Un anillo para

controlarlos a todos

(los grupos finitos)

Alberto G. Raggi-Cárdenas
Luis Valero-Elizondo

25 / Octubre / 2005
XXXVIII Congreso de la Sociedad
Matemática Mexicana

Disponible en línea en

`http://www.fismat.umich.mx/~valero/`

Anillos de Burnside y Tablas de Marcas

Sea G un grupo finito. La unión disjunta y el producto cartesiano de G-conjuntos nuevamente son G-conjuntos. Con estas operaciones, las clases de isomorfismo de G-conjuntos forman un semianillo, $B^+(G)$. Su anillo asociado es el llamado **Anillo de Burnside** del grupo G, denotado $B(G)$ (algunos autores lo denotan $\Omega(G)$).

Una manera alternativa de definir el anillo de Burnside es usando la **tabla de marcas** del grupo G. Para construir la tabla de marcas de G, primero escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\varphi_{H_i}(G/H_j)$.

Note que

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \;& \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \;& \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx) \leq K\}/|K| \\
= \;& \#\{E \leq G \mid E \leq K \text{ y } E =_G H\ \}|N_G(H)|/|K| \\
= \;& \beta(H, K)|N_G(H)|/|K|
\end{aligned}
$$

donde $A =_G B$ significa que A y B son conjugados en G, $\beta(H, K)$ es el número de subgrupos de G que son conjugados a H y están contenidos en K, y $N_G(H)$ denota el normalizador de H en G.

De manera análoga se puede demostrar que

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \;& \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \;& \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx) \leq K\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid H \leq xKx^{-1}\}/|K| \\
= \;& \#\{E \leq G \mid H \leq E \text{ y } E =_G K\}|N_G(K)|/|K| \\
= \;& \alpha(H,K)|N_G(K)|/|K|
\end{aligned}
$$

donde $\alpha(H,K)$ es el número de subgrupos de G que son conjugados a K y que contienen a H.

Ejemplo 1. Sea $G = C_p$ un grupo cíclico de orden p primo. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Sea $G = C_4$ un grupo cíclico de orden 4. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3. Sea $G = C_6$ un grupo cíclico de orden 6. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = C_3$, $H_4 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4. Sea $G = S_3$ el grupo simétrico de orden 6. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 =< (1,2) >$, $H_3 =< (1,2,3) >$, $H_4 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La tabla de marcas del grupo G proporciona una forma más sencilla y computacional de definir el anillo de Burnside de G:

Teorema 5. *Sea G un grupo finito, y sea M su tabla de marcas, digamos que es de n por n. El anillo de Burnside $B(G)$ es isomorfo al subanillo de $\mathbb{Z}^n$ generado por las columnas de M.*

Corolario 6. *Sean G y G' grupos finitos. Suponga que G y G' tienen* **tablas de marcas isomorfas***, es decir, existen ordenamientos de los subgrupos de G y G' que dan tablas de marcas idénticas. Entonces los anillos de Burnside de G y G' son isomorfos.*

Demostración: Se sigue de que las columnas de las tablas de marcas de G y G' son iguales, y por lo tanto generan los mismos subanillos. $\square$

Propiedades de las tablas de marcas.

La información siguiente se desprende de conocer la tabla de marcas M de un grupo G. Suponemos que los subgrupos se ordenaron de forma creciente para calcular la tabla de marcas.

El orden del grupo G: Es la mayor de las entradas de la tabla de marcas M (en el lugar $1-1$).

El número de clases de conjugación de subgrupos de G: Es el tamaño de M.

Los índices de los subgrupos de G: Son las entradas del primer renglón de M.

Los órdenes de los subgrupos de G: Se siguen de conocer los índices y el orden de G.

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se reconocen por su orden.

El índice de H en su normalizador: Es la entrada $H - H$-ésima.

El orden del normalizador de H en G: Es la entrada $H - H$-ésima multiplicada por el orden de G y dividida por la entrada $1 - H$-ésima.

El índice del normalizador de H en G: Es el cociente de la entrada $1 - H$ dividida por la entrada $H - H$-ésima. Este número también es el número de conjugados del subgrupo H en G.

El número de subgrupos de G: Se obtiene sumando los conjugados de H para toda H.

Los subgrupos normales de G: Son los H tales que la columna H-ésima tiene sólo dos valores, que son cero y el índice de H en G.

Los subgrupos K (hasta conjugación) de un subgrupo H de G: Son aquéllos para los que la entrada $H - K$ es diferente de cero.

Los subgrupos maximales propios de G: Son los H para los cuales las entradas del renglón H-ésimo entre la $H-H$ y la $H-G$ son cero.

El subgrupo de Frattini de G (es la intersección de todos los subgrupos maximales de G): Es el mayor subgrupo normal de G contenido en todos los subgrupos maximales.

La tabla de marcas de un grupo cociente G/H: Usando el Teorema de la Correspondencia, se obtiene encontrando los subgrupos de G que contienen a H.

¿Es G abeliano?: Todos sus subgrupos son normales y no tiene ningún cociente isomorfo a los cuaternios de orden 8.

El subgrupo derivado de G: Es el mayor subgrupo normal de G cuyo cociente es abeliano.

Los subgrupos cíclicos de G: Son los H tales que tienen un único subgrupo para cada divisor del orden de H.

Los subgrupos elementales abelianos de G (es decir, $(C_p)^n$): Están caracterizados por el número de subgrupos de orden p^2. Un subgrupo H de G es elemental abeliano si el orden de H es p^n para algún primo p y un entero $n \geq 1$, y ya sea que $n = 1$, o que $n = 2$ y H no sea cíclico, o que $n \geq 3$ y que el número de subgrupos de H de orden p^2 sea $(p^n - 1)(p^n - p)/(p^2 - 1)(p^2 - p)$.

Problemas abiertos

Actualmente tenemos a dos tesistas de licenciatura (Luis Manuel Huerta Aparicio y Ariel Molina Rueda) trabajando en Tablas de Marcas y Anillos de Burnside. Ellos están trabajando en algunos problemas abiertos en la teoría, que listamos a continuación:

Encontrar los subgrupos H de G tales que H es abeliano: Podemos determinar si G es abeliano, y podemos encontrar los subgrupos de G que sean cíclicos o elementales abelianos, pero no sabemos encontrar los subgrupos abelianos de G.

¿El anillo de Burnside determina la tabla de marcas? Es decir, si dos grupos G y G' tienen anillos de Burnside isomorfos, ¿se sigue que las tablas de marcas de G y G' se pueden reordenar para que coincidan? Ya vimos que el regreso es cierto, es decir, si dos grupos tienen la misma tabla de marcas, entonces los anillos de Burnside son isomorfos. Esta conjetura es una de las más difíciles en la teoría de anillos de Burnside. La estamos atacando desde un punto de vista computacional, usando el paquete GAP (*"Groups, Algorithms and Programming"*, disponible en `www.gap-system.org`). Para cada par de grupos en la biblioteca de grupos y tablas de marcas de GAP que tengan el mismo orden y tablas de marcas de iguales dimensiones, intentamos determinar si sus anillos de Burnside son isomorfos, y si sus tablas de marcas son isomorfas.

Dos tablas de marcas M y M' determinan anillos de Burnside isomorfos si y sólo si existen matrices P y Q tales que P es una matriz de permutación, Q tiene entradas enteras y determinante más o menos uno, y $M' = PMQ$. Definimos una **forma canónica de marcas** y otra **forma canónica de Burnside** asociadas al grupo G, de manera que dos grupos tienen anillos de Burnside isomorfos si y sólo si tienen la misma forma canónica de Burnside, y dos grupos tienen tablas de marcas isomorfas si y sólo si tienen la misma forma canónica de marcas.