' pueden tener tablas de marcas no isomorfas.*
4. *Incluso si $K \times L = H$, puede que no existan K', L' y H' tales que $K' \times L' = H'$.*
5. *Incluso si K es normal en H, puede que no sea posible escoger K' y H' tales que K' es normal en H'*
6. *Dado H, la tabla de marcas no determina qué subgrupo de G es el normalizador de H en G.*

Isomorfismos de latices de subgrupos y tablas de marcas

Definición

Sean G y Q grupos finitos con latices de subgrupos $S(G)$ y $S(Q)$ respectivamente. Sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un mapeo. Decimos que φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas si φ es un isomorfismo de latices tal que:

- (Axioma del Orden) Para todo $H \in S(G)$, $|H| = |\varphi(H)|$.
- (Axioma de la Subconjugación) Para todo $H, K, L \in S(G)$ con H y K subgrupos de L, tenemos que H es conjugado a K en L si y solamente si $\varphi(H)$ es conjugado a $\varphi(K)$ en $\varphi(L)$.

Observación

Note que si omitimos el Axioma del Orden, entonces los grupos cíclicos C_{p^n} y C_{q^n} con p, q primos tienen latices de subgrupos isomorfos que satisfacen el Axioma de la Subconjugación.

Isomorfismos de latices de subgrupos y tablas de marcas

Definición

Sean G y Q grupos finitos con latices de subgrupos $S(G)$ y $S(Q)$ respectivamente. Sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un mapeo. Decimos que φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas si φ es un isomorfismo de latices tal que:

- (Axioma del Orden) Para todo $H \in S(G)$, $|H| = |\varphi(H)|$.
- (Axioma de la Subconjugación) Para todo $H, K, L \in S(G)$ con H y K subgrupos de L, tenemos que H es conjugado a K en L si y solamente si $\varphi(H)$ es conjugado a $\varphi(K)$ en $\varphi(L)$.

Observación

Note que si omitimos el Axioma del Orden, entonces los grupos cíclicos C_{p^n} y C_{q^n} con p, q primos tienen latices de subgrupos isomorfos que satisfacen el Axioma de la Subconjugación.

Isomorfismos de latices de subgrupos y tablas de marcas

Definición

Sean G y Q grupos finitos con latices de subgrupos $S(G)$ y $S(Q)$ respectivamente. Sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un mapeo. Decimos que φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas si φ es un isomorfismo de latices tal que:

- (Axioma del Orden) Para todo $H \in S(G)$, $|H| = |\varphi(H)|$.
- (Axioma de la Subconjugación) Para todo $H, K, L \in S(G)$ con H y K subgrupos de L, tenemos que H es conjugado a K en L si y solamente si $\varphi(H)$ es conjugado a $\varphi(K)$ en $\varphi(L)$.

Observación

Note que si omitimos el Axioma del Orden, entonces los grupos cíclicos C_{p^n} y C_{q^n} con p, q primos tienen latices de subgrupos isomorfos que satisfacen el Axioma de la Subconjugación.

Isomorfismos de latices de subgrupos y tablas de marcas

Definición

Sean G y Q grupos finitos con latices de subgrupos $S(G)$ y $S(Q)$ respectivamente. Sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un mapeo. Decimos que φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas si φ es un isomorfismo de latices tal que:

- (Axioma del Orden) Para todo $H \in S(G)$, $|H| = |\varphi(H)|$.
- (Axioma de la Subconjugación) Para todo $H, K, L \in S(G)$ con H y K subgrupos de L, tenemos que H es conjugado a K en L si y solamente si $\varphi(H)$ es conjugado a $\varphi(K)$ en $\varphi(L)$.

Observación

Note que si omitimos el Axioma del Orden, entonces los grupos cíclicos C_{p^n} y C_{q^n} con p, q primos tienen latices de subgrupos isomorfos que satisfacen el Axioma de la Subconjugación.

Isomorfismos de latices de subgrupos y tablas de marcas

Definición

Sean G y Q grupos finitos con latices de subgrupos $S(G)$ y $S(Q)$ respectivamente. Sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un mapeo. Decimos que φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas si φ es un isomorfismo de latices tal que:

- (Axioma del Orden) Para todo $H \in S(G)$, $|H| = |\varphi(H)|$.
- (Axioma de la Subconjugación) Para todo $H, K, L \in S(G)$ con H y K subgrupos de L, tenemos que H es conjugado a K en L si y solamente si $\varphi(H)$ es conjugado a $\varphi(K)$ en $\varphi(L)$.

Observación

Note que si omitimos el Axioma del Orden, entonces los grupos cíclicos C_{p^n} y C_{q^n} con p, q primos tienen latices de subgrupos isomorfos que satisfacen el Axioma de la Subconjugación.

Variaciones del Axioma de la Subconjugación

Axioma

(Version fuerte) Para cualesquiera $H, K, L \in S(G)$, tenemos que H es conjugado a K en L si y solamente si $\varphi(H)$ es conjugado a $\varphi(K)$ en $\varphi(L)$.

Observación

A continuación derivamos algunas propiedades preservadas por los isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas. A lo largo de esta sección, sean G y Q grupos finitos y $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre ellos. Sean L un subgrupo arbitrario de G (a veces tomaremos $L{=}G$) y H, K subgrupos de L.

Variaciones del Axioma de la Subconjugación

Axioma

(Version fuerte) Para cualesquiera $H, K, L \in S(G)$, tenemos que H es conjugado a K en L si y solamente si $\varphi(H)$ es conjugado a $\varphi(K)$ en $\varphi(L)$.

Observación

A continuación derivamos algunas propiedades preservadas por los isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas. A lo largo de esta sección, sean G y Q grupos finitos y $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre ellos. Sean L un subgrupo arbitrario de G (a veces tomaremos $L{=}G$) y H, K subgrupos de L.

Variaciones del Axioma de la Subconjugación

Axioma

(Version fuerte) Para cualesquiera $H, K, L \in S(G)$, tenemos que H es conjugado a K en L si y solamente si $\varphi(H)$ es conjugado a $\varphi(K)$ en $\varphi(L)$.

Observación

A continuación derivamos algunas propiedades preservadas por los isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas. A lo largo de esta sección, sean G y Q grupos finitos y $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre ellos. Sean L un subgrupo arbitrario de G (a veces tomaremos $L{=}G$) y H, K subgrupos de L.

Propiedades

Propiedad

φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre L y $\varphi(L)$.

Propiedad

φ induce una biyección entre las clases de conjugación de subgrupos de G y Q.

.

Propiedad

H es normal en L si y solamente si $\varphi(H)$ es normal en $\varphi(L)$

Propiedades

Propiedad

φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre L y $\varphi(L)$.

Propiedad

φ induce una biyección entre las clases de conjugación de subgrupos de G y Q.

.

Propiedad

H es normal en L si y solamente si $\varphi(H)$ es normal en $\varphi(L)$

Propiedades

Propiedad

φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre L y $\varphi(L)$.

Propiedad

φ induce una biyección entre las clases de conjugación de subgrupos de G y Q.

.

Propiedad

H es normal en L si y solamente si $\varphi(H)$ es normal en $\varphi(L)$

Propiedades

Propiedad

φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre L y $\varphi(L)$.

Propiedad

φ induce una biyección entre las clases de conjugación de subgrupos de G y Q.

.

Propiedad

H es normal en L si y solamente si $\varphi(H)$ es normal en $\varphi(L)$

Propiedad

$\varphi(N_G(H)) = N_Q(\varphi(H))$. *Más aún,* $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$.

Propiedad

Sea $\alpha_L(H,K)$ *el número de subgrupos de* L *que son conjugados a* K *en* L *y que contienen a* H*, y sea* $\beta_L(H,K)$ *el número de subgrupos de* L *que son conjugados a* H *en* L *y que están contenidos en* K*. Entonces* $\alpha_L(H,K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$ *y* $\beta_L(H,K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$.

Propiedad

φ *induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de* G *y* Q*. Más aún,* φ *induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de* L *y* $\varphi(L)$.

Propiedad

$\varphi(N_G(H)) = N_Q(\varphi(H))$. *Más aún,* $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$.

Propiedad

Sea $\alpha_L(H,K)$ *el número de subgrupos de* L *que son conjugados a* K *en* L *y que contienen a* H, *y sea* $\beta_L(H,K)$ *el número de subgrupos de* L *que son conjugados a* H *en* L *y que están contenidos en* K. *Entonces* $\alpha_L(H,K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H),\varphi(K))$ *y* $\beta_L(H,K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H),\varphi(K))$.

Propiedad

φ *induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de* G *y* Q. *Más aún,* φ *induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de* L *y* $\varphi(L)$.

Propiedad

$\varphi(N_G(H)) = N_Q(\varphi(H))$. *Más aún,* $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$.

Propiedad

Sea $\alpha_L(H,K)$ *el número de subgrupos de* L *que son conjugados a* K *en* L *y que contienen a* H*, y sea* $\beta_L(H,K)$ *el número de subgrupos de* L *que son conjugados a* H *en* L *y que están contenidos en* K*. Entonces* $\alpha_L(H,K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H),\varphi(K))$ *y* $\beta_L(H,K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H),\varphi(K))$.

Propiedad

φ *induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de* G *y* Q*. Más aún,* φ *induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de* L *y* $\varphi(L)$.

Propiedad

$\varphi(N_G(H)) = N_Q(\varphi(H))$. *Más aún,* $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$.

Propiedad

Sea $\alpha_L(H, K)$ *el número de subgrupos de* L *que son conjugados a* K *en* L *y que contienen a* H, *y sea* $\beta_L(H, K)$ *el número de subgrupos de* L *que son conjugados a* H *en* L *y que están contenidos en* K. *Entonces* $\alpha_L(H, K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$ *y* $\beta_L(H, K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$.

Propiedad

φ *induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de* G *y* Q. *Más aún,* φ *induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de* L *y* $\varphi(L)$.

Teorema

Sean G y Q grupos finitos y sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un isomorfismo entre sus latices de subgrupos. Son equivalentes:

1. *φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y marcas.*
2. *para todo subgrupo L de G, y para todos subgrupos H, K de L, tenemos que $|H| = |\varphi(H)|$, $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$, y $\alpha_L(H, K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$ (o equivalentemente, con β en lugar de α: $\beta_L(H, K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$)*
3. *para todo subgrupo L de G, φ induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de L y $\varphi(L)$.*

Teorema

Sean G y Q grupos finitos y sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un isomorfismo entre sus latices de subgrupos. Son equivalentes:

1. *φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y marcas.*
2. *para todo subgrupo L de G, y para todos subgrupos H, K de L, tenemos que $|H| = |\varphi(H)|$, $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$, y $\alpha_L(H, K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$ (o equivalentemente, con β en lugar de α: $\beta_L(H, K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$)*
3. *para todo subgrupo L de G, φ induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de L y $\varphi(L)$.*

Teorema

Sean G y Q grupos finitos y sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un isomorfismo entre sus latices de subgrupos. Son equivalentes:

1. *φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y marcas.*
2. *para todo subgrupo L de G, y para todos subgrupos H, K de L, tenemos que $|H| = |\varphi(H)|$, $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$, y $\alpha_L(H, K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$ (o equivalentemente, con β en lugar de α: $\beta_L(H, K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$)*
3. *para todo subgrupo L de G, φ induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de L y $\varphi(L)$.*

Teorema

Sean G y Q grupos finitos y sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un isomorfismo entre sus latices de subgrupos. Son equivalentes:

1. φ *es un isomorfismo de latices de subgrupos y marcas.*
2. *para todo subgrupo L de G, y para todos subgrupos H, K de L, tenemos que $|H| = |\varphi(H)|$, $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$, y $\alpha_L(H,K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$ (o equivalentemente, con β en lugar de α: $\beta_L(H,K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$)*
3. *para todo subgrupo L de G, φ induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de L y $\varphi(L)$.*

Teorema

Sean G y Q grupos finitos y sea $\varphi : S(G) \longrightarrow S(Q)$ un isomorfismo entre sus latices de subgrupos. Son equivalentes:

1. *φ es un isomorfismo de latices de subgrupos y marcas.*
2. *para todo subgrupo L de G, y para todos subgrupos H, K de L, tenemos que $|H| = |\varphi(H)|$, $\varphi(N_L(H)) = N_{\varphi(L)}(\varphi(H))$, y $\alpha_L(H, K) = \alpha_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$ (o equivalentemente, con β en lugar de α: $\beta_L(H, K) = \beta_{\varphi(L)}(\varphi(H), \varphi(K))$)*
3. *para todo subgrupo L de G, φ induce un isomorfismo entre las tablas de marcas de L y $\varphi(L)$.*

Demostración

Demostración

Tenemos que 1 implica 2 implica 3 inmediatamente. Para demostrar que 3 implica 1, simplemente note que H es conjugado a K en L si y solamente si $|H| = |K|$ y $\alpha_L(H, K) = 1$.

Propiedad

Si L es un subgrupo normal de G, entonces $\varphi(L)$ es un subgrupo normal de Q y φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre G/L y $Q/\varphi(L)$. Más aún, si H es un subgrupo normal de L, entonces $\varphi(H)$ es un subgrupo normal de $\varphi(L)$ y φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre L/H y $\varphi(L)/\varphi(H)$.

Demostración

Demostración

Tenemos que 1 implica 2 implica 3 inmediatamente. Para demostrar que 3 implica 1, simplemente note que H es conjugado a K en L si y solamente si $|H| = |K|$ y $\alpha_L(H, K) = 1$.

Propiedad

Si L es un subgrupo normal de G, entonces $\varphi(L)$ es un subgrupo normal de Q y φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre G/L y $Q/\varphi(L)$. Más aún, si H es un subgrupo normal de L, entonces $\varphi(H)$ es un subgrupo normal de $\varphi(L)$ y φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre L/H y $\varphi(L)/\varphi(H)$.

Demostración

Demostración

Tenemos que 1 implica 2 implica 3 inmediatamente. Para demostrar que 3 implica 1, simplemente note que H es conjugado a K en L si y solamente si $|H| = |K|$ y $\alpha_L(H, K) = 1$.

Propiedad

Si L es un subgrupo normal de G, entonces $\varphi(L)$ es un subgrupo normal de Q y φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre G/L y $Q/\varphi(L)$. Más aún, si H es un subgrupo normal de L, entonces $\varphi(H)$ es un subgrupo normal de $\varphi(L)$ y φ induce un isomorfismo de latices de subgrupos y tablas de marcas entre L/H y $\varphi(L)/\varphi(H)$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Propiedad

Las siguientes propiedades se derivan del isomorfismo de tablas de marcas: L es abeliano si y solamente si $\varphi(L)$ es abeliano, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; en particular, L es cíclico si y solamente si $\varphi(L)$ es cíclico (con esto podemos tratar a los elementos de G); L es simple si y solamente si $\varphi(L)$ es simple, y en este caso, L es isomorfo a $\varphi(L)$; L es soluble si y solamente si $\varphi(L)$ es soluble; φ preserva (esto es, establece una correspondencia entre) subgrupos derivados, subgrupos de Frattini, p-subgrupos de Sylow, subgrupos maximales, subgrupos elementales abelianos.

Propiedad

Dado un subgrupo L, denote su centro por $Z(L)$. Entonces $\varphi(Z(L)) = Z(\varphi(L))$.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Demostraciones

Demostración

1. Ambos axiomas valen para subgrupos de L.
2. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
3. Tenemos que H es normal en L si y solamente si para todo K en L conjugado a H en L, se tiene que $K = H$.
4. El normalizador en L de H es el mayour subgrupo N de L tal que H es un subgrupo normal de N.
5. Se sigue del Axioma de la Subconjugación.
6. Note que φ preserva lor órdenes de los subgrupos, los órdenes de sus normalizadores, y las alfas, con respecto a G y a L.
7. Se cumplen para isomorfismos de tablas de marcas.
8. El centro de un grupo es el mayor subgrupo normal Z de G tal que para cualquier subgrupo cíclico C, ZC es abeliano.

Conclusión

Finalmente ...

Conclusión

Finalmente ...

Conclusión

¡Gracias!