Notas del curso de Algebra Lineal I

Luis Valero Elizondo

11 de septiembre de 2008

Índice general

Introducción.

Estas son las notas del curso de Algebra Lineal I impartido por Luis Valero Elizondo en la licenciatura de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México. Se pueden bajar por internet de la página del autor, que es

`http://www.fismat.umich.mx/~valero`

Escribí estas notas para que ustedes (mis alumnos) no tengan que perder tiempo en clase escribiendo. Si se ponen a hacer cuentas, notarán que pasan la mayor parte del tiempo de una clase típica escribiendo, y muy poco tiempo pensando o haciendo activamente matemáticas.

Para que ustedes puedan aprovechar al máximo este curso, es indispensable que le dediquen muchas horas de esfuerzo dentro y fuera del salón de clases. Antes de cada clase es muy importante que lean con cuidado el material que vamos a cubrir, que usualmente consistirá de una o dos secciones de estas notas (pues son secciones muy cortas).

También antes de clase deben intentar hacer todos los ejercicios de las secciones que lean. En cualquier caso, incluso si no les sale uno o varios ejercicios, ya habrán pasado un tiempo razonable pensando en ellos, y eso nos será de utilidad cuando cubramos ese material en la clase. Los ejercicios para cada sección se dividen en tres clases:

Los *ejercicios computacionales* son cuentas más o menos sencillas, aunque a veces llevan algo de tiempo.

Los *ejercicios de falso o verdadero* ponen a prueba su intuición, así como su habilidad para encontrar contraejemplos o dar demostraciones propias.

Los últimos ejercicios son las *demostraciones*, muy importantes para desarrollar el pensamiento analítico propio de los científicos.

Dentro de la clase vamos a hablar acerca del material que prepararon, y nos vamos a ir con bastante rapidez. Si no prepararon la lección, entonces la clase será tan aburrida como oír gente hablando de una película que no han visto. Si no leyeron las definiciones, no van a saber ni siquiera de lo que estamos hablando; y si leyeron las notas sin haber hecho los ejercicios, no van a poder entender lo que hagamos porque les faltará familiaridad con el tema. No tiene nada de vergorzoso haber intentado los ejercicios y estar atorado en uno o varios; de hecho yo estaré en la mejor disposición de ayudarlos y aclararles sus dudas. Pero es muy importante que ustedes hagan un esfuerzo por aprenderse las definiciones, y que le dediquen al menos 10 minutos a cada ejercicio antes de darse por vencidos. Noten que esto involucra un compromiso de parte de ustedes de al menos unas 4 o 5 horas por semana fuera del salón de clases para dedicarle a mi materia.

Al final de estas notas hay un índice analítico, para facilitarles la vida si necesitan encontrar una definición o notación (por ejemplo, qué es un **campo**, o cómo denoto en las notas a los **números reales**). Las palabras que aparecen en el índice analítico están en **negritas** en el texto. Casi siempre cerca de una definición hay ejercicios que tienen que ver con ella, y que les pueden servir de inspiración cuando estén resolviendo otros ejercicios.

Espero que estas notas les ayuden a entender mejor el álgebra lineal, y que aprendamos y nos divirtamos mucho en nuestro curso.

Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales.

1.1. Campos.

Definición 1. Sea C un conjunto no vacío. Una **operación binaria** en C es una función $* : C \times C \longrightarrow C$. Usualmente uno escribe $x * y$ en lugar de $*(x, y)$.

Ejemplos 2.

- La suma de números enteros es una operación binaria.
- La multiplicación de números enteros es una operación binaria.
- La resta de números enteros es una operación binaria.

Definición 3. Sea K un conjunto con dos operaciones binarias, llamadas **suma** (o **adición**) y **producto** (o **multiplicación**), denotadas $+$ y $\cdot$ respectivamente. Decimos que K es un **campo** (o **cuerpo**) si cumple las siguientes propiedades, llamadas los **axiomas de campo**:

1. La suma es **asociativa**, es decir, para cualesquiera a,b y c en K se tiene $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. La suma es **conmutativa**, es decir, para cualesquiera a y b en K se tiene $a + b = b + a$.
3. La suma tiene un **elemento neutro** (llamado **cero** o **neutro aditivo**), es decir, existe 0 en K único tal que para todo a en K se tiene $a+0 = a$.

4. La suma tiene **inversos**, es decir, para todo a en K existe un único elemento b tal que $a + b = 0$. A b se le llama el **inverso aditivo** de a, y se le denota $-a$.

5. El producto es asociativo, es decir, para cualesquiera a,b y c en K se tiene $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

6. El producto es conmutativo, es decir, para cualesquiera a y b en K se tiene $a \cdot b = b \cdot a$.

7. El producto tiene un elemento neutro (llamado **uno** o **neutro multiplicativo**), es decir, existe 1 en K único tal que para todo a en K se tiene $a \cdot 1 = a$. Además, 1 es diferente de 0.

8. Los elementos distintos de 0 tienen inversos multiplicativos, es decir, para todo a en K con $a \neq 0$, existe un único elemento b tal que $a \cdot b = 1$. A b se le llama el **inverso multiplicativo** de a, y se le denota a^{-1} o $1/a$.

9. El producto **distribuye** a la suma, es decir, para cualesquiera a,b y c en K se tiene $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Notación 4. Observe que normalmente escribimos ab en lugar de $a \cdot b$. A los elementos del campo K usualmente se les llama **escalares**.

Ejemplos 5.

- Los **números reales**, denotados $\mathbb{R}$, con la suma y producto usuales, forman un campo.

- Los **números racionales**, denotados $\mathbb{Q}$, con la suma y producto usuales, forman un campo.

- Los **números complejos**, denotados $\mathbb{C}$, con la suma y producto usuales, forman un campo.

- Sea $K = \{0, 1\}$ con las operaciones usuales, excepto que definimos $1 + 1 = 0$. Tenemos que K es un campo. A este campo se le llama el **campo de Galois** con dos elementos, o también el **campo primo** de característica dos, y se le denota $\mathbb{F}_2$. Note que en este campo $-1 = 1$.

- Los **números naturales**, denotados $\mathbb{N}$, con las operaciones usuales, no forman un campo (el 2 no tiene inverso aditivo).

- Los **números enteros**, denotados $\mathbb{Z}$, con las operaciones usuales, no forman un campo (el 3 no tiene inverso multiplicativo).

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 6. Calcule todas las operaciones binarias que se pueden definir en un conjunto con dos elementos.

Ejercicio 7. Sea $C = \{0, 1, 2\}$. Escriba las tablas de suma y multiplicación módulo 3 para los elementos de C (por ejemplo, 1+2=3 es 0 módulo 3).

Ejercicio 8. Sea $D = \{0, 1, 2, 3\}$. Escriba las tablas de suma y multiplicación módulo 4 para los elementos de C (por ejemplo, $3 \cdot 2 = 6$ es 2 módulo 4).

Ejercicio 9. Sea K un campo y sea 1 su uno. Para cada número entero positivo n defina recursivamente $n{\cdot}1$ como sigue: $1{\cdot}1 = 1$; $(n{+}1){\cdot}1 = n{\cdot}1{+}1$. Si existe un entero positivo n tal que $n{\cdot}1 = 0$, al menor n con dicha propiedad se le llama la **característica** del campo K. Si para todo entero positivo n tenemos que $n \cdot 1 \neq 0$, decimos que K es un campo de característica cero. Calcule la característica de cada uno de los siguientes campos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2$.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 10. El conjunto C del Ejercicio 7 es un campo con la suma y el producto módulo 3.

Ejercicio 11. El conjunto D del Ejercicio 8 es un campo con la suma y el producto módulo 4.

Demostraciones.

Ejercicio 12. Sea K un campo cualquiera. Demuestre que la característica de K es o bien cero o bien un número primo.

Ejercicio 13. Sea n un entero mayor o igual a 2, y sea $C = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Defina en C la suma y el producto usuales módulo n. Demuestre que C es un campo si y sólo si n es un número primo.

1.2. Sumatorias.

Notación 14. Sea K un campo, sea n un entero positivo, y sean $a_1, \ldots, a_n$ elementos en K. La suma de estos elementos usualmente se denota usando el símbolo $\sum$, llamado **sumatoria**, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

A la variable i de la expresión anterior se le llama **variable muda**. La variable muda no tiene ningún valor fijo, sino que representa el posible rango de valores de los subíndices de la sucesión $a_1, \ldots, a_n$. La sumatoria tiene exactamente el mismo valor si se reemplaza la variable muda i por otra variable muda, digamos j, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Cuando aparecen dos o más sumatorias con el mismo rango de valores para sus variables mudas, es común usar la misma variable muda, es decir, escribir algo como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + b_i$$

Sin embargo, es preferible no usar dos veces la misma varible muda en dos sumatorias distintas cuando tienen distintos rangos de valores, pues esto puede llevar a confusión, es decir, es mejor evitar expresiones del siguiente tipo (aunque muchos autores las emplean):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i$$

y escribir en cambio

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=n+1}^{m} a_j$$

Otras tres notaciones usuales (y que sí recomendamos usar) para la sumatoria son

$$\sum_{i=1,\ldots,n} a_i \qquad \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_i \qquad \sum_{1\leq i\leq n} a_i$$

A veces, cuando el rango de valores de la variable muda es conocido, simplemente se escribe la anterior sumatoria como

$$\sum_i a_i \qquad \text{o} \qquad \sum a_i.$$

Ejemplos 15.

- $\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$.
- $\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
- $\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

Notación 16. Por convención, definimos la sumatoria de un elemento como dicho elemento, es decir:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$$

Además, definimos la **sumatoria vacía** como 0.

Demostraciones.

Ejercicio 17. Sea n un entero positivo, sea $a_1, \ldots, a_n$ una sucesión de n elementos del campo K, y sea b un elemento cualquiera de K. Demuestre la **propiedad distributiva generalizada**, es decir, que

$$\sum_{i=1}^{n} ba_i = b \sum_{i=1}^{n} a_i$$

1.3. Sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 18. Sean K un campo y n un entero positivo. Una **ecuación lineal** en el campo K con n **incógnitas** (o n **indeterminadas**, o **variables**) es una igualdad de la forma:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde tanto c como $a_1, \ldots, a_n$ son elementos fijos en K.

Un **sistema de ecuaciones lineales** sobre el campo K es un conjunto de m ecuaciones lineales en K (con m un entero positivo). Un sistema de

m ecuaciones lineales con n incógnitas se escribe usualmente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & c_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & c_m \end{array}$$

A los ai, j se les llama los **coeficientes** del sistema, a los c_i se les llama los **términos constantes** del sistema, y a los x_i se les llama las incógnitas (o indeterminadas) del sistema. Una **solución** del sistema anterior es una sucesión $s_1, \ldots, s_n$ de elementos en K que satisface todas las ecuaciones del sistema, es decir, que cumple

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n & = & c_1 \\ a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \cdots + a_{2,n}s_n & = & c_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \cdots + a_{m,n}s_n & = & c_m \end{array}$$

El **conjunto solución** del sistema es el conjunto de todas las soluciones del sistema. El sistema se llama **consistente** si tiene al menos una solución, y se llama **inconsistente** si no tiene ninguna solución. El sistema se llama **homogéneo** si $c_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Ejemplos 19.

- El sistema sobre el campo $\mathbb{R}$

  $$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 4 \\ x_1 - x_2 & = & 2 \end{array}$$

  se puede resolver por sustitución, es decir, despejando a x_2 de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda. Así llegamos a que $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ es la única solución del sistema, que por lo tanto es consistente. El conjunto solución es $\{(3, 1)\}$.

- El conjunto solución del sistema (sobre el campo $\mathbb{R}$)

  $$x_1 + 3x_2 \;=\; 7$$

  es el conjunto $\{(7 - 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Note que este conjunto es infinito, pues para cada valor del **parámetro** t hay una solución distinta.

- El sistema sobre el campo $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

  es inconsistente, puesto que el valor de $x_1 + x_2$ no puede ser igual a 4 y a 2 al mismo tiempo.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 20. Calcule el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando números reales (es decir, el campo es $K = \mathbb{R}$):

- $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 9 \\ x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 14 \\ x_1 - 3x_2 &= -14 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- $$x_1 + x_2 = 10$$

- $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 \\ 5x_1 + 5x_2 &= 50 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &= 4 \\ x_2 \quad &= 7 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= 10 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 &= 3 \\ x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 21. Sea $a_1, \ldots, a_n$ una sucesión arbitraria de números reales. Encuentre un sistema sobre $\mathbb{R}$ de n ecuaciones con n incógnitas cuyo conjunto solución sea el conjunto $\{(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Ejercicio 22. Encuentre un sistema sobre $\mathbb{R}$ cuyo conjunto solución sea el conjunto $\{(5-2t_1, 4+t_1+t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$. Note que este conjunto tiene dos parámetros.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 23. Todo sistema inconsistente tiene al menos dos incógnitas.

Ejercicio 24. Todo sistema inconsistente tiene al menos dos ecuaciones.

Demostraciones.

Ejercicio 25. Demuestre que todo sistema homogéneo es consistente.

Ejercicio 26. Demuestre que todo sistema con una única ecuación y al menos una variable es consistente.

1.4. Matrices.

Definición 27. Sea K un campo, y sean n, m enteros positivos. Una **matriz** con n renglones y m columnas (también llamada una matriz de n por m) es una colección de $n \cdot m$ elementos de K, llamados las **entradas** (o los **elementos**, o los **coeficientes**) de la matriz, en donde cada uno de los $n \cdot m$ elementos se identifica por medio de dos **índices**. El primer índice es el número de renglón, y toma valores enteros entre 1 y n; el segundo índice es el número de columna, y toma valores enteros entre 1 y m. Si la matriz se denota con la letra A, su entrada correspondiente al i-ésimo renglón y j-ésima columna se denota $A_{i,j}$, o si no hay lugar a equivocaciones, se omite la coma y queda A_{ij}. A veces se usan letras mayúsculas para la matriz y letras minúsculas para sus entradas, o sea que la matriz es A y sus entradas son $a_{i,j}$; a esta entrada también se le conoce como la entrada (i, j) de la matriz A. El **rengón** (o **fila**) i-ésimo de la matriz A es la sucesión $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}$. La **columna** j-ésima de la matriz A es la sucesión $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$. Decimos que dos matrices A y B tienen las mismas **dimensiones** si el número de renglones de A es igual al número de renglones de B, y el número de columnas de A es igual al número de columnas de B.

Observación 28. También es posible definir una matriz A como una función $A : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \longrightarrow K$. La entrada (i, j) de A es simplemente el valor de la función A en (i, j).

Notación 29. Sea A una matriz de n renglones y m columnas con entradas en un campo K. Usualmente uno denota a la matriz A por medio de un arreglo de n sucesiones de m elementos de K, donde la entrada (i, j) de A es el j-ésimo elemento de la i-ésima sucesión.

Ejemplo 30. La matriz A con 2 renglones y 3 columnas cuyas entradas son $A_{1,1} = 1$; $A_{1,2} = 2$; $A_{1,3} = 3$; $A_{2,1} = 4$; $A_{2,2} = 5$; $A_{2,3} = 6$, se denota de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

El primer renglón de la matriz A consta del 1, 2 y 3; el segundo renglón consta del 4, 5 y 6; la primera columna de la matriz A consta del 1 y el 4; la segunda columna consta del 2 y el 5; la tercera columna consta del 3 y 6. La entrada (2,3) de la matriz A es la que está en el segundo renglón y la tercera columna, es decir, el 6.

Observación 31. Dos matrices A y B son iguales si y sólo si tienen el mismo número de renglones, el mismo número de columnas, y además $A_{ij} = B_{ij}$ para todos los posibles valores de i y j.

Definición 32. Sea

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & c_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & c_m \end{array}$$

un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. La **matriz asociada al sistema** de ecuaciones dado arriba es la matriz con m renglones y n columna cuyas entradas son los respectivos coeficientes del sistema, es decir, la matriz A de dimensiones m por n cuya entrada (i,j) es $a_{i,j}$. La **matriz aumentada asociada al sistema** de ecuaciones es la matriz $\bar{A}$ con una columna adicional, formada por los términos constantes del sistema de ecuaciones.

Ejemplo 33. La matriz asociada al sistema

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 7x_2 & = & 9 \\ -\,x_2 & = & 3 \end{array}$$

es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada asociada a este sistema es

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición 34. Sean A y B matrices con n renglones y m columnas, y entradas en un campo K. La **suma de las matrices A y B** , denotada $A+B$, es la matriz de n renglones y m columnas cuya entrada (i,j) es igual a $A_{ij}+B_{ij}$, es decir, la suma de las entradas (i,j) de A y B.

Ejemplo 35.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 36. Note que si A y B son matrices con entradas en un mismo campo, su suma está bien definida si y sólo si A y B tienen las mismas dimensiones.

Definición 37. Sea A una matriz con n renglones y m columnas cuyas entradas son elementos de un campo K, y sea a un escalar de K. La **multiplicación de la matriz A por el escalar a** , denotada aA, es la matriz con n renglones y m columnas cuya entrada (i,j) es aA_{ij}, es decir, el escalar a multiplicado por la entrada (i,j) de A.

Ejemplo 38.

$$5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 20 \\ 15 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Notación 39. En lugar de escribir $-1A$, usualmente escribimos $-A$; en lugar de $A+(-B)$ escribimos $A-B$.

Teorema 40. *La suma de matrices es conmutativa, es decir, que si A y B son matrices con entradas en un campo K y con las mismas dimensiones, entonces se pueden definir tanto $A+B$ como $B+A$, y además $A+B=B+A$.*

Demostración: La hipótesis sobre las dimensiones de A y B garantiza que tanto $A+B$ como $B+A$ estén bien definidas y tienen las mismas dimensiones. Resta demostrar que cada entrada (i,j) de $A+B$ es igual a la respectiva entrada (i,j) de $B+A$. Se tiene que

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j}+B_{i,j} = B_{i,j}+A_{i,j} = (B+A)_{i,j}$$

□

Teorema 41. *Sean n y m enteros positivos, y sea K un campo. Tenemos que el conjunto de matrices de n por m con entradas en K tiene un único neutro* *aditivo, es decir, existe una única matriz, denotada 0 y llamada la* ***matriz cero*** *de n por m con entradas en K, tal que para cualquier matriz A de n por m con entradas en K se tiene A +0 =A =0 + A. Más aún, para cualquier matriz A de n por m con entradas en K se tiene que A +(-A)=0 =-A +A (donde -A se definió anteriormente). A la matriz -A se le llama el* ***inverso aditivo de la matriz*** *A.*

Demostración: Sea $\mathit{0}$ la matriz de n por m cuyas entradas son todas iguales al cero de K. Dada cualquier otra matriz A de n por m, note que $A + \mathit{0}$ y A tienen las mismas dimensiones, y que

$$(A + \mathit{0})_{i,j} = A_{i,j} + \mathit{0}_{i,j} = A_{i,j} + 0 = A_{i,j}$$

por lo que $A + \mathit{0} = A$. Como la suma de matrices es conmutativa, se tiene también que $\mathit{0} + A = A$. Esto establece la existencia de la matriz cero. Para demostrar la unicidad de dicha matriz, suponga ahora que existe otra matriz C de n por m tal que para toda matriz A de n por m se tiene que $A + C = A = C + A$. En particular para la matriz $\mathit{0}$ se tiene que $\mathit{0} + C = \mathit{0}$. Por otro lado, la matriz $\mathit{0}$ es tal que $\mathit{0} + C = C$, y juntando ambos resultados tenemos que $C = \mathit{0}$, lo que establece la unicidad de la matriz cero.

Pasemos ahora a los inversos aditivos. La matriz $-A$ definida anteriormente es tal que A y $-A$ tienen las mismas dimensiones, por lo que su suma está bien definida, y la entrada (i, j) de dicha suma es

$$(A + (-A))_{i,j} = A_{i,j} + (-A_{i,j}) = 0 = \mathit{0}_{i,j}$$

por lo que $A + (-A) = \mathit{0}$. Como la suma de matrices es conmutativa, también tenemos que $(-A) + A = \mathit{0}$, por lo que $-A$ es un inverso aditivo de la matriz A. Para terminar la demostración, resta ver que $-A$ es la única matriz con la propiedad anterior. Suponga que existe una matriz D de n por m tal que $A + D = \mathit{0} = D + A$. Sumando $-A$ por la izquierda a ambos miembros obtenemos $-A + (A + D) = (-A) + \mathit{0}$. Por la propiedad de $\mathit{0}$, nos queda que $(-A) + \mathit{0} = -A$. Por el Ejercicio 50, la suma de matrices es asociativa, de donde tenemos que $-A + (A + D) = (-A + A) + D = \mathit{0} + D = D$, es decir, $D = -A$, lo que demuestra la unicidad de los inversos aditivos para la suma de matrices. □

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 42. Escriba explícitamente la matriz A de 3 por 2 cuyas entradas están dadas por $a_{i,j} = 5i^2 - 7j$.

Ejercicio 43. Para cada sistema de ecuaciones lineales del Ejercicio 20, calcule su matriz asociada y su matriz aumentada asociada.

Ejercicio 44. Calcule cada una de las operaciones indicadas:

- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$
- $$10 \begin{pmatrix} 17 & 81 \\ 79 & 23 \end{pmatrix}$$
- $$-2 \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$7 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$
- $$\left[\begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right]$$
- $$\begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -22 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 45. Toda matriz es la matriz asociada a algún sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 46. Toda matriz es la matriz aumentada asociada a algún sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 47. Si dos sistemas de ecuaciones tienen la misma matriz asociada, entonces los dos sistemas son iguales.

Ejercicio 48. Sean A y B matrices. Si existe un sistema de ecuaciones tal que tanto A como B son matrices asociadas a dicho sistema, entonces $A = B$.

Demostraciones.

Ejercicio 49. Demuestre que si dos sistemas homogéneos de ecuaciones tienen la misma matriz asociada, entonces los dos sistemas son iguales.

Ejercicio 50. Demuestre que la suma de matrices es asociativa, es decir, que si A, B y C son matrices con las mismas dimensiones, entonces se pueden definir $A + B$, $[A + B] + C$, $B + C$ y $A + [B + C]$, y además $[A + B] + C = A + [B + C]$. Debido a esto, dicha suma usualmente se escribe simplemente como $A + B + C$.

Ejercicio 51. Enuncie un enunciado análogo al del Ejercicio 50 para la suma de un número finito de matrices.

1.5. Multiplicación de matrices.

Definición 52. Sean K un campo, A una matriz de n por m, y B una matriz de m por t. El **producto de las matrices** A y B, denotado AB, es la matriz de n por t cuyas entradas están dadas por

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,j}$$

Ejemplos 53.

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Observación 54. Note que para poder hacer el producto de las matrices AB, es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de renglones de B; de lo contrario, su producto no está bien definido. Al escribir un producto de matrices AB, implícitamente se afirma que las dimensiones de A y B son apropiadas para que su producto esté bien definido.

Definición 55. Sea A una matriz con entradas en un campo K. Decimos que A es una **matriz cuadrada** si tiene el mismo número de renglones que de columnas.

Ejemplo 56. La matriz identidad de n por n, que es la matriz que tiene unos en la diagonal y ceros en las dems entradas, es una matriz cuadrada.

Definición 57. Sea A una matriz cuadrada. Entonces podemos definir el producto AA, el cual denotamos A^2 y lo llamamos el cuadrado de la matriz A. Recursivamente definimos todas las potencias enteras positivas $A^{n+1} = A^nA$. Por completez, definimos $A^1 = A$.

Proposición 58. *Sean A, B y C matrices con entradas en un campo K. Supongamos que A es de n por m, y que tanto B como C son de m por t. Tenemos entonces que las siguientes matrices están bien definidas, y además*

$$A(B+C) = AB + AC$$

Es decir, el producto de matrices distribuye a la suma de matrices por la derecha. Se le pide al lector demostrar la distributividad izquierda en el Ejercicio 70.

Demostración: La hipótesis sobre las dimensiones garantiza que todos los productos indicados estén bien definidos, y que tanto $A(B+C)$ como $AB+AC$ tengan n renglones y t columnas. Resta verificar que las entradas de $A(B+C)$ y $AB+AC$ coinciden, es decir, que la entrada (i,j) de $A(B+C)$ es igual a la entrada (i,j) de $AB+AC$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}(B+C)_{k,j} = \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}(B_{k,j}+C_{k,j}) = \\
\sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,j} + A_{i,k}C_{k,j} &= \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,j} + \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}C_{k,j} = \\
(AB)_{i,j} + (AC)_{i,j} &= (AB+AC)_{i,j}
\end{aligned}$$

□

Observación 59. Suponga que tenemos una sucesión **doblemente indexada** (es decir, que en lugar de uno tiene dos sub-índices) de elementos $a_{i,j}$ en el campo K, donde $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $j \in \{1,\ldots,m\}$. Es posible sumarlos todos de dos maneras diferentes (aunque el resultado final es el mismo):

Primera manera: Para cada i fija, hacer variar la j y sumar todos los $a_{i,j}$, para obtener

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$$

Luego sumar cada una de estas sumas parciales, para obtener

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$$

Segunda manera: Para cada j fija, hacer variar la i y sumar todos los $a_{i,j}$, para obtener

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Luego sumar cada una de estas sumas parciales, para obtener

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Como éstas son dos maneras diferentes de obtener la suma de todos los elementos, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Coloquialmente, decimos que **intercambiamos las sumatorias**.

Teorema 60. *Sean A, B y C matrices con entradas en el campo K. Supongamos que A es de n por m, B es de m por t, y C es de t por s. Entonces todos los siguientes productos están bien definidos, y además se tiene la igualdad*

$$A(BC) = (AB)C$$

Es decir, el producto de matrices es asociativo. Sin embargo, el Ejercicio 63 muestra que el producto de matrices no es en general conmutativo, incluso si está bien definido.

Demostración: La hipótesis sobre las dimensiones garantiza que todos los productos indicados estén bien definidos, y que tanto $A(BC)$ como $(AB)C$ tengan n renglones y s columnas. Resta verificar que las entradas de $A(BC)$ y $(AB)C$ coinciden, es decir, que la entrada (i,j) de $A(BC)$ es igual a la entrada (i,j) de $(AB)C$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}(BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{m} A_{i,k}\left(\sum_{l=1}^{t} B_{k,l}C_{l,j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{t} A_{i,k}B_{k,l}C_{l,j} = \sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,l}C_{l,j} \\
&= \sum_{l=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,l}\right) C_{l,j} = \sum_{l=1}^{t}(AB)_{i,l}C_{l,j} \\
&= [(AB)C]_{i,j}
\end{aligned}$$

□

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 61. Encuentre dos matrices A y B con entradas en un campo tales que el producto AB esté bien definido pero el producto BA no esté definido.

Ejercicio 62. Encuentre dos matrices A y B con entradas en un campo tales que tanto el producto AB como el producto BA estén bien definidos, pero que tengan distintas dimensiones.

Ejercicio 63. Encuentre dos matrices A y B con entradas en un campo tales que tanto el producto AB como el producto BA estén bien definidos y tengan las mismas dimensiones, pero que $AB \neq BA$.

Ejercicio 64. Sea I la matriz identidad de n por n con entradas en un campo K, y sea m otro entero positivo. Calcule I^m.

Ejercicio 65. Sea 0 la matriz cero de n por n con entradas en un campo K, y sea m otro entero positivo. Calcule 0^m.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 66. Sea A una matriz con entradas en un campo. Entonces A^2 está definida si y sólo si A es una matriz cuadrada.

Ejercicio 67. Sea A una matriz de dos por dos con entradas en $\mathbb{Q}$ tal que $A^2 = I$. Entonces $A = I$.

Ejercicio 68. No existe una matriz A de dos por dos con entradas en $\mathbb{Q}$ tal que $A^2 = -I$.

Ejercicio 69. Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. Entonces $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Demostraciones.

Ejercicio 70. Enuncie y demuestre el resultado análogo a la Proposición 58 por la izquierda.

Ejercicio 71. Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. Demuestre que $AB = BA$ si y sólo si $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

1.6. Matrices elementales.

Definición 72. Sea K un campo, y sea n un entero positivo. La **matriz identidad** de tamanño n, denotada I_n o simplemente I (cuando es claro en el contexto que todas las matrices son de n renglones y n columnas), es la matriz con n renglones y n columnas cuya entrada (i, j) es 1 si $i = j$, y 0 si $i \neq j$.

Ejemplos 73.

- La matriz identidad de 2 por 2 es

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz identidad de 3 por 3 es

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 74. La **matriz canónica** de n renglones y n columnas de coordenadas (a, u), denotada E^n_{au} (o simplemente E_{au} si es conocido el valor de la n), es la matriz cuya entrada (i, j) es 1 si el par ordenado (i, j) es igual al par ordenado (a, u), y 0 en cualquier otro caso.

Ejemplos 75.

- La matriz canónica de 2 por 2 de coordenadas (1,2) es

$$E^2_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matriz canónica de 2 por 2 de coordenadas (2,2) es

$$E^2_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz canónica de 3 por 3 de coordenadas (1,2) es

$$E^3_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 76. Una **matriz elemental** es una matriz cuadrada que tenga alguna de las siguientes formas:

Tipo I: $I + aE_{ij}$ con algún $a \in K$, $a \neq 0$, y $i \neq j$;

Tipo II: $I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, con $i \neq j$;

Tipo III: $I - E_{ii} + aE_{ii}$ para algún $a \in K$, $a \neq 0$.

Ejemplos 77.

- Matrices elementales de Tipo I:
  - $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$
- Matrices elementales de Tipo II:
  - $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Matrices elementales de Tipo III:

- $$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 78. Liste explícitamente todas las matrices elementales de 1 por 1 sobre un campo arbitrario K, y diga de qué tipo son..

Ejercicio 79. Liste explícitamente todas las matrices elementales de 2 por 2 sobre el campo $\mathbb{F}_2$.

Ejercicio 80. Describa todas las matrices elementales de 2 por 2 sobre un campo K.

Ejercicio 81. Calcule el número de matrices elementales (de cada tipo) de 3 por 3 sobre el campo $\mathbb{F}_2$.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 82. La identidad es una matriz elemental.

Ejercicio 83. Sea $n \geq 2$ un entero fijo. Entonces hay más matrices elementales de tipo I que de tipo II para el campo $\mathbb{F}_2$.

Demostraciones.

Ejercicio 84. Demuestre que una matriz elemental no puede ser de dos tipos diferentes.

1.7. Operaciones elementales de renglón.

Definición 85. Sea A una matriz de n por m. Una **operación elemental de renglones** (o también llamada **operación elemental de filas**) de A es una de las tres siguientes operaciones:

Tipo I: Reemplazar el renglón j-ésimo de A por la suma del renglón j-ésimo más a veces el renglón i-ésimo, con $j \neq i$ y $a \neq 0$. Coloquialmente, decimos que le sumamos al renglón j-ésimo a-veces el renglón i-ésimo.

Tipo II: Intercambiar los renglones i-ésimo y j-ésimo, con $i \neq j$.

Tipo III: Reemplazar el renglón i-ésimo por a veces el renglón i-ésimo, con $a \neq 0$. Coloquialmente, decimos que multiplicamos el renglón i-ésimo por a.

Ejemplo 86. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Sumando 2 veces el segundo renglón al primer renglón de A nos da la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
- Intercambiando el primero y el segundo renglón de A nos da
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Multiplicando el segundo renglón de A por -2 nos da
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Teorema 87. *Sea R una matriz elemental de n por n de Tipo i, con $i = 1, 2, 3$. Entonces R se obtiene de realizar una única operación elemental de renglón de Tipo i a la matriz identidad I de n por n. Debido a esto, a la operación elemental de renglón de arriba se le llama la* ***operación elemental de renglón asociada a la matriz elemental*** *R. Inversamente, si* *se realiza una operación elemental de renglón a I, se obtendrá una matriz elemental del mismo tipo. Más aún, si A es una matriz de n por m, entonces el producto RA es igual al resultado de realizar a A la operación elemental de renglón asociada a R.*

Demostración: Primero supongamos que R es una matriz elemental, y veamos que se obtiene de realizar una operación elemental del mismo tipo a la matriz identidad. Tenemos tres casos, según el tipo de R:

Tipo I: $R = I + aE_{ij}$ con algún $a \in K$, $a \neq 0$, y $i \neq j$; entonces R se obtiene de I sumando a veces el renglón j-ésimo al renglón i-ésimo.

Tipo II: $R = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, con $i \neq j$; entonces R se obtiene de I intercambiando los renglones i y j.

Tipo III: $R = I - E_{ii} + aE_{ii}$ para algún $a \in K$, $a \neq 0$; entonces R se obtiene de I multiplicando el renglón i-ésimo por a.

Note que en cada caso, la operación elemental de renglón que produce R es única. Inversamente, podemos ver que si aplicamos una operación elemental de renglón a I obtendremos una matriz elemental del mismo tipo.

Ahora bien, sea A una matriz de n por m. Resta demostrar que RA es el resultado de realizar a A la operación elemental asociada a R. Nuevamente tenemos tres casos, según el Tipo de operación elemental asociada a R:

Tipo I: R se obtiene de I sumando a veces el renglón j-ésimo al renglón i-ésimo. Considere el renglón k-ésimo de R, con $k \neq i$; la única entrada distinta de cero es la de la k-ésima columna, que es un uno, por lo que el producto RA tendrá como k-ésimo renglón el k-ésimo renglón de A. El renglón i-ésimo de R tiene un uno en el lugar i, y a en el lugar j, por lo que el renglón i-ésimo de RA consitirá del renglón i-ésimo de A sumado con a veces el renglón j-ésimo de A.

Tipo II: R se obtiene de I intercambiando los renglones i y j. Considere el renglón k-ésimo de R, con $k \neq i$ y $k \neq j$; la única entrada distinta de cero es la de la k-ésima columna, que es un uno, por lo que el producto RA tendrá como k-ésimo renglón el k-ésimo renglón de A. El renglón i-ésimo de R tiene un uno en el lugar j, por lo que el renglón i-ésimo de RA consitirá del renglón j-ésimo de A. Análogamente, el renglón j-ésimo de R tiene un uno en el lugar i, por lo que el renglón j-ésimo de RA consitirá del renglón i-ésimo de A.

Tipo III: R se obtiene de I multiplicando el renglón i-ésimo por a. Considere el renglón k-ésimo de R, con $k \neq i$; la única entrada distinta de cero es la de la k-ésima columna, que es un uno, por lo que el producto RA tendrá como k-ésimo renglón el k-ésimo renglón de A. El renglón i-ésimo de R tiene a en el lugar i, por lo que el renglón i-ésimo de RA consitirá de a veces el renglón i-ésimo de A.

□

Definición 88. Sean A y B matrices de n por m. Decimos que A y B son **equivalentes por renglones** (o **equivalentes por filas**) si B se puede obtener de A realizando un número finito de operaciones elementales de renglones.

Ejemplo 89. Sea A_1 la matriz

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Restando 3 veces el primer renglón al segundo nos da la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dividiendo el segundo renglón por 2 nos da

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intercambiando el primero y el segundo renglón de A_3 nos da

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, las matrices A_1 y A_4 son equivalentes por renglones.

Proposición 90. *Sean A y B matrices de n por m con entradas en un campo K. Entonces A y B son equivalentes por renglones si y sólo si existe una matriz C de n por n tal que C es producto de matrices elementales y $B = CA$.*

Demostración: Se sigue del Teorema 87. □

Proposición 91. *La relación "ser equivalente por renglones a" es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las matrices n por m con entradas en un campo K, es decir:*

1) Toda matriz es equivalente por renglones a sí misma

2) Si A es equivalente por renglones a B entonces B es equivalente por renglones a A.

3) Si A es equivalente por renglones a B y B es equivalente por renglones a C, entonces A es equivalente por renglones a C.

Demostración: 1) Multiplicando el primer renglón de A por 1 nos da A.

2) Suponga que B se obtiene realizando un número finito de operaciones elementales de renglones a A. Por el Ejercicio 98, realizando las operaciones elementales inversas podemos obtener A a partir de B.

3) Si B se obtiene haciendo operaciones elementales a A, y C se obtiene haciendo operaciones elementales a B, entonces C se obtiene haciendo (en orden) todas esas operaciones elementales juntas a A. □

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 92. Considere la matriz identidad de dos por dos sobre $\mathbb{F}_2$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule todas las matrices que resultan de hacerle una operación elemental de renglón a I.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 93. Sea A una matriz de n por n con entradas en un campo K, y sea I la matriz identidad de n por n con entradas en K. Entonces A es equivalente por renglones a I si y sólo si $A = I$.

Ejercicio 94. Sea A una matriz. Realice primero una operación elemental de renglones a A para obtener una matriz B, y luego realice otra operación elemental de renglones a B para obtener una matriz C. Entonces C se puede obtener de A haciendo una única operación elemental de renglones.

Demostraciones.

Ejercicio 95. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K, y sea $\mathit{0}$ la matriz cero de n por m con entradas en K. Demuestre que A es equivalente por renglones a $\mathit{0}$ si y sólo si $A = \mathit{0}$.

Ejercicio 96. Demuestre que dos matrices canónicas E_{ij} y E_{kl} de las mismas dimensiones son equivalentes por renglones si y sólo si $j = l$.

Ejercicio 97. Demuestre que las matrices elementales son precisamente las que resultan de hacer una operación elemental de renglones a la matriz identidad.

Ejercicio 98. Sea A una matriz. Realice una operación elemental de renglones a A para obtener una matriz B. Demuestre que es posible hacer una operación elemental a B para obtener A, y que dicha operación es del mismo tipo que la que se hizo para llevar A a B. Coloquialmente decimos que las operaciones elementales son invertibles.

1.8. Matrices escalón reducidas por renglones.

Definición 99. Decimos que un escalar del campo K es **nulo** si es igual a cero; decimos que un renglón de una matriz es nulo si todas sus entradas son nulas, y que una matriz es nula si es la matriz cero.

Definición 100. Una matriz A de n por m se dice que es **reducida por renglones** (o **reducida por filas**) si cumple las siguientes condiciones:

1. El primer elemento no nulo de cada renglón no nulo de A es uno.

2. Cada columna de A que tiene el primer elemento no nulo de algún renglón, tiene todos sus otros elementos iguales a cero.

Ejemplos 101.

- La matriz cero es reducida por renglones.

- La matriz identidad es reducida por renglones.

- Las matrices canónicas E_{ij} son reducidas por renglones.

- La matriz sobre $\mathbb{Q}$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
no es reducida por renglones, pues su primer renglón tiene como primera entrada no nula un -1.

- La matriz sobre $\mathbb{Q}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
no es reducida por renglones, pues su segunda columna tiene la primera entrada no nula del segundo renglón, y su otra entrada es 2.

Lema 102. *Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. Entonces existe una matriz reducida por renglones que es equivalente por renglones a A.*

Demostración: Daremos un algoritmo para llevar a la matriz A a una matriz reducida por filas realizando operaciones elementales de renglones. Para cada valor de i entre 1 y n (en ese orden) haga lo siguiente:

1. Si el renglón i-ésimo es nulo, ignórelo y pase al siguiente renglón.

2. Si el renglón i-ésimo no es nulo, sea j la columna donde se encuentra la primera entrada no nula del renglón.

3. Multiplique el renglón i-ésimo por el inverso multiplicativo de la entrada (i,j), para que dicha entrada se convierta en un uno. A esta entrada se le conoce como un **pivote**.

4. Para cada k desde 1 hasta n (excepto $k = i$), reste un múltiplo apropiado del renglón i-ésimo al renglón k-ésimo para hacer cero la entrada (k,j).

Note que los pivotes van quedando en columnas diferentes, puesto que cada vez que un pivote surge, éste hace cero a todas las entradas de su columna. Al concluir el algoritmo, todo renglón no nulo tendrá como primer elemento a un pivote, y todas las otras entradas en la columna del pivote serán cero. □

Observación 103. Una matriz puede ser equivalente por renglones a dos matrices reducidas por renglones diferentes. (Véase el Ejercicio 108)

Definición 104. Una matriz A de n por m se dice que es **escalón reducida por renglones** (o **escalón reducida por filas**) si cumple las siguientes condiciones:

1. A es reducida por renglones.
2. Todos los renglones nulos de A están debajo de todos los renglones no nulos.
3. Dados dos renglones no nulos consecutivos de A, la primera entrada no nula del renglón de abajo está en una columna estrictamente mayor que la primera entrada no nula del renglón de arriba.

Ejemplos 105.

- La matriz cero es escalón reducida por renglones.
- La matriz identidad es escalón reducida por renglones.
- La matriz canónica E_{ij} es escalón reducida por renglones si y sólo si $i = 1$, pues de lo contrario tendría un renglón nulo arriba de un renglón no nulo.
- La matriz sobre $\mathbb{Q}$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
es escalón reducida por renglones.
- La matriz sobre $\mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
es escalón reducida por renglones.
- La matriz sobre $\mathbb{C}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
es escalón reducida por renglones.
- La matriz sobre $\mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
no es escalón reducida por renglones, pues tiene un renglón nulo arriba de un renglón no nulo.

- La matriz sobre $\mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
no es escalón reducida por renglones, pues la primera entrada no nula del segundo renglón está en una columna menor que la de la primera entrada no nula del renglón de arriba.

Proposición 106. *Sea A una matriz con entradas en un campo K. Entonces existe una matriz escalón reducida por renglones que es equivalente por renglones a A.*

Demostración: Por el Lema 102, existe una matriz B que es reducida por renglones y equivalente por renglones a A. Permutando renglones, podemos mandar a todos los renglones nulos de B hasta abajo. Finalmente, podemos mandar al primer lugar al renglón que tenga su pivote en la columna más chica, luego mandamos al segundo lugar al renglón que tenga su pivote en la segunda columna más chica, y así sucesivamente hasta obtener una matriz escalón reducida por renglones. □

Observación 107. La matriz escalón reducida por renglones que se menciona en la Proposición 106 es única, y se llama la **forma escalón reducida por renglones** de la matriz A. En el Ejercicio 159 se demostrará este hecho. El procedimiento descrito en el Lema 102 junto con el reordenamiento de los renglones de la demostración de la Proposición 106 se llama **eliminación Gaussiana**.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 108. Demuestre que la matriz sobre $\mathbb{Q}$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
es equivalente por renglones a dos matrices reducidas por renglones diferentes.

Ejercicio 109. Para cada una de las siguientes matrices sobre $\mathbb{Q}$, calcule una matriz equivalente por renglones que sea escalón reducida por renglones:

- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 110. Calcule todas las matrices escalón reducidas por renglones de 2 por 2 con entradas en $\mathbb{F}_2$.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 111. Toda matriz escalón reducida por renglones es reducida por renglones.

Ejercicio 112. Toda matriz reducida por renglones es escalón reducida por renglones.

Ejercicio 113. Sean A y B matrices de iguales dimensiones. Si A y B son equivalentes por renglones y ambas son reducidas por renglones, entonces $A = B$.

Ejercicio 114. La condición *"Dados dos renglones no nulos **consecutivos** de A, la primera entrada no nula del renglón de abajo está en una columna estrictamente mayor que la primera entrada no nula del renglón de arriba"* en la definición de matriz escalón reducida por renglones, se puede reemplazar por *"Dados dos renglones no nulos **cualesquiera** de A, la primera entrada no nula del renglón de abajo está en una columna estrictamente mayor que la primera entrada no nula del renglón de arriba"*, y obtener una definición equivalente a la Definición 104.

Demostraciones.

Ejercicio 115. Sean A y B matrices de 2 por 2 con entradas en un campo K. Demuestre que si A y B son equivalentes por renglones y ambas son escalón reducidas por renglones, entonces $A = B$.

1.9. Matrices invertibles.

Definición 116. Sean A y B matrices de n por n con entradas en un campo K, tales que $AB = I$, donde I denota la matriz identidad de n por n. Decimos entonces que A es un **inverso izquierdo** de B, y que B es un **inverso derecho** de A. Si A tiene tanto inverso izquierdo como inverso derecho, decimos que A es **invertible** (o **inversible**).

Lema 117. *Sea A una matriz invertible, y sean B un inverso derecho de A, y C un inverso izquierdo de A. Entonces $C = B$. Coloquialmente decimos que A tiene un único inverso izquierdo y derecho, al cual llamamos el **inverso** de la matriz A, y lo denotamos A^{-1}.*

Demostración: Considere las dos formas de asociar el producto CAB:

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

$\square$

Observación 118. Una matriz A es invertible si y sólo si A es cuadrada (es decir, de n por n para algun entero positivo n) y existen matrices B y C tales que $AB = I = CA$, en cuyo caso forzosamente se sigue que $B = C$. Más adelante veremos que para que una matriz cuadrada sea invertible basta que tenga un inverso izquierdo o un inverso derecho (véase el Ejercicio 137).

Proposición 119. *Sea A una matriz cuadrada. Si A es invertible, entonces A^{-1} también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$. Es decir, el inverso del inverso de A es A.*

Demostración: Se sigue de que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$. $\square$

Proposición 120. *Sean A y B matrices n por n invertibles. Entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demostración: Note que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A[B(B^{-1}A^{-1})] = A[(BB^{-1})A^{-1}] = A(IA^{-1}) = AA^{-1} = I$$

Análogamente se demuestra que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. $\square$

Corolario 121. *El producto de matrices invertibles es invertible. Más aún,*

$$(A_1A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \dots A_1^{-1}$$

Demostración: Usaremos inducción sobre el número de factores. Por la Proposición 120, el resultado es válido para el producto de dos matrices invertibles. Supongamos que el resultado vale para el producto de n matrices invertibles, y demostremos que vale para el producto de $n+1$ matrices invertibles. Asociando tenemos $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1} = (A_1A_2\ldots A_n)A_{n+1}$. Por la hipótesis de inducción, $A_1A_2\ldots A_n$ es invertible y su inverso es $A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}$. Aplicando otra vez la Proposición 120 al producto $(A_1A_2\ldots A_n)A_{n+1}$ tenemos que este producto es invertible, y más aún, que su inverso es $A_{n+1}^{-1}(A_1A_2\ldots A_n)^{-1} = A_{n+1}^{-1}A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\ldots A_1^{-1}$. □

Lema 122. *Toda matriz elemental R es invertible, y su inversa es una matriz elemental del mismo tipo.*

Demostración: Tenemos tres casos, según el tipo de la matriz elemental R. En cada caso sólo daremos la inversa, y se le dejará al lector demostrar que efectivamente lo es (véase el Ejercicio 129):

Tipo I: $R = I + aE_{ij}$ con algún $a \in K$, $a \neq 0$, y $i \neq j$; entonces $R^{-1} = I - aE_{ij}$.

Tipo II: $R = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, con $i \neq j$; entonces $R^{-1} = R$.

Tipo III: $R = I - E_{ii} + aE_{ii}$ para algún $a \in K$, $a \neq 0$; entonces $R^{-1} = I - E_{ii} + a^{-1}E_{ii}$

□

Teorema 123. *Sea A una matriz de n por n con entradas en un campo K. Tenemos que son equivalentes las siguientes condiciones:*
1) A es invertible.
2) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I de n por n.
3) A es un producto de matrices elementales.

Demostración: 1) implica 2): Suponga que A es invertible. Sea B una matriz escalón reducida por renglones equivalente a A. Tenemos que existe una matriz C que es producto de matrices elementales, tales que $B = CA$. Como toda matriz elemental es invertible, su producto C también es invertible, por lo que $CA = B$ también es invertible. Como B es una matriz escalón reducida invertible, no puede tener renglones nulos y debe ser igual a la matriz identidad I.

2) implica 3): Suponga que A es equivalente por renglones a la matriz identidad I de n por n. Tenemos que existe una matriz C que es producto de

matrices elementales, tales que $I = CA$. Como dijimos antes, C es invertible y multiplicando por C^{-1} por la izquierda nos queda $C^{-1} = A$. Pero el inverso de un producto es el producto de los inversos en el orden contrario, y como el inverso de una matriz elemental es otra matriz elemental, tenemos que A es producto de matrices elementales.

3) implica 1): Se sigue de que las matrices elementales son invertibles y producto de invertibles es invertible. □

Corolario 124. *Sea A una matriz invertible de n por n. Si una sucesión de operaciones elementales de renglón nos lleva de A a I, la misma sucesión de operaciones elementales nos lleva de I a A^{-1}.*

Demostración: Como A es equivalente por renglones a la matriz identidad I de n por n, tenemos que existe una matriz C que es producto de matrices elementales, tales que $I = CA$. Por el Lema 117 tenemos que $A^{-1} = C$, de donde $A^{-1} = C = CI$. □

Corolario 125. *Sean A y B matrices de n por n. Entonces B es equivalente por renglones a A si y sólo si existe una matriz invertible C tal que $B = CA$.*

Demostración: Para que B sea equivalente por renglones a A necesitamos que exista una matriz C que sea producto de matrices elementales y tal que $B = CA$. El resto se sigue de que una matriz es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales. □

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 126. Para cada una de las siguientes matrices, diga si es o no invertible. En caso de ser invertible, calcule su inverso usando el Corolario 124.

- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 127. Sean E_{ij} y E_{kl} matrices canónicas tales que su producto $E_{ij}E_{kl}$ está bien definido. Demuestre que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{si } j = k; \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Ejercicio 128. Encuentre matrices invertibles A y B de 2 por 2 con entradas en $\mathbb{Q}$ tales que $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

Ejercicio 129. Verifique que en el Lema 122 efectivamente se dieron los inversos de las matrices elementales dadas.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 130. La matriz cuadrada cero es invertible.

Ejercicio 131. Sea A una matriz invertible tal que A es su propia inversa. Entonces A es la matriz identidad.

Ejercicio 132. Sea A una matriz invertible. Entonces A^n es invertible para todo entero positivo n.

Ejercicio 133. Sea A una matriz cuadrada tal que. A^2 es invertible. Entonces A es invertible.

Demostraciones.

Ejercicio 134. Demuestre que la identidad de n por n es invertible, y que es su propia inversa.

Ejercicio 135. Sea A una matriz de n por n escalón reducida por renglones. Demuestre que A es invertible si y sólo si A es la matriz identidad.

Ejercicio 136. Sean A y B matrices n por n. Demuestre que si AB es invertible entonces A y B son invertibles. Generalice este resultado a un producto finito arbitrario de matrices.

Ejercicio 137. Sean A y B matrices n por n tales que $BA = I$.

1. Sea C una forma escalón reducida por renglones equivalente por renglones a B. Demuestre que todos los renglones de C son no nulos. Concluya que $C = I$.
2. Demuestre que B es invertible.
3. Demuestre que A es invertible.

1.10. Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Notación 138. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. El sistema homogéneo asociado a A normalmente se denota como

$$AX = \mathit{0}$$

donde X denota una matriz de m renglones y una columna (llamada usualmente **vector columna**) consistente de las indeterminadas del sistema de ecuaciones, y $\mathit{0}$ denota el vector columna nulo (es decir, cuyas entradas son todas cero). Las soluciones del sistema son todos los posibles valores en el campo K que se pueden asignar a las indeterminadas del vector columna X que cumplan la ecuación matricial

$$AX = \mathit{0}$$

La **solución trivial** de un sistema homogéneo es el vector nulo $\mathit{0}$.

Teorema 139. *Sean A y B matrices equivalentes por renglones. Entonces los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales asociados a A y B tienen las mismas soluciones.*

Demostración: Basta demostrar que realizar una operación elemental a A no cambia su conjunto de soluciones. Sea R una matriz elemental. Realizar a A una operación elemental de renglones significa multiplicar por R por la izquierda para obtener RA. Sea X un vector. Tenemos que X es una solución de A si y sólo si $AX = \mathit{0}$. Queremos demostrar que esto pasa si y sólo si $(RA)X = \mathit{0}$. Suponga primero que $AX = \mathit{0}$. Demostraremos que $(RA)X = \mathit{0}$. Multiplicando por R por la izquierda obtenemos $R(AX) = R\mathit{0}$. Como el producto de matrices es asociativo, el primer miembro de la igualdad es $(RA)X$; como *0* es el vector cero, el segundo miembro de la igualdad es *0*, por lo que tenemos que $(RA)X = 0$. Ahora suponga que X es un vector tal que $(RA)X = 0$. Debemos demostrar que $AX = 0$. Repitiendo el paso anterior para la inversa R^{-1} de R obtenemos que $[R^{-1}(RA)]X = 0$. Como el producto de matrices es asociativo, tenemos que $R^{-1}(RA) = (R^{-1}R)A = IA = A$, y llegamos a que $AX = 0$. □

Definición 140. Sea A una matriz escalón reducida por renglones. Decimos que una variable x_i es **libre** en A si la i-ésima columna de A no contiene ningún pivote.

Lema 141. *Sea A una matriz de n por m escalón reducida por renglones. Tenemos lo siguiente:*

1) Si x_i no es una variable libre, entonces x_i aparece una única vez con coeficiente no nulo en el sistema $AX = 0$, y dicho coeficiente es un pivote de A.

2) Todas las soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$ se obtienen asignando valores arbitrarios a las variables libres y luego encontrando los valores (que estarán determinados de forma única) de las variables no libres.

3) El sistema $AX = 0$ tiene al menos una solución no trivial si y sólo si A tiene al menos una variable libre.

Demostración: 1) Si x_i no es libre, entonces la columna i-ésima tiene un pivote, por lo que en esa columna la única entrada no nula es un uno. Note que en esta columna aparecen los coeficientes de la variable x_i.

2) Si uno asigna valores arbitrarios a las variables libres, existe una única forma de asignar valores a las variables no libres para satisfacer el sistema, pues cada ecuación no nula del sistema es de la forma

$$x_i + \sum_{k=i+1}^{m} A_{i,k}x_k = 0$$

donde x_i es una variable no libre y todas las demás variables o son libres, o tienen coeficientes nulos. Inversamente, cualquier solución del sistema se obtuvo asignando valores a las variables libres y determinando los valores de las variables no libres.

3) Si al menos hay una variable libre, se puede asignar a todas ellas el valor 1 (o cualquier valor distinto de cero) y obtener una solución no trivial. Si no hay variables libres, todas las variables están en una ecuación de la forma $x_i = 0$, y por lo tanto la única solución del sistema es la trivial. □

Teorema 142. *Sea A una matriz de n por m con $n < m$ (es decir, A tiene estrictamente más columnas que renglones). Entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene al menos una solución no trivial*

Demostración: Por el Teorema 139, podemos suponer sin pérdida de generalidad que A es una matriz escalón reducida por renglones. Note que el número de pivotes de A es menor o igual a n; por hipótesis $n < m$, y m es el número de indeterminadas. Así, A debe tener variables libres, pues no hay suficientes pivotes para todas. El resto se sigue del Lema 141. $\square$

Proposición 143. *Sea A una matriz de n por n. Entonces A es equivalente por renglones a la matriz identidad si y sólo si el sistema de ecuaciones $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial.*

Demostración: Si A es equivalente por renglones a la matriz identidad I, entonces $AX = 0$ y $IX = 0$ tienen el mismo conjunto de soluciones. Pero la única solución del sistema $IX = 0$ es la trivial, pues el sistema es $x_i = 0$ para toda i, así que el sistema de ecuaciones $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial.

Suponga ahora que la única solución del sistema $AX = 0$ es la trivial, es decir, $X = 0$. Sea B una matriz escalón reducida por renglones equivalente por renglones a A. Tenemos que la única solución del sistema $BX = 0$ también es la trivial. Sea m el número de pivotes de B. Por el Lema 141, B no puede tener variables libres, es decir, toda variable x_i tiene un pivote en la columna i-ésima, y al menos debe haber n pivotes (puesto que hay n variables), es decir, $m \geq n$. Por otro lado, no puede haber más pivotes que renglones, por lo que $m \leq n$. Juntando ambas desigualdades obtenemos que $m = n$. Esto significa que el número de pivotes de B es igual al número de columnas de B. Como la matriz B es cuadrada, la única posibilidad es que el i-ésimo pivote aparezca en la i-ésima columna, ya que de lo contrario nos sobrarían pivotes si dejáramos columnas sin pivote. El resultado de esto es que B es la matriz identidad. $\square$

Notación 144. Un sistema no homogéneo de ecuaciones linealmente usualmente se denota

$$AX = Y$$

donde X es el vector columna de indeterminadas, y Y es el vector columna de constantes.

Teorema 145. *Sea A una matriz de n por n. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1) A es invertible.

2) El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial $X = 0$.

3) Para todo vector columna Y de n renglones, el sistema de ecuaciones $AX = Y$ tiene una única solución, a saber, $X = A^{-1}Y$.

Demostración: 3) implica 2): Es el caso particular cuando $Y = 0$.

2) implica 1): Si el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial, entonces A es equivalente por renglones a la matriz identidad, por lo que A es invertible.

1) implica 3): Como A es invertible, tenemos que A^{-1} está bien definida. El vector columna $A^{-1}Y$ es solución del sistema $AX = Y$, puesto que $A[A^{-1}Y] = [AA^{-1}]Y = IY = Y$. Por otro lado, si X es solución del sistema $AX = Y$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda tenemos que $A^{-1}(AX) = A^{-1}Y$, y después de unas simplificaciones llegamos a que $X = A^{-1}Y$, por lo que la solución propuesta es única. $\square$

Lema 146. *Considere un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales*

$$AX = Y$$

Sea B una matriz invertible tal que el producto BA está bien definido. Entonces el sistema $AX = Y$ y el sistema $(BA)X = BY$ tienen las mismas soluciones.

Demostración: Si X es solución de $AX = Y$, multiplicando por la izquierda por B tenemos que $B(AX) = BY$. Ya que el producto de matrices es asociativo, esto último nos queda $(BA)X = BY$, es decir, X es solución del sistema $(BA)X = BY$. El regreso se obtiene aplicando el mismo argumento, ahora multiplicando por la matriz inversa B^{-1}. $\square$

Teorema 147. *Considere un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales*

$$AX = Y$$

Suponga que la matriz A es escalón reducida por renglones. Entonces el sistema es consistente si y sólo si no hay ninguna ecuación de la forma $0 = c_i$ con $c_i \neq 0$, es decir, si todos los renglones nulos de A están igualados a cero *en el sistema de ecuaciones. En este caso, todas las soluciones del sistema no homogéneo $AX = Y$ se obtienen asignando valores arbitrarios a las variables libres y luego encontrando los valores (que estarán determinados de forma única) de las variables no libres.*

Demostración: Si un renglón nulo de A está igualado a algo diferente de cero, no hay manera de satisfacer esa ecuación, y el sistema es inconsistente. Supongamos que todos los renglones nulos de A están igualados a cero, por lo que los podemos ignorar. Si uno asigna valores arbitrarios a las variables libres de A, existe una única forma de asignar valores a las variables no libres para satisfacer el sistema, pues cada ecuación no nula del sistema es de la forma

$$x_i + \sum_{k=i+1}^{m} A_{i,k} x_k = c_{j_i}$$

donde x_i es una variable no libre y todas las demás variables o son libres, o tienen coeficientes nulos. Inversamente, cualquier solución del sistema se obtuvo asignando valores a las variables libres y determinando los valores de las variables no libres. $\square$

Proposición 148. *Considere un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales*

$$AX = Y$$

Sea X_0 un vector columna que es solución de dicho sistema. Entonces todas las soluciones de este sistema son precisamente los vectores de la forma $X_0 + X_1$ donde X_1 es una solución arbitraria del sistema homogéneo $AX_1 = 0$.

Demostración: Note primero que todo vector columna de la forma $X_0 + X_1$ es solución del sistema no homogéneo, puesto que

$$A(X_0 + X_1) = AX_0 + AX_1 = Y + 0 = Y$$

Inversamente, si X_2 es solución del sistema no homogéneo, entonces podemos escribir X_2 como $X_2 = X_0 + (X_2 - X_0)$, donde $(X_2 - X_0)$ es solución del sistema homogéneo, pues

$$A(X_2 - X_0) = AX_2 - AX_0 = Y - Y = 0$$

$\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 149. Para cada uno de los siguientes sistemas homógeneos sobre $\mathbb{Q}$, encuentre el conjunto solución:

- $$\begin{aligned} 3x + 5y &= 0 \\ 3x - 5y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y &= 0 \\ 2x - 6y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 4x + y &= 0 \\ -x - y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 7x + 5y &= 0 \\ 10x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y + 3z &= 0 \\ 3x - 5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x + 7y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 5x + 15y + 30z &= 0 \\ 2y + 6z &= 0 \\ 4z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y + 3z &= 0 \\ 3x - 5y + 3z &= 0 \\ 3x - 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y + 3z &= 0 \\ 3x - 5y + 3z &= 0 \\ 3x + 5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y + 3z &= 0 \\ 3x - 5y + 3z &= 0 \\ 9x + 5y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 150. Para cada uno de los siguientes sistemas homógeneos sobre $\mathbb{R}$, encuentre el conjunto solución:

- $$\begin{aligned} 3x + 5y &= 0 \\ 3x - 5y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y &= 0 \\ 2x - 6y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 4x + y &= 0 \\ -x - y &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 151. Para cada uno de los siguientes sistemas homógeneos sobre $\mathbb{F}_2$, encuentre el conjunto solución:

- $$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 152. Para cada uno de los siguientes sistemas no homógeneos sobre $\mathbb{Q}$, encuentre el conjunto solución.

- $$\begin{aligned} 3x+5y &= 8 \\ 3x-5y &= -2 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x+5y &= 2 \\ 2x-6y &= -8 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 4x+y &= 4 \\ -x-y &= -1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x+y &= 4 \\ x-y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 7x + 5y &= 12 \\ 10x + 2y &= 12 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y + 3z &= 11 \\ 3x - 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x - 2y + z &= -1 \\ 2x + 7y + 8z &= 9 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 5x + 15y + 30z &= 20 \\ 2y + 6z &= 2 \\ 4z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y + 3z &= 5 \\ 3x - 5y + 3z &= -5 \\ 3x - 5y + z &= -5 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y + 3z &= 3 \\ 3x - 5y + 3z &= 3 \\ 3x + 5y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y + 3z &= 5 \\ 3x - 5y + 3z &= -5 \\ 9x + 5y + 9z &= 5 \end{aligned}$$

Ejercicio 153. Para cada uno de los siguientes sistemas no homógeneos sobre $\mathbb{R}$, encuentre el conjunto solución:

- $$\begin{aligned} 3x + 5y &= 8 \\ 3x - 5y &= -2 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 5y &= 2 \\ 2x - 6y &= -8 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 4x + y &= 4 \\ -x - y &= -1 \end{aligned}$$

Ejercicio 154. Para cada uno de los siguientes sistemas no homógeneos sobre $\mathbb{F}_2$, encuentre el conjunto solución:

- $$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x+y &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ y+z &= 1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 155. Todo sistema de ecuaciones con más variables que ecuaciones es consistente.

Ejercicio 156. Todo sistema de ecuaciones con más ecuaciones que variables es inconsistente.

Ejercicio 157. Todo sistema consistente de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas tiene una única solución.

Demostraciones.

Ejercicio 158. Considere un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales

$$AX = Y$$

Sea $\bar{A}$ la matriz aumentada de dicho sistema, y sea B una matriz tal que el producto BA está bien definido. Demuestre que la matriz aumentada del sistema $(BA)X = BY$ es $B\bar{A}$.

Ejercicio 159. Sean A y B matrices escalón reducidas por renglones de n por m con entradas en un campo K. Suponga que A y B son equivalentes por renglones.

1) Demuestre que si X_i fuera variable libre de A pero no de B, las matrices A y B no tendrían las mismas soluciones, contradiciendo el hecho de que son equivalentes por renglones. Concluya que A y B tienen las mismas variables libres.

2) Demuestre que las matrices A y B tienen el mismo número de pivotes y en las mismas columnas.

3) Demuestre que $A = B$.

4) Demuestre que toda matriz de n por m con entradas en un campo K es equivalente por renglones a una **única** matriz escalón reducida por renglones, llamada su **forma escalón reducida por renglones**.

Ejercicio 160. Sea $AX = Y$ un sistema consistente no homogéneo de ecuaciones. Demuestre que hay una biyección entre el conjunto de soluciones del sistema consistente no homogéneo de ecuaciones $AX = Y$ y el conjunto de soluciones de su sistema homogéneo asociado $AX = 0$.

Ejercicio 161. Sea K un campo infinito. Demuestre que todo sistema de ecuaciones lineales sobre K cumple exactamente una de las siguientes propiedades:

1) El sistema es inconsistente.
2) El sistema tiene una única solución.
3) El sistema tiene una infinidad de soluciones.

Ejercicio 162. Dé un ejemplo de un campo K y un sistema de ecuaciones sobre K que tenga exactamente dos soluciones. ¿Por qué esto no contradice el Ejercicio 161?

Ejercicio 163. Sea K un campo finito con n elementos, y sea $AX = Y$ un sistema homogéneo sobre K. Demuestre que el número de soluciones de este sistema es una potencia de n.

Capítulo 2

Espacios vectoriales.

2.1. Definición de espacio vectorial y ejemplos.

Definición 164. Sea K un campo. Un **espacio vectorial** sobre K, o también llamado un ***K*-espacio vectorial**, consta de lo siguiente:

1. Un conjunto V, cuyos elementos se llaman **vectores**.
2. Una operación binaria en V, llamada **adición de vectores** (o **suma de vectores**), denotada por $+$, y que cumple lo siguiente:
    - La suma es conmutativa, es decir, para todos v y u en V se tiene $v + u = u + v$.
    - La suma es asociativa, es decir, para todos v, u y w en V se tiene $(v + u) + w = v + (u + w)$.
    - Existe un único vector $\mathit{0}$ en V tal que $v + \mathit{0} = v$ para todo v en V. A $\mathit{0}$ se le llama el **vector cero** de V, o también el **vector nulo** de V.
    - Para todo v en V existe un único vector $-v$, llamado el inverso aditivo de v, tal que $v + (-v) = \mathit{0}$.
3. Una operación binaria de $K \times V$ en V, llamada la **multiplicación escalar**, que a cada escalar a en K y cada vector v en V les asocia otro vector av en V, y que cumple:

- Para todo v en V, $1v = v$.
- Para cualesquiera a, b en K, y cualquier v en V, $(ab)v = a(bv)$.

4. Además, pedimos que se cumplan las dos leyes distributivas:

   - Para todo a en K, y para cualesquiera v y u en V, $a(v + u) = av + au$.
   - Para cualesquiera a, b en K, y cualquier v en V, $(a+b)v = av+bv$.

Observación 165. Usando inducción es posible generalizar varias de las propiedades anteriores a un número finito de vectores y/o escalares.

Notación 166. En lo sucesivo, K denotará un campo y V un K-espacio vectorial, a menos que se diga lo contrario explícitamente. Además, escribiremos $v - u$ en lugar de $v + (-u)$.

Ejemplos 167.

- El campo K es un espacio vectorial sobre sí mismo, donde la suma y la multiplicación escalar son la suma y el producto usuales de K. El vector cero es en este caso el cero de K, y los inversos aditivos de los vectores son los inversos aditivos usuales en K.

- Sea K un campo arbitrario y considere el producto cartesiano $K^2 = K \times K$ de K consigo mismo. Defina en K^2 la suma de dos parejas ordenadas **coordenada a coordenada**, es decir, $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$. Con esta suma, K^2 satisface las primeras propiedades de un espacio vectorial (el vector cero es $(0, 0)$, y el inverso aditivo de (a, b) es $(-a, -b)$). Defina la multiplicación escalar en K^2 por medio de $a(b, c) = (ab, ac)$. Con esta suma y multiplicación escalar, K^2 es un K-espacio vectorial.

- El ejemplo anterior se puede generalizar al conjunto K^n de ***n*-adas** de elementos de K, es decir, el producto cartesiano de n copias del campo K, donde n es un entero positivo. Nuevamente la suma se define coordenada a coordenada, y la multiplicación escalar se define de forma análoga a como se hizo arriba, es decir, $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$, y $a(b_1, \ldots, b_n) = (ab_1, \ldots, ab_n)$. Con esta suma y multiplicación escalar, K^n es un K-espacio vectorial.

- Sean K un campo arbitrario, y sea $M_{n\times m}(K)$ el conjunto de todas las matrices de n por m con entradas en el campo K. Entonces $M_{n\times m}(K)$ es un K-espacio vectorial, donde la suma y la multiplicación por escalares son la suma usual de matrices y la multiplicación usual de un escalar por una matriz.

- Sean K un campo arbitrario, y sea $K[x]$ el conjunto de todos los **polinomios** con coeficientes en K, es decir, las expresiones de la forma $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, donde la x es una indeterminada. La suma es la suma usual de polinomios, y la multiplicación por escalares también es la usual, es decir, la suma es $(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_t + b_t)x^t$, donde t es el mayor entre n y m, y "rellenamos con ceros" los términos faltantes. La multiplicación por escalares es $a(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) = ab_0 + ab_1x + \cdots + ab_nx^n$.

- Sean K un campo y C un conjunto, y sea K^C el conjunto de funciones de C en K. Definimos en K^C la suma de funciones **puntualmente**, es decir, si f y g son funciones de C en K, definimos su suma $f+g$ como la función de C en K que cuyo valor en x es $f(x) + g(x)$. La multiplicación de un escalar a de K por una función f de C en K es la función de C en K cuyo valor en x es $af(x)$. Con estas operaciones, K^C es un espacio vectorial sobre K.

- Un caso particular interesante de la construcción anterior es $K^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros positivos. El espacio vectorial resultante consta de las sucesiones de elementos de K, donde la suma se define entrada por entrada, y la multiplicación de un escalar por una sucesión es en todas las entradas.

- Sea K un campo arbitrario, y sea V un conjunto cualquiera con un único elemento, llamémoslo v. La única operación binaria que se puede definir en V es $v + v = v$, y la única multiplicación escalar es $av = v$ para cualquier a en K. Con estas operaciones, el conjunto V es un K-espacio vectorial, llamado el **espacio cero** (o el **espacio trivial**, o el **espacio nulo**). El único vector v de V es el vector cero, por lo que al espacio cero usualmente lo denotamos $V = \{0\}$, o simplemente $V = O$.

- Sea K un campo, y sea F un subconjunto de K que es cerrado bajo la suma y el producto de K, y que también contiene los inversos aditivos y multiplicativos de sus elementos no nulos, así como al cero y al uno de K. Decimos entonces que F es un **subcampo** de K, o que K es una **extensión** de F. En esta situación, todo espacio vectorial sobre K es un espacio vectorial sobre F, donde la suma es la misma en ambos casos, y la multiplicación de los escalares del subcampo F es la misma que si se vieran como escalares en K. En particular, todo campo es un espacio vectorial sobre cualquier subcampo, por ejemplo, $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Proposición 168. *Sea V un conjunto en donde se define una operación $+$ binaria conmutativa. Suponga que 0 y $0'$ son elementos de V tales que para cualquier v en V tenemos que $v + 0 = v = v + 0'$. Entonces $0 = 0'$. En otras palabras, en la definición de espacio vectorial basta pedir la existencia de un vector cero, y la unicidad se sigue de las otras propiedades.*

Demostración: Tenemos que

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

□

Proposición 169. *Sea V un conjunto en donde se define una operación $+$ binaria conmutativa y asociativa. Sea 0 un elemento de V tal que para cualquier v en V se tenga que $v + 0 = v$. Suponga que v, u y w son tales que $v + u = 0 = v + w$. Entonces $u = w$. Es decir, en la definición de espacio vectorial basta pedir la existencia de inversos aditivos, y la unicidad se sigue de las otras propiedades.*

Demostración: Tenemos que $w = w + 0 = w + (v + u) = (w + v) + u = u + (w + v) = u + (v + w) = u + 0 = u$. □

Observación 170. En la Proposición 169 no es necesario pedir que la operación binaria sea conmutativa, pero la demostración se vuelve más larga. Sin embargo, es muy importante en este caso que tanto el elemento neutro como los inversos sean del mismo lado (en nuestro caso, del lado derecho).

Teorema 171. *Sea V un K-espacio vectorial, y sea v un vector en V. Tenemos que*

1. $0v = 0$ *(compare con el Ejercicio 181)*
2. $(-1)v = -v$

3. $-(-v) = v$

Demostración: 1. $0v = (0+0)v = 0v + 0v$. Sumando el inverso aditivo de $0v$ a ambos lados obtenemos $\mathit{0} = 0v + (-0v) = (0v + 0v) + (-0v) = 0v + [0v + (-0v)] = 0v + \mathit{0} = 0v$.

2. Basta demostrar que $v + (-1)v = \mathit{0}$. Tenemos que $v + (-1)v = 1v + (-1)v = [1 + -(1)]v = 0v = \mathit{0}$.

3. Note que $-(-v) = (-1)(-v) = (-1)[(-1)v] = [(-1)(-1)]v = 1v = v$.

$\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 172. Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, y sea v un vector cualquiera en V. Calcule lo siguiente:

- $v + v$
- $v - v + 3v - (1/2)v$
- $[1 - 3 + (2/5) + 0]v - (3/4)v$

Ejercicio 173. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_2$, y sea v un vector cualquiera en V. Calcule lo siguiente:

- $v + v$
- $v - v + v$
- $[1 + 0 + 1 + 0]v - 0v + v$

Ejercicio 174. ¿Cuál es el vector cero en K^n? ¿En $M_{n\times m}(K)$? ¿En $K[x]$? ¿En K^C? ¿En $K^{\mathbb{N}}$?

Ejercicio 175. Explique por qué K^n y $M_{n\times m}(K)$ se pueden considerar como casos particulares de K^C.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 176. $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

Ejercicio 177. $M_{3\times 2}(\mathbb{C})$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

Ejercicio 178. $\mathbb{Q}[x]$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejercicio 179. Sea V un K-espacio vectorial y sea v un vector en V. Si $v + v = \mathit{0}$, entonces $v = \mathit{0}$.

Ejercicio 180. Para cualquier v en V, $\mathit{0} - v = -v$.

Demostraciones.

Ejercicio 181. Sea a un escalar cualquiera y $\mathit{0}$ el vector cero. Demuestre que $a\mathit{0} = \mathit{0}$.

Ejercicio 182. Sea V un espacio vectorial, y sean v un vector en V, a un escalar en el campo K. Demuestre que si $av = \mathit{0}$, entonces $a = 0$ o $v = \mathit{0}$.

Ejercicio 183. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_2$, y sea v un vector cualquiera en V. Demuestre que $v + v = \mathit{0}$. Concluya que $-v = v$.

Ejercicio 184. Sean K un campo, V un K-espacio vectorial, y v un vector no nulo en V. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. El campo K tiene característica dos, es decir, $1 + 1 = 0$ en K.
2. $1 = -1$.
3. $v + v = \mathit{0}$.
4. $-v = v$.

Ejercicio 185. Demuestre que $\mathbb{Q}$ no es una extensión de $\mathbb{F}_2$.

2.2. Subespacios.

Definición 186. Sea V un K-espacio vectorial, y sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores en V. Una **combinación lineal** de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ sobre el campo K es un vector de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son escalares en K. Si $n = 1$, llamamos al vector av un **múltiplo escalar** del vector v. Por definición, la **combinación lineal vacía** (es decir, de una familia vacía de vectores) es el vector cero.

Ejemplos 187.

- El vector $(2, -5)$ de $\mathbb{Q}^2$ es combinación lineal de los vectores (1,0) y (0,1) sobre $\mathbb{Q}$, pues $(2, -5) = 2(1, 0) + (-5)(0, 1)$.
- El vector (0,0,1) de $\mathbb{R}^3$ no es combinación lineal sobre $\mathbb{R}$ de los vectores (1,0,0) y (0,1,0), pues $a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) = (a, b, 0) \neq (0, 0, 1)$ para ninguna a, b en $\mathbb{R}$.
- El vector $(2i, 4)$ de $\mathbb{C}^2$ es combinación lineal de los vectores (1,0) y (0,1) sobre $\mathbb{C}$, pero no sobre $\mathbb{R}$.
- El vector cero es combinación lineal de cualesquiera vectores $v_1, \ldots, v_n$, pues siempre se pueden escoger escalares nulos, es decir, $0 = \sum_{i=1}^{n} 0v_i$.

Definición 188. Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto de V. Decimos que C es **cerrado bajo sumas** si para cualesquiera v y u en C, se tiene que $v+u$ también es un vector de C. Decimos que C es **cerrado bajo múltiplos escalares sobre K** si para cualquier vector v en C y cualquier escalar a en K, el vector av también está en C. Decimos que C es **cerrado bajo combinaciones lineales sobre K** si cualquier combinación lineal de vectores en C con escalares arbitrarios de K está en C.

Ejemplos 189.

- Sean $V = K = \mathbb{Q}$. Entonces el subconjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros es un subconjunto de V cerrado bajo sumas, pero no es cerrado bajo múltiplos escalares sobre $\mathbb{Q}$, pues el uno está en $\mathbb{Z}$, $1/2$ está en $\mathbb{Q}$, y su producto escalar $(1/2)1 = 1/2$ no está en $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ no es cerrado bajo múltiplos escalares sobre $\mathbb{Q}$, en particular no es cerrado bajo combinaciones lineales sobre $\mathbb{Q}$.
- Sean $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, y sea C el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que consta de la unión de los ejes de las x y de las y, es decir, $C = \{(a, b) \in V \mid a = 0 \text{ o } b = 0\}$. Entonces C es cerrado bajo múltiplos escalares sobre $\mathbb{R}$,

pero no es cerrado bajo sumas. En particular, C tampoco es cerrado bajo combinaciones lineales sobre $\mathbb{R}$.

Definición 190. Sea V un K-espacio vectorial, y sea S un subconjunto de V. Decimos que S es un **subespacio vectorial** de V sobre K (o simplemente un **subespacio** de V) si S es no vacío y para cualesquiera v y u en S y cualquier escalar a en K, tenemos que $av + u$ es un elemento de S. A veces denotamos que S es un subespacio de V por $S \leq V$, y si queremos indicar que el campo es K, escribimos $S \leq_K V$.

Ejemplos 191.

- Sean K un campo arbitrario, $V = K^2$, y $S = \{(a, 0) \mid a \in K\}$. Afirmamos que S es un subespacio vectorial de V sobre K, pues S es no vacío y para cualquier escalar a en K y cualesquiera vectores $(b, 0)$ y $(c, 0)$ en S, tenemos que $a(b, 0) + (c, 0) = (ab + c, 0)$ es un vector de S.

- Sean K un campo arbitrario, $V = K^2$, y $S = \{(a, a) \mid a \in K\}$. Afirmamos que S es un subespacio vectorial de V sobre K, pues S es no vacío y para cualquier escalar a en K y cualesquiera vectores (b, b) y (c, c) en S, tenemos que $a(b, b) + (c, c) = (ab + c, ab + c)$ es un vector de S.

- Sean K un campo arbitrario y V un K-espacio vectorial. Entonces V mismo es un subespacio de V sobre K, pues V es no vacío (ya que al menos tiene al vector cero), y es cerrado bajo sumas y múltiplos escalares. A V se le llama el **subespacio total** de V.

- Sean K un campo arbitrario y V un K-espacio vectorial. Sea $O = \{\mathit{0}\}$, es decir, O es el subconjunto de V que consta únicamente del vector cero. Entonces O es un subespacio de V sobre K, pues O es no vacío, y para cualquier a en K se tiene $a\mathit{0} + \mathit{0} = \mathit{0}$. A O se le llama el **subespacio trivial** (o el **subespacio cero**, o el **subespacio nulo**) de V.

- Sean K un campo arbitrario y A una matriz de n por m con entradas en K. El conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = \mathit{0}$ es un subespacio de K^m sobre K, pues es no vacío y si X_1 y X_2 son soluciones de dicho sistema, entonces $aX_1 + X_2$ también es solución para cualquier a en K, pues $A(aX_1 + X_2) = aAX_1 + AX_2 = \mathit{0} + \mathit{0} = \mathit{0}$. A este subespacio se le llama el **espacio solución** del sistema de ecuaciones $AX = \mathit{0}$, o también el **subespacio nulo de la matriz $\boldsymbol{A}$** .

Teorema 192. *Sea V un K-espacio vectorial, y sea S un subconjunto no vacío de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *S es un subespacio de V sobre K.*

2. *S es cerrado bajo sumas y múltiplos escalares sobre K.*

3. *S es cerrado bajo combinaciones lineales sobre K.*

4. *S junto con la suma y la multiplicación escalar que hereda de V es un K-espacio vectorial.*

Demostración: 1) implica 2): Dados v y u en S, su suma se puede escribir como $v + u = 1v + u$, y por tanto está en V. De forma similar $av = av + 0v$ también está en V.

2) implica 3): Toda combinación lineal se puede descomponer en sumas y multiplicación por escalares.

3) implica 4): Como S es cerrado bajo combinaciones lineales, tanto la suma como la multiplicación por escalares de K en S están bien definidas. La conmutatividad y la asociatividad de la suma, el comportamiento del uno de K en los vectores de S, la asociatividad mixta de la multiplicación escalar, y las dos leyes distributivas se cumplen en S porque se cumplían en V. El vector cero de V está en S, pues S es no vacío y $0 = v - v$, donde v es cualquier vector de S; además, el vector cero de V es también vector cero de S. Finalmente, los inversos aditivos existen en S, pues $-v = (-1)v$, y son los mismos que en V.

4) implica 1): Como S es un K-espacio vectorial con la suma y la multiplicación escalar heredadas de V, en particular V debe ser cerrado bajo sumas y multiplicación por escalares, por lo que dados v y u en S y a en K, tenemos que $av + u$ debe también estar en S. $\square$

Proposición 193. *Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Sea $\{S_i \mid i \in I\}$ una familia de subespacios de V sobre K. Entonces la intersección $\cap_{i \in I} S_i$ es un subespacio de V sobre K.*

Demostración: Denotemos S a la intersección de todos los S_i. Sean v, u en S, y sea a un escalar en K. Debemos demostrar que $av + u$ es un elemento de S. Como v y u están en S, se sigue que v y u están en S_i para toda $i \in I$, y como cada S_i es un subespacio de V, tenemos que $av + u$ es elemento de S_i para toda i en I, por lo que $av + u$ está en la intersección S. $\square$

Definición 194. Sean V un K-espacio vectorial y C un subconjunto cualquiera de V. El **subespacio generado** por C sobre K es la intersección de todos los subespacios de V que contienen a C. Dicho subespacio se denota usualmente $< C >$. Si $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$, escribimos $< v_1, \ldots, v_n >$ en lugar de $< \{v_1, \ldots, v_n\} >$, y lo llamamos el subespacio generado por los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Note que al menos V es un subespaci de V que contiene a C, por lo que la intersección se toma sobre una familia no vacía y por tanto siempre está bien definida.

Ejemplos 195.

- $< V >= V$.
- $< \emptyset >= O$.
- $V = \mathbb{Q}^2$, $< (1,0) >= \{(a,0) \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

Proposición 196. *Sean V un K-espacio vectorial y C un subconjunto no vacío de V. Entonces $< C >$ es el menor subespacio de V que contiene a C, es decir, $< C >$ es el único subespacio de V que contiene a C y que está contenido en cualquier otro subespacio de V que contenga a C. También tenemos que $< C >$ es precisamente el conjunto de todas las combinaciones lineales sobre K de los vectores de C.*

Demostración: Como $< C >$ es la intersección de todos los subespacios de V que contienen a C, $< C >$ es un subespacio de V y $< C >$ contiene a C. Sea S otro subespacio de V que contiene a C. Entonces S es uno de los subespacios que se intersectaron para construir $< C >$, por lo que $< C >$ está contenido en S. Sólo puede haber un subespacio de V con esta propiedad (de ser el menor subespacio de V que contiene a C), pues si hubiera dos, deberían contenerse mutuamente.

Sea R el conjunto de todas las combinaciones lineales sobre K de los vectores de C. Demostraremos que R es un subespacio de V que contiene a C, y que R está contenido en cualquier otro espacio de V que contiene a C. Todo elemento de C está en R, pues es combinación lineal de sí mismo con el coeficiente uno. Se sigue que R es no vacío, pues al menos contiene a C, que es no vacío. Además, la suma de dos combinaciones lineales de vectores de C es otra combinación lineal de vectores de C, y todo múltiplo escalar de una combinación lineal de vectores de C es combinación lineal de vectores de C, por lo que R es un subespacio de V. Finalmente, si Q es otro subespacio de V que contiene a C, Q debe ser cerrado bajo combinaciones lineales, por lo que Q debe contener a R. $\square$

Observación 197. El resultado anterior también es válido para el subconjunto vacío, pero hay que lidiar con tecnicismos. Por una parte, el menor subespacio de V que contiene al subconjunto vacío es el subespacio nulo, que también es la intersección de todos los subespacios de V (pues todos contienen al vacío). El problema surge al argumentar que el subespacio nulo es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores en el conjunto vacío. La única combinación lineal posible es la combinación vacía, que por definición es el vector cero.

Observación 198. A menos que se especifique lo contrario, la palabra **sucesión** significa **sucesión finita**.

Definición 199. Sean V un K-espacio vectorial y $v_1, \ldots, v_n$ una sucesión de vectores en V tales que $< v_1, \ldots, v_n >= V$. Decimos que $v_1, \ldots, v_n$ son un conjunto de **generadores** de V, o que $v_1, \ldots, v_n$ **generan** a V sobre el campo K. Decimos que el espacio vectorial V es **finitamente generado** sobre el campo K si existe un subconjunto finito de V que genera a V.

Ejemplo 200. Los vectores (1,0) y (0,1) generan a $\mathbb{Q}^2$, pues todo vector en $\mathbb{Q}^2$ es combinación lineal sobre $\mathbb{Q}$ del (1,0) y el (0,1). Por lo tanto, $\mathbb{Q}^2$ es finitamente generado sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 201. Sean K un campo arbitrario, $V = K^2$, y $S = \{(0, a) \mid a \in K\}$. Demuestre que S es un subespacio de V sobre K.

Ejercicio 202. Sean $V = \mathbb{Q}^2$ y $S = \{(2a, (-1/3)a) \mid a \in \mathbb{Q}\}$. Demuestre que S es un subespacio de V sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 203. Calcule todos los subespacios de $\mathbb{F}_2^2$ sobre $\mathbb{F}_2$.

Ejercicio 204. En cada caso, diga si el conjunto de vectores dado genera a $\mathbb{Q}^3$ sobre $\mathbb{Q}$:

- (1,0,0) y (0,1,0)
- (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1).
- (1,0,0), (0,0,1) y (0,1,0).
- (1,1,0), (0,0,1) y (0,1,0).

- (2,0,0), (0,0,3) y (0,4,0).
- (-2,0,0), (0,0,7) y (0,3,0).
- (1,2,3), (4,-1,2) y (6,3,8).
- (1,2,3), (-2,4,6) y (4,5,6).

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 205. El conjunto vacío es un subespacio de cualquier espacio vectorial, pues es vacuamente cerrado bajo sumas y bajo multiplicación por escalares de cualquier campo.

Ejercicio 206. Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cada uno de los v_i es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

Ejercicio 207. Considere a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Entonces $\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 208. Considere a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Entonces $\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 209. Considere a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Entonces $\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$?

Demostraciones.

Ejercicio 210. Sea V un K-espacio vectorial, y sea v un vector en V. Sea $S = \{av \mid a \in K\}$, es decir, S es el conjunto de todos los múltiplos escalares del vector v. Demuestre que S es un subespacio de V. Usualmente denotamos a este subespacio Kv, y lo llamamos el **subespacio generado por el vector *v*** .

Ejercicio 211. Sea K un campo y considere a K como espacio vectorial sobre sí mismo. Demuestre que los únicos subespacios de K sobre sí mismo son el subespacio cero y el subespacio total.

Ejercicio 212. Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Sea $\{S_i \mid i \in I\}$ una familia de subespacios de V sobre K. Demuestre que la intersección $\cap_{i\in I} S_i$ es el subespacio de V sobre K más grande que está contenido en todos los S_i, es decir, que dicha intersección es un subespacio de V contenido en todos los S_i, y que si S' es otro subespacio de V tal que $S' \subseteq S_i$ para todo $i \in I$, entonces S' está contenido en la intersección de todos los S_i.

Ejercicio 213. Sean V un K-espacio vectorial y $C_1, \ldots, C_n$ una familia de subconjuntos no vacíos de V. Definimos la **suma de los subconjuntos** $C_1, \ldots, C_n$, denotada $C_1 + \cdots + C_n$ o $\sum_{i=1}^{n} C_i$, como el conjunto

$$C_1 + \cdots + C_n = \{x_1 + \cdots + x_n \mid x_i \in C_i\}$$

Demuestre que si $S_1, \ldots, S_n$ son subespacios de V, entonces su suma $S_1 + \cdots + S_n$ es un subespacio de V.

Ejercicio 214. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. Demuestre que las columnas de la matriz A generan a K^n si y sólo si para todo vector columna Y en K^n el sistema $AX = Y$ es consistente.

Ejercicio 215. Sea A una matriz cuadrada de n por n con entradas en un campo K. Demuestre que las columnas de la matriz A generan a K^n si y sólo si A es invertible.

2.3. Independencia lineal.

Definición 216. Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto de V. Decimos que C es **linealmente dependiente** (o simplemente **dependiente**) sobre el campo K si existen vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ (con n un entero positivo) en C y escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K tales que no todos los a_i son cero, pero $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ es igual al vector cero de V. Si C no es linealmente dependiente sobre K, decimos que C es **linealmente independiente** sobre K. Una sucesión finita $v_1, \ldots, v_n$ de vectores en V es una **sucesión linealmente independiente** si todos los vectores son diferentes y el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente. Si la sucesión no es linealmente independiente, se dice que es una **sucesión linealmente dependiente**.

Ejemplos 217.

- Sea V un K-espacio vectorial cualquiera, con K un campo arbitrario. Entonces el conjunto $\{0\}$ es linealmente dependiente sobre K, pues $1\mathit{0} = \mathit{0}$ y el escalar que se usó fue $1 \neq 0$.

- Sea V un K-espacio vectorial cualquiera, con K un campo arbitrario. Entonces el conjunto $\{1\}$ es linealmente independiente sobre K, pues si tuviéramos un escalar a en K tal que $a1 = 0$, se seguiría que el escalar $a = 0$.

- Sea $V = \mathbb{R}^2$. El conjunto $\{(1,0),(0,1),(2,-3)\}$ es linealmente dependiente sobre $\mathbb{R}$, pues tenemos la siguiente combinación lineal con escalares reales no todos nulos que da el vector cero:

$$-2(1,0) + 3(0,1) + 1(2,-3) = (0,0)$$

- Sea $V = \mathbb{R}^2$. El conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$, pues dados cualesquiera escalares reales a y b, si $(0,0) = a(1,0) + b(0,1) = (a,b)$, se seguiría que $a = 0$ y $b = 0$, es decir, los escalares son todos nulos.

- Sea V un K-espacio vectorial y v un vector no nulo en V. Entonces el conjunto $\{v\}$ es linealmente independiente sobre K, pues si $av = \mathit{0}$ se debe seguir por fuerza que a es el escalar cero.

Observación 218. Sean V un K-espacio vectorial y v un vector no nulo en V. Entonces la sucesión v_1, v_2 con $v_1 = v = v_2$ es linealmente dependiente, pues los vectores no son todos diferentes. Sin embargo, vista como conjunto las multiplicidades no cuentan, y el conjunto $\{v_1, v_2\} = \{v\}$ es linealmente independiente. Es decir, al hablar de la independencia lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ es importante distinguir si es como conjunto o como sucesión. Esto normalmente queda implícito cuando se dice “el conjunto es linealmente independiente” o “la sucesión es linealmente independiente”.

Proposición 219. *Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *C es linealmente dependiente sobre K.*

2. *Existen n vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ en C (con n un entero positivo), y n escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K, distintos todos de cero, tales que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ es el vector cero de V.*

3. *Existen n vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ en C (con n un entero positivo) tales que v_n es combinación lineal sobre K de $v_1, \ldots, v_{n-1}$.*

Demostración: 1) implica 2): Como C es linealmente dependiente, por definición existen vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ (con n un entero positivo) en C y escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K tales que no todos los a_i son cero, pero $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ es igual al vector cero de V. Supongamos que algunos de estos escalares fueran igual a cero; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que son los últimos escalares, digamos $0 = a_m = \cdots = a_n$, donde $m - 1$ al menos vale uno, pues existe al menos un escalar no nulo en la lista original. Entonces los vectores $v_1 \ldots, v_{m-1}$ de C y los escalares $a_1, \ldots, a_{m-1}$ son tales que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{m-1}v_{m-1}$ es el vector cero, y todos los escalares son distintos de cero.

2) implica 3): Suponga que existen n vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ en C (con n un entero positivo), y n escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K, distintos todos de cero, tales que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ es el vector cero de V. Consideremos primero un caso patológico, es decir, si n fuera igual a uno: tendríamos que $a_1v_1 = \mathit{0}$ con $a_1 \neq 0$, por lo que se sigue que v_1 es el vector cero, que se puede escribir como una combinación lineal vacía, es decir, v_1 es combinación lineal de los anteriores. Supongamos ahora que n es mayor que uno. Entonces podemos despejar a v_n para obtener $v_n = -(a_1/a_n)v_1 - \cdots - (a_{n-1}/a_n)v_{n-1}$.

3) implica 1): Suponga que existen n vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ en C (con n un entero positivo) tales que v_n es combinación lineal sobre K de $v_1, \ldots, v_{n-1}$, digamos $a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1} = v_n$ (donde la combinación lineal de la izquierda puede ser vacía). Pasando todo al mismo lado obtenemos $a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1} - v_n = \mathit{0}$ donde al menos el escalar de v_n es distinto de cero. □

Teorema 220. *Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *C es linealmente independiente sobre K.*

2. *Para cualesquiera n vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ en C (con n un entero positivo), y cualesquiera n escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K, si $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ es el vector cero de V, entonces todos los escalares a_i son iguales a cero. Es decir, la única forma de escribir al vector cero como combinación lineal de vectores distintos en C es poniendo todos los escalares iguales a cero.*

3. *Ningún vector v de C se puede escribir como combinación lineal de otros vectores de C diferentes de v.*

Demostración: 1) implica 2): Si 2) no se cumpliera, existirían n vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ en C (con n un entero positivo), y n escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K, tales que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ es el vector cero de V, y no todos los escalares a_i son iguales a cero, por lo que C sería linealmente dependiente sobre K.

2) implica 3): Si 3) no se cumpliera, existiría un vector v en C que se puede escribir como combinación lineal de n vectores $v_1, \ldots, v_n$ de C, con $v_i \neq v$ para toda i. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que todos los v_i son distintos entre sí (además de ser distintos a v), pues de lo contrario se pueden agrupar los que sean iguales y sumar sus respectivos escalares. Es decir, existirían $v_1, \ldots, v_n$ vectores distintos (y distintos a v), y escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K tales que $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Restando v nos queda $0 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n - v$, contradiciendo 2), pues al menos el vector v tiene un escalar distinto de cero.

3) implica 1): Si C no fuera linealemente independiente, existirían vectores distintos $v_1, \ldots, v_n$ (con n un entero positivo) en C y escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K tales que no todos los a_i son cero, pero $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ es igual al vector cero de V. Si $n = 1$, tendríamos que el vector cero está en C, y se puede escribir como combinación lineal (vacía) de otros vectores distintos en C. Suponga ahora que n es mayor que uno. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el escalar a_n es diferente de cero. Despejando a v_n nos queda $v_n = -(a_1/a_n)v_1 - \cdots - (a_{n-1}/a_n)v_{n-1}$, contradiciendo 3). $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 221. En cada caso, determine si el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se da es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ o no.

- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$
- $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$
- $\{(1,1,0),(2,2,0)\}$
- $\{(1,-2,3),(4,5,-1),(6,1,5)\}$
- $\{(1,-2,3),(4,5,-1),(6,1,6)\}$

Ejercicio 222. Sea $V = \mathbb{F}_2^2$. Liste todos los subconjuntos de V. Diga cuáles de ellos son linealmente independientes sobre $\mathbb{F}_2$.

Ejercicio 223. Sea K un campo arbitrario, y sea $V = \mathit{0}$ el K espacio vectorial nulo. Calcule todos los subconjuntos de V que sean linealmente independientes.

Ejercicio 224. Sea K un campo arbitrario, y sea $V = K$. Calcule todos los subconjuntos de V que sean linealmente independientes.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 225. Sea V un K-espacio vectorial. Entonces el conjunto vacío es un subconjunto linealmente independiente de V.

Ejercicio 226. Sea V un K-espacio vectorial. Entonces V es un subconjunto linealmente independiente de V.

Ejercicio 227. Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto infinito de V. Entonces C es linealmente dependiente sobre K.

Ejercicio 228. Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto finito de V. Entonces C es linealmente independiente sobre K.

Demostraciones.

Ejercicio 229. Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto de V que contiene al vector cero. Demuestre que C es linealmente dependiente.

Ejercicio 230. Sea $C = \{1, i\}$ subconjunto de $\mathbb{C}$. Demuestre que C es linealmente dependiente sobre $\mathbb{C}$, pero que C es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 231. Sean K un campo, $V = K[x]$, y $C = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$. Demuestre que C es un subconjunto infinito de V linealemente independiente sobre K.

Ejercicio 232. Sea V un K-espacio vectorial, y sean C un subconjunto de V y D un subconjunto de C.

1. Demuestre que si D es linealmente dependiente sobre K, entonces C es linealmente dependiente sobre K.

2. Demuestre que si C es linealmente independiente sobre K, entonces D es linealmente independiente sobre K.

Ejercicio 233. Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto infinito de V. Demuestre que C es linealmente independiente sobre K si y sólo si todo subconjunto finito de C es linealmente independiente sobre K.

Ejercicio 234. Enuncie y demuestre un criterio análogo al Ejercicio 233 para que un subconjunto infinito de V sea linealmente dependiente. (Sugerencia: ¿cómo se niega "todo subconjunto finito de C es linealmente independiente sobre K"?)

Ejercicio 235. Sea V un K-espacio vectorial, y sea $v_1, \dots, v_n$ una sucesión de vectores en V. Demuestre que la sucesión $v_1, \dots, v_n$ es linealmente dependiente si y sólo si existen escalares $a_1, \dots, a_n$ en K tales que no todos los a_i son cero, pero $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ es igual al vector cero de V.

Ejercicio 236. Sea V un K-espacio vectorial, y sea $v_1, \dots, v_n$ una sucesión de vectores en V. Demuestre que la sucesión $v_1, \dots, v_n$ es linealmente independiente si y sólo si cualquier reordenamiento de esta sucesión es linealmente independiente.

2.4. Bases y dimensión.

Definición 237. Sea V un K-espacio vectorial, y sea B un subconjunto de V. Decimos que B es una **base** de V sobre K si B es linealmente independiente sobre K y B genera a V sobre K.

Ejemplos 238.

- Sea K un campo cualquiera y sea $V = K$. Una base de V sobre K es el conjunto $\{1\}$, pues ya se vio que es linealmente independiente sobre K y genera a V sobre K.

- Sea K un campo arbitrario y sea $V = K^2$. Una base de V sobre K es el conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$. En efecto, el conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ genera a K^2, pues todo vector (a,b) en K^2 es de la forma $a(1,0) + b(0,1)$. Además, el conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ es linealmente independiente sobre K, pues si a y b son escalares en K tales que $a(1,0)+b(0,1)$ es el vector cero, se sigue que $(a,b) = (0,0)$, es decir, $a = 0 = b$.

- Sea K un campo arbitrario y sea V el K-espacio vectorial nulo, es decir, $V = \{0\}$. El conjunto vacío es una base de $\{0\}$, pues es linealmente independiente (por vacuidad) y genera a $\{0\}$.

- Sea K un campo arbitrario, y sea A una matriz cuadrada de n por n con entradas en K. Si A es invertible, entonces las columnas de A forman una base de $M_{n\times 1}(K)$ (el espacio de vectores columna de n entradas sobre K). Sea Y_i la columna i-ésima de A. Las columnas de A generan a $M_{n\times 1}(K)$, pues dada Y en $M_{n\times 1}(K)$ arbitraria, el sistema $AX = Y$ tiene una solución (de hecho, única), digamos $(b_1, \ldots, b_n)$, de donde se tiene que $b_1 Y_1 + \cdots + b_n Y_n = Y$. Para demostrar que las columnas de A son linealmente independientes sobre K, suponga que los escalares $b_1, \ldots, b_n$ de K son tales que $b_1 Y_1 + \cdots + b_n Y_n$ son el vector columna cero. Entonces el vector columna $X_1 = (b_1, \ldots, b_n)$ es solución del sistema homogéneo $AX_1 = 0$. Pero A es invertible, por lo que la única solución de dicho sistema es la trivial, es decir, $b_i = 0$ para toda i.

Lema 239. *Sea V un K-espacio vectorial. Suponga que V es finitamente generado sobre K, es decir, existe una sucesión finita $v_1, \ldots, v_n$ de n vectores de V que generan a V sobre K. Entonces todo subconjunto linealmente independiente de vectores de V es finito y tiene a lo más n elementos.*

Demostración: Basta demostrar que todo subconjunto de V con al menos $n+1$ elementos es linealmente dependiente sobre K. Sea $C = \{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ un conjunto de $n+1$ vectores distintos. Debemos encontrar escalares $c_1, \ldots, c_n$ y c_{n+1} no todos cero, tales que $c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n + c_{n+1} u_{n+1}$ es el vector cero de V. Como $v_1, \ldots, v_n$ generan a V, para cada u_i existen escalares $b_{j,i}$ en K tales que

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} b_{j,i} v_j$$

Los coeficientes $b_{j,i}$ determinan una matriz A de n renglones y $n+1$ columnas. Sabemos que entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene al menos una solución no trivial, digamos $(c_1, \ldots, c_{n+1})$, donde no todos los c_i son cero. Observe que como $(c_1, \ldots, c_{n+1})$ es solución de $AX = 0$, se tiene que para toda j, la suma $\sum_{i=1}^{n+1} b_{j,i} c_i$ es igual a cero. Afirmamos que $c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n +$

$c_{n+1}u_{n+1}$ es el vector cero de V. Tenemos que

$$\begin{aligned}
c_1u_1+\cdots+c_nu_n+c_{n+1}u_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} c_iu_i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} c_i\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}v_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} c_ib_{j,i}v_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n+1} c_ib_{j,i}v_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1} c_ib_{j,i}\right)v_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} 0v_j \\
&= \mathit{0}
\end{aligned}$$

□

Corolario 240. *Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado sobre K. Entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.*

Demostración: El Lema 239 dice que todo conjunto finito de generadores de V tiene igual o más elementos que todo subconjunto linealmente independiente de V. En particular, todas las bases de V son finitas. Más aún, como toda base es a la vez un conjunto finito de generadores y un conjunto linealmente independiente, intercambiando roles en dicho Lema vemos que dos bases cualesquiera deben tener igual número de elementos. □

Corolario 241. *Sea V un K-espacio vectorial. Suponga que V tiene una base con n elementos. Entonces cualquier subconjunto de V con más de n vectores es linealmente dependiente, y ningún subconjunto de V con menos de n vectores puede generar a V.*

Demostración: Si hubiera un conjunto linealmente independiente con más de n vectores, éste tendría más elementos que la base, que es un conjunto finito de generadores, contradiciendo el Lema 239. Si V tuviera un conjunto de generadores con menos de n elementos, éste tendría menos elementos que la base, que es un conjunto linealmente independiente, contradiciendo el Lema 239. □

Lema 242. *Sea V un espacio vectorial y sea C un conjunto que genera a V. Sea v un vector en C que es combinación lineal de otros vectores $v_1, \ldots, v_n$ en C. Entonces el conjunto que se obtiene quitando el vector v a C genera a V.*

Demostración: Sea u un vector cualquiera de V. Como C genera a V, u se puede escribir como combinación lineal de algunos vectores en C: si ninguno de estos vectores es v, ya generamos a u como deseábamos; si no, en dicha combinación lineal apareció el vector v con un escalar a. Reemplacemos av por una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$. □

Lema 243. *Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto de V que genera a V. Si C es linealmente dependiente, entonces existe un subconjunto propio de C que genera a V.*

Demostración: Como C es linealmente dependiente, existe un vector v en C que es combinación lineal de otros vectores $v_1, \ldots, v_n$ en C. Por el Lema 242, si le quitamos v al conjunto C seguimos teniendo un conjunto de generadores de V. Este es un subconjunto propio de C. □

Teorema 244. *Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado, y sea C un conjunto finito que genera a V sobre K. Entonces V tiene una base sobre K contenida en C (que por lo tanto es una base finita).*

Demostración: Usaremos inducción sobre la cardinalidad del conjunto C que genera a V. Si C tiene cardinalidad cero (es decir, C es el conjunto vacío), entonces V es el espacio cero, y el vacío es una base de V. Suponga ahora que el resultado es válido para todos los espacios vectoriales que tienen un conjunto de generadores con menos elementos que C. Si C es linealmente independiente sobre K, ya es una base sobre K. Si C es linealmente dependiente, por el Lema 243 C tiene un subconjunto propio C_2 que genera a V. Por inducción, V tiene un subconjunto de C_2 (y por lo tanto, subconjunto de C) que es una base de V sobre K. □

Corolario 245. *Sea V un K-espacio vectorial. Entonces V está finitamente generado sobre K si y sólo si V tiene una base finita sobre K.*

Demostración: Si V está finitamente generado sobre K, por el resultado anterior V tiene una base finita sobre K. Por otro lado, si V tiene una base finita sobre K, entonces dicha base es un conjunto finito que genera a V sobre K, y por lo tanto V está finitamente generado sobre K. $\square$

Definición 246. Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado sobre K. La **dimensión** de V sobre K es la cardinalidad de cualquier base de V sobre K. Denotamos a la dimensión de V sobre K como $\dim_K(V)$.

Observación 247. También es posible definir la dimensión de un espacio vectorial que no está finitamente generado; de hecho, se define como la cardinalidad de cualquier base del espacio, pero en este caso, se trata de un número cardinal, no de un número entero. Para estos espacios se debe demostrar la existencia de bases y que cualesquiera dos bases tienen el mismo número de elementos, y las demostraciones usan herramientas poderosas de teoría de conjuntos, como el *Lema de Zorn* (véase [2] en la Bibliografía).

Lema 248. *Sea V un K-espacio vectorial, y sean $v_1, \ldots, v_n$ una sucesión de vectores linealmente independientes sobre K. Suponga que v es un vector de V que no es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$ sobre K. Entonces $v_1, \ldots, v_n, v$ es una sucesión de vectores linealmente independiente sobre K.*

Demostración: Note primero que v no puede ser ninguno de los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Supongamos que $v_1, \ldots, v_n, v$ no fueran linealmente independientes sobre K. Entonces existen escalares $a_1, \ldots, a_n, a$ en K tales que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + av = 0$. Si $a = 0$, tendríamos que los $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes sobre K, lo que es imposible, por lo que $a \neq 0$. Entonces podemos despejar a v y escribirlo como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$, lo cual también es una contradicción. $\square$

Teorema 249. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sea C un conjunto linealmente independiente sobre K. Entonces existe una base de V sobre K que contiene a C.*

Demostración: Si C genera a V sobre K, entonces C es una base de V sobre K. Si no, por el Lema anterior se le puede agregar un vector al conjunto C y obtener un conjunto linealmente independiente sobre K. Este proceso debe detenerse al llegar a la cardinalidad de una base de V, pues por el Corolario 241, si C tiene más elementos que una base de V sobre K, C no es liealmente independiente sobre K. $\square$

Observación 250. El Teorema anterior dice que todo subconjunto linealmente independiente de V puede extenderse a una base de V si V es de dimensión finita. Este resultado también es válido para dimensión infinita. Se demuestra primero que la familia de subconjuntos linealmente independientes de V es inductiva, y por el Lema de Zorn, tiene un elemento maximal, que por fuerza resulta ser una base de V.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 251. Sea V un K-espacio vectorial, y sean v, u vectores en V, a un escalar en K. Demuestre que los conjuntos $\{v, u\}$ y $\{v, u, v + au\}$ generan el mismo subespacio de V.

Ejercicio 252. Encuentre una base de $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 253. Sea K un campo arbitrario. Encuentre una base de $M_{n\times m}(K)$ sobre K.

Ejercicio 254. Sea K un campo arbitrario. Encuentre una base de $K[x]$ sobre K.

Ejercicio 255. Encuentre una base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 256. $\mathbb{R}$ es de dimensión finita como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

Ejercicio 257. $\mathbb{C}$ es de dimensión finita como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

Ejercicio 258. $\mathbb{C}$ es de dimensión finita como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejercicio 259. Todo subconjunto linealmente independiente de V es base de V.

Ejercicio 260. Todo subconjunto linealmente dependiente de V genera a V.

Ejercicio 261. Todo subconjunto que genera a V es linealmente dependiente.

Ejercicio 262. Todo subconjunto linealmente independiente de V está contenido en cualquier conjunto que genera a V.

Demostraciones.

Ejercicio 263. Sea K un campo arbitrario y sea $V = K^n$ con n un entero positivo. Sea e_i el vector en V que tiene un uno en la coordenada i-ésima y cero en las demás coordenadas, y sea $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Demuestre que E es una base de K^n. A E se le llama la **base canónica** de K^n.

Ejercicio 264. Considere la matriz escalón reducida sobre $\mathbb{Q}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Demuestre que el conjunto solución del sistema homogéneo $AX = \mathit{0}$ es $\{(5s - 2t, t, 7s, s) \mid t, s \in \mathbb{Q}\}$. Note también que $(5s - 2t, t, 7s, s) = s(5, 0, 7, 1) + t(-2, 1, 0, 0)$. Demuestre que $\{(5, 0, 7, 1), (-2, 1, 0, 0)\}$ es una base del conjunto solución sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 265. Sea K un campo y A una matriz de n por m con entradas en K. Demuestre que la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo $AX = \mathit{0}$ es igual al número de variables libres de la forma escalón reducida de la matriz A. Diga cómo construir una base explícita de dicho espacio solución.

Ejercicio 266. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sea S un subespacio de V.

1. Demuestre que toda base de S se puede extender a una base de V.

2. Demuestre que la dimensión de S es menor o igual a la dimensión de V.

3. Demuestre que la dimensión de S es igual a la dimensión de V si y sólo si $S = V$.

Ejercicio 267. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. Sea S el subespacio de K^m generado por los renglones de A. Demuestre que si se realiza una operación elemental de renglón a A, los renglones de la nueva matriz siguen generando a S.

Ejercicio 268. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. Suponga que los renglones de A son linealmente independientes sobre K (vistos como una sucesión de vectores en K^m). Demuestre que si se realiza una operación elemental de renglón a A, los renglones de la nueva matriz siguen siendo una sucesión de vectores de K^m linealmente independientes sobre K. Concluya que si A es cuadrada y sus renglones son una sucesión de vectores de K^n linealmente independientes sobre K, entonces A es invertible.

Ejercicio 269. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sean S y R subespacios de V. Demuestre que $S+R$ y $S\cap R$ son subespacios de V de dimensión finita, y

$$\dim_K(S+R)+\dim_K(S\cap R)=\dim_K(S)+\dim_K(R)$$

2.5. Coordenadas con respecto a una base ordenada.

Definición 270. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Una **base ordenada** de V es una sucesión de vectores $\beta_1,\ldots,\beta_n$ de V que es linealmente independiente y genera a V.

Observación 271. La diferencia entre una base y una base ordenada es que en la base ordenada establecemos un orden en los vectores de la base.

Ejemplos 272.

- Una base ordenada de K^2 es (1,0) y (0,1). Una base ordenada distinta es (0,1) y (1,0). Note que estas dos bases ordenadas forman el mismo conjunto.
- La **base ordenada canónica** de K^n es $e_1,\ldots,e_n$ en ese orden, donde e_i es el vector que tiene un uno en el lugar i y cero en las demás entradas.
- Otra posible base ordenada de $\mathbb{R}^2$ es (1,1) y (2,3). Como $\mathbb{R}^2$ es de dimensión 2, basta demostrar que dichos vectores generan a $\mathbb{R}^2$, para lo que basta demostrar que generan a la base canónica. Note que $(1,0)=3(1,1)-(2,3)$, y $(0,1)=(2,3)-2(1,1)$.

Proposición 273. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sea $\beta_1,\ldots,\beta_n$ una base ordenada de V. Entonces para cualquier vector v en V, existen escalares únicos $a_1,\ldots,a_n$ en K tales que*

$$v=a_1\beta_1+\cdots+a_n\beta_n$$

El escalar a_i se llama la i-ésima ***coordenada con respecto a la base ordenada*** *$\beta_1, \ldots, \beta_n$. El vector $(a_1, \ldots, a_n)$ se llama el* ***vector de coordenadas de v con respecto a la base*** *$\beta_1, \ldots, \beta_n$, y se denota $[v]_\beta$. Dicho vector de coordenadas se considera usualmente como un vector columna, aunque comúnmente se denote $(a_1, \ldots, a_n)$.*

Demostración: La existencia de los escalares $a_1, \ldots, a_n$ se sigue de que los vectores $\beta_1, \ldots, \beta_n$ generan a V. La unicidad es consecuencia de que dichos vectores sean linealmente independientes. En efecto, si $\sum a_i\beta_i = \sum b_i\beta_i$, restando nos queda que $\sum(a_i - b_i)\beta_i$ es el vector cero; como los $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son linealmente independientes, se sigue que $a_i - b_i = 0$ para toda i. $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 274. Considere las bases $\beta = (1, 0), (0, 1)$ y $\gamma = (1, 1), (2, 3)$ de $\mathbb{R}^2$. Calcule los vectores coordenada de los elementos de γ con respecto a la base β, y los vectores coordenada de los elementos de β con respecto a la base γ.

Ejercicio 275. Considere las bases $\beta = (1, 0), (0, 1)$ y $\gamma = (0, 1), (1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$. Calcule los vectores coordenada de los elementos de γ con respecto a la base β, y los vectores coordenada de los elementos de β con respecto a la base γ.

Ejercicio 276. Considere las bases $\beta = (1, 2), (3, 1)$ y $\gamma = (4, 5), (2, 8)$ de $\mathbb{R}^2$. Calcule los vectores coordenada de los elementos de γ con respecto a la base β, y los vectores coordenada de los elementos de β con respecto a la base γ.

Ejercicio 277. Considere las bases $\beta = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ y $\gamma = (1, 0, 2), (2, 0, 3), (0, 4, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule los vectores coordenada de los elementos de γ con respecto a la base β, y los vectores coordenada de los elementos de β con respecto a la base γ.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 278. Dos bases ordenadas finitas del mismo espacio vectorial siempre tienen los mismos elementos.

Ejercicio 279. Dos bases ordenadas finitas del mismo espacio vectorial siempre tienen el mismo número de elementos.

Ejercicio 280. Si dos bases ordenadas finitas constan de los mismos vectores pero en desorden, entonces los vectores coordenada con respecto a dichas bases tienen las mismas entradas, pero en desorden.

Demostraciones.

Ejercicio 281. Sean β y γ dos bases ordenadas de V. Suponga que para todo v en V, $[v]_\beta = [v]_\gamma$. Demuestre que β y γ constan de los mismos vectores en el mismo orden.

Ejercicio 282. Sea β una base ordenada de un espacio vectorial V, y sea v un vector en V. Demuestre que v es un elemento de la base ordenada β si y sólo si el vector de coordenadas de v con respecto a β tiene una entrada igual a uno y las demás iguales a cero.

Ejercicio 283. Sea β una base ordenada de un espacio vectorial V, sean $v_1, \dots, v_m$ vectores en V, y sean $a_1, \dots, a_m$ escalares en K. Demuestre que

$$[a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m]_\beta = a_1[v_1]_\beta + \cdots + a_m[v_m]_\beta$$

Es decir, el vector de coordenadas de una combinación lineal es la correspondiente combinación lineal de los vectores de coordenadas.

Ejercicio 284. Demuestre que un vector v tiene vector de coordenadas cero si y sólo si v es el vector cero.

2.6. Matriz de cambio de base.

Teorema 285. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sean $\beta = \beta_1, \dots, \beta_n$ y $\gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_n$ bases ordenadas de V. Sea A la matriz de n por n cuya columna i-ésima es el vector coordenada de γ_i con respecto a la base β. Entonces A es invertible, y para todo v en V tenemos que*

$$[v]_\beta = A[v]_\gamma \qquad y \qquad [v]_\gamma = A^{-1}[v]_\beta$$

*A la matriz A se le llama la **matriz de cambio de base** de γ a β.*

Demostración: Sea v un vector arbitrario en V. Sea $X = (x_1, \ldots, x_n)$ el vector de coordenadas de v con respecto a la base ordenada γ. Queremos demostrar que AX es el vector de coordenadas de v con respecto a la base β. Por el Ejercicio 283, tenemos que

$$\begin{aligned} [v]_\beta &= [x_1\gamma_1 + \cdots + x_n\gamma_n]_\beta \\ &= x_1[\gamma_1]_\beta + \cdots + x_n[\gamma_n]_\beta \end{aligned}$$

La última expresión es justamente el producto AX desglosado por columnas. Procedamos a demostrar que la matriz A es invertible. Afirmamos que el sistema homogéneo $AX = \mathit{0}$ tiene una solución única (la trivial). En efecto, si X es solución de dicho sistema, el vector v cuyo vector de coordenadas con respecto a la base γ es X cumple que $[v]_\beta = AX = \mathit{0}$. Por el Ejercicio 284, v debe ser el vector cero, por lo que X también es el vector columna cero. Se sigue que la matriz A debe ser invertible. Finalmente, de la ecuación $[v]_\beta = A[v]_\gamma$ obtenemos $[v]_\gamma = A^{-1}[v]_\beta$ multiplicando por A^{-1} por la izquierda. $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 286. Considere las bases $\beta = (1,0),(0,1)$ y $\gamma = (1,1),(2,3)$ de $\mathbb{R}^2$. Calcule la matriz de cambio de base de γ a β y la matriz de cambio de base de β a γ.

Ejercicio 287. Considere las bases $\beta = (1,0),(0,1)$ y $\gamma = (0,1),(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$. Calcule la matriz de cambio de base de γ a β y la matriz de cambio de base de β a γ.

Ejercicio 288. Considere las bases $\beta = (1,2),(3,1)$ y $\gamma = (4,5),(2,8)$ de $\mathbb{R}^2$. Calcule la matriz de cambio de base de γ a β y la matriz de cambio de base de β a γ.

Ejercicio 289. Considere las bases $\beta = (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ y $\gamma = (1,0,2),(2,0,3),(0,4,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule la matriz de cambio de base de γ a β y la matriz de cambio de base de β a γ.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 290. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sean $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ y $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bases ordenadas de V. Si la matriz de cambio de base de γ a β es igual a la matriz de cambio de base de β a γ, entonces β es igual a γ.

Ejercicio 291. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sean $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ y $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bases ordenadas de V. Entonces la matriz de cambio de base de γ a β es igual a la matriz identidad si y sólo si β es igual a γ.

Demostraciones.

Ejercicio 292. Sean A y B matrices de n por m tales que para todo vector columna X tenemos que $AX = BX$. Demuestre que $A = B$.

Ejercicio 293. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sean $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ y $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bases ordenadas de V. Sea A la matriz de cambio de base de γ a β, y sea B una matriz de n por n tal que para todo v en V tenemos que

$$[v]_\beta = B[v]_\gamma$$

Demuestre que $B = A$. Es decir, la matriz de cambio de base de γ a β es la única que lleva de coordenadas con respecto a la base γ a coordenadas con respecto a la base β.

Ejercicio 294. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sean $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ y $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bases ordenadas de V. Sea A la matriz de cambio de base de γ a β. Demuestre que A^{-1} es la matriz de cambio de base de β a γ.

Ejercicio 295. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sean β y γ bases ordenadas de V. Demuestre que los vectores de coordenadas $[\gamma_1]_\beta, \ldots, [\gamma_n]_\beta$ forman una base de K^n.

Ejercicio 296. Sean K un campo, $V = K^n$, y $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ una base ordenada de V. Sea A una matriz invertible de n por n. Demuestre que los vectores columna $A\beta_i$ forman una base de V. Sea γ otra base de V. Demuestre que existe una matriz invertible de n por n B tal que $\gamma_i = B\beta_i$ para toda i.

Ejercicio 297. Sean V un K-espacio vectorial de dimensión n, β una base de V y A una matriz invertible de n por n con entradas en K. Demuestre que existe una única base γ de V tal que para todo v en V se tiene $[v]_\gamma = A[v]_\beta$.

2.7. Cálculos relativos a subespacios.

Definición 298. Sea K un campo y sea A una matriz de n por m con entradas en K. El **espacio de renglones** (o **espacio de filas**) de A es el subespacio de K^m generado por los renglones de A. El **rango de renglones** (o **rango de filas**) de A es la dimensión del espacio de renglones de A.

Ejemplos 299.

- Sea I la matriz identidad de n por n con entradas en un campo K. El espacio de renglones de I es K^n. El rango de renglones de I es n.
- Sea 0 la matriz cero de n por m con entradas en un campo K. El espacio de renglones de 0 es el subespacio cero de K^m. El rango de renglones de 0 es cero.

Lema 300. *Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores en V. Sea a un escalar no nulo en K, y sean $i \neq j$ índices menores o iguales a n. Tenemos que*

$$\begin{aligned} < v_1, \ldots, v_n > &= < v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n > \\ &= < v_1, \ldots, v_{i-1}, av_i, v_{i+1} \ldots, v_n > \\ &= < v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + av_j, v_{i+1} \ldots, v_n > \end{aligned}$$

Demostración: En el primer caso se intercambiaron dos vectores, y el conjunto de generadores es el mismo. En el segundo caso, note que av_i es múltiplo escalar de v_i y viceversa. En el último caso, note que $v_i + av_j$ es combinación lineal de v_i y v_j, y que v_i es combinación lineal de $v_i + av_j$ y v_j. □

Corolario 301. *Sea K un campo, y sea A una matriz de n por m con entradas en K. Sea B una matriz invertible de n por n con entradas en K. Entonces A y BA tienen el mismo espacio de renglones.*

Demostración: Como toda matriz invertible es producto de matrices elementales, sin pérdida de generalidad podemos suponer que B es una matriz elemental. El resto se sigue del Lema 300 aplicado a los renglones de A. □

Proposición 302. *Sea A una matriz no nula escalón reducida por renglones de n por m con entradas en un campo K. Entonces los renglones no nulos de A forman una base del espacio de renglones de A.*

Demostración: Los renglones de A generan al espacio de renglones de A, y sólo los renglones no nulos son necesarios. Resta demostrar que dichos renglones no nulos son linealmente independientes. Suponga que una combinación lineal de los renglones no nulos de A es igual a cero. Entonces cada uno de los escalares usados aparecen en las entradas donde viven los pivotes de A; como dicha combinación lineal es cero, los escalares usados son todos iguales a cero, por lo que los renglones de A son linealmente independientes. □

Teorema 303. *Sean n y m enteros positivos, y sea K un campo. Sea S n subespacio de K^n de dimensión menor o igual a m. Entonces existe una única matriz de m por n escalón reducida por renglones sobre K que tiene a S como su espacio de renglones.*

Demostración: Como S es de dimensión menor o igual a m, uno puede escribir m generadores de S como renglones de una matriz, y luego llevarla a su forma escalón reducida por renglones, sin cambiar el espacio de renglones.

Supongamos ahora que dos matrices escalón reducidas por renglones tienen el mismo espacio de renglones S. Note que todo vector no nulo de S tiene su primera entrada no nula en alguna columna donde hay un pivote de su(s) matriz(ces), por lo que las dos matrices escalón reducidas tienen pivotes en las mismas columnas. Para que un renglón de una de estas matrices se escriba como combinación lineal de los renglones de la otra matriz, se necesita que el pivote correspondiente aparezca con un uno, y los demás pivotes con cero, por lo que las dos matrices tienen los mismos renglones, y son por tanto iguales. □

Corolario 304. *Sea K un campo, sea $V = K^m$ y sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores en V. Sea S el subespacio de V generado por $v_1, \ldots, v_n$, y sea A la matriz que se obtiene poniendo a los $v_1, \ldots, v_n$ como renglones. Tenemos que:*

1. *La dimensión de S es el rango por renglones de A.*

2. *Los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes sobre K si y sólo si el rango por renglones de A es n, en cuyo caso los vectores $v_1, \ldots, v_n$ forman una base de S.*

3. *Una base "sencilla" de S se obtiene con los renglones no nulos de la forma escalón reducida por renglones de A.*

4. *Un vector v pertenece a S si y sólo si el rango por renglones de A es igual al rango por renglones de A con un renglón extra igual al vector v.*

Demostración: Es inmediata del Teorema 303. □

Corolario 305. *Toda matriz de m por n con coeficientes en un campo K es equivalente a una única matriz escalón reducida por renglones.*

Demostración: Este hecho se conocía desde antes, pero es consecuencia de que un subespacio tiene una única matriz escalón reducida por renglones que lo tiene como espacio de renglones. □

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 306. Determine si los vectores (1,2,3), (4,5,6) y (7,8,9) son linealmente independientes en $\mathbb{Q}^3$.

Ejercicio 307. Determine si los vectores (1,2,0), (4,5,0) y (7,8,0) son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 308. Determine si los vectores (1,2,1), (-1,3,-1), (2,2,2) y (3,1,1) son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 309. Encuentre una base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por (3,2,1), (4,0,-2) y (10,4,0). Calcule la dimensión de dicho subespacio.

Ejercicio 310. Determine si los vectores (1,2,1) y (-1,0,2) generan al vector (2,6,5) en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 311. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. Entonces los renglones de A forman una base del espacio de renglones de A.

Ejercicio 312. Si los renglones de una matriz de 4 por 4 forman una base de $\mathbb{R}^4$, entonces la matriz es invertible.

Ejercicio 313. Si los renglones de una matriz de 4 por 4 forman una base de $\mathbb{R}^4$, entonces la matriz es elemental.

Ejercicio 314. Si los renglones de una matriz de 4 por 4 forman una base de $\mathbb{R}^4$, entonces la matriz es escalón reducida por renglones.

Demostraciones.

Ejercicio 315. Sean A y B matrices de n por m con entradas en un mismo campo K. Demuestre que A y B son equivalentes por renglones si y sólo si tienen el mismo espacio de renglones.

Capítulo 3

Transformaciones lineales.

3.1. Definición de transformación lineal y ejemplos.

Definición 316. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo K, y sea $T : V \longrightarrow W$ una función. Decimos que T es una **transformación lineal** sobre K si para cualesquiera v y u en V y cualquier a en K se tiene $T(av+u) = aT(v) + T(u)$.

Observación 317. Es equivalente pedir que para cualesquiera v y u en V y cualquier a en K se tenga que $T(av+u) = aT(v) + T(u)$, y pedir que T "abra sumas y saque escalares", es decir, $T(v+u) = T(v) + T(u)$ y $T(av) = aT(v)$. También esto es equivalente con "preservar combinaciones lineales", es decir, $T(\sum a_i v_i) = \sum a_i T(v_i)$.

Ejemplos 318.

- La función identidad de V en V es una transformación lineal.
- La función constante cero de V en W es una transformación lineal, llamada la **tranformación cero**.
- La derivación es una transformación lineal en $\mathbb{R}[x]$.
- Multiplicación por una matriz A de n por m por la izquierda es una transformación lineal de $M_{m\times t}(K)$ en $M_{n\times t}(K)$, que manda a B en AB.

- Multiplicación por una matriz A de t por n por la derecha es una transformación lineal de $M_{m\times t}(K)$ en $M_{m\times n}(K)$, que manda a B en BA.

Proposición 319. *Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $T(0) = 0$.*

Demostración: Tenemos que $T(0) = T(00) = 0T(0) = 0$. $\square$

Teorema 320. *(Propiedad universal de las bases) Sean V y W K-espacios vectoriales con V de dimensión finita. Sea $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ una base de V sobre K, y sean $w_1, \ldots, w_n$ vectores cualesquiera en W. Entonces existe una única transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ tal que $T(\beta_i) = w_i$ para toda i.*

Demostración: Si existiera una tal transformación lineal T, por linealidad tendríamos que $T(\sum a_i\beta_i) = \sum a_i T(\beta_i) = \sum a_i w_i$, lo que nos da la unicidad. Además, si definimos T por esta fórmula, vemos que es una transformación lineal, pues $T(\sum a_i\beta_i + \sum b_i\beta_i) = T(\sum(a_i+b_i)\beta_i) = \sum(a_i+b_i)w_i) = \sum a_i w_i + \sum b_i w_i = T(\sum a_i\beta_i) + T(\sum b_i\beta_i)$ es decir, T abre sumas. Por otro lado, $T(b\sum a_i\beta_i) = T(\sum ba_i\beta_i) = \sum ba_i w_i = b\sum a_i w_i = bT(\sum a_i\beta_i)$ es decir, T saca escalares. $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 321. Para cada $T_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, diga si es o no una transformación lineal sobre $\mathbb{R}$.

a) $T_1(x, y) = (x, 0)$
b) $T_2(x, y) = (0, y)$
c) $T_3(x, y) = (y, 0)$
d) $T_4(x, y) = (y, x)$
e) $T_5(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes.
f) $T_6(x, y) = (x^2, y^2)$
g) $T_7(x, y) = (x, 1)$
h) $T_8(x, y) = (xy, 0)$
i) $T_9(x, y) = (1, 0)$

Ejercicio 322. Sea $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = 2x + 3$. Determine si T es una transformación lineal sobre $\mathbb{R}$ o no.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 323. Si $T: V \longrightarrow W$ es tal que $T(\mathit{0}) = \mathit{0}$ entonces T es una transformación lineal.

Ejercicio 324. Si $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $T(v) = 0$, entonces $v = 0$.

Ejercicio 325. Si $T: K \longrightarrow K$ es una transformación lineal sobre K distinta de la transformación cero, entonces T es suprayectiva.

Ejercicio 326. Si $T: K \longrightarrow K$ es una transformación lineal sobre K distinta de la transformación cero, entonces T es inyectiva.

Demostraciones.

Ejercicio 327. Sea $T: K \longrightarrow K$ una trasformación lineal sobre K. Demuestre que existe $a \in K$ tal que $T(v) = av$ para todo $v \in K$.

3.2. Núcleo e imagen de una transformación lineal; Regla de la dimensión.

Definición 328. Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. El **espacio nulo** de T (o **núcleo**, o **kernel** de T) es el conjunto

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = \mathit{0}\}.$$

Lema 329. *Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces el espacio nulo de T es un subespacio de V*

Demostración: Sabemos que $T(0) = 0$, por lo que $0 \in \ker(T)$. Sean $v, u \in \ker(T)$, y $a \in K$. Tenemos que $T(av + u) = aT(v) + T(u) = a0 + 0 = 0$, es decir, $av + u \in \ker(T)$. □

Definición 330. La **nulidad** de una transformación lineal T es la dimensión de su espacio nulo.

Definición 331. Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. La **imagen** de T es el conjunto $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$.

Lema 332. *Sea $T\colon V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces la imagen de T es un subespacio de W.*

Demostración: Tenemos que $0 = T(0) \in \mathrm{Im}(T)$. Sean $T(v), T(u) \in \mathrm{Im}(T)$, y sea $a \in K$. Se tiene que $aT(v) + T(u) = T(av + u) \in \mathrm{Im}(T)$. $\square$

Definición 333. Sea $T\colon V \longrightarrow W$ una transformación lineal. El **rango** de T es la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$.

Ejemplos 334.

- Sea $T : K^2 \longrightarrow K^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$. El núcleo de T es $\{(0, y) \mid y \in K\}$. La nulidad de T es uno. La imagen de T es $\{(x, 0) \mid x \in K\}$. El rango de T es uno.
- Sea $T : K^3 \longrightarrow K^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, 0, 0)$. El núcleo de T es $\{(x, y, 0) \mid x, y \in K\}$. La nulidad de T es dos. La imagen de T es $\{(x, 0, 0) \mid x \in K\}$. El rango de T es uno.
- Sea $T : K^3 \longrightarrow K^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x, y)$. El núcleo de T es $\{(0, 0, 0)\}$. La nulidad de T es cero. La imagen de T es K^3. El rango de T es tres.

Teorema 335. ***(Regla de la dimensión)*** *Sea $T\colon V \longrightarrow W$ una transformación lineal, con V de dimensión finita. Entonces la nulidad de T más el rango de T es igual a la dimensión de V.*

Demostración: Sea $\beta_1, \dots, \beta_n$ base del núcleo de T (por lo que la nulidad de T es n). Completemos esta base a una base $\beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ de V. Debemos demostrar que el rango de T es m. Afirmamos que $T(\gamma_1), \dots, T(\gamma_m)$ es una base de la imagen de T, lo que demostraría que el rango de T es m y completaríamos la demostración. Primero veamos que generan: dado $T(v)$ en la imagen, escribamos v como $v = \sum a_i\beta_i + \sum b_j\gamma_j$, por lo que $T(v) = T(\sum a_i\beta_i + \sum b_j\gamma_j) = \sum a_iT(\beta_i) + \sum b_jT(\gamma_j) = 0 + \sum b_jT(\gamma_j)$. Resta ver que son linealmente independientes. Sean $\sum b_jT(\gamma_j) = 0$. Entonces $0 = T(\sum b_j\gamma_j)$, por lo que $\sum b_j\gamma_j \in \ker(T)$ y se puede generar con las β_i, es decir, $\sum b_j\gamma_j = \sum a_i\beta_i$, o también $\sum a_i\beta_i - \sum b_j\gamma_j = 0$. Pero $\beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ es base de V, y por tanto linealmente independiente, así que todos los escalares a_i y b_j son iguales a cero. $\square$

Definición 336. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. El **rango de renglones** de A (o **rango de filas** de A) es la dimensión del subespacio de K^m generado por los renglones de A. El **rango de columnas** de A es la dimensión del subespacio de K^n generado por las columnas de A.

Observación 337. Usando técnicas de sistemas de ecuaciones y la Regla de la dimensión, es posible demostrar que el rango de renglones de una matriz es igual a su rango de columnas. Sin embargo, nosotros posponemos una demostración de este hecho para más tarde. El lector interesado puede demostrarlo estableciendo primero que las operaciones elementales de renglón y de columna (¡defínalas!) no afectan los rangos de renglones ni de columnas, y luego llegando a una forma "diagonal reducida" (donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$), donde el resultado es claramente cierto.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 338. Calcule el núcleo, la nulidad, la imagen y el rango de las siguientes transformaciones lineales sobre $\mathbb{R}$:
a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - y, 0)$
b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, z)$

Ejercicio 339. Dé un ejemplo de dos transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que tengan el mismo núcleo y la misma imagen pero que sean funciones diferentes.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 340. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V de dimensión finita. Si la dimensión de W es igual a la dimensión de V, entonces el rango de T es igual a su nulidad.

Ejercicio 341. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V de dimensión finita. Son equivalentes:
1) T es la transformación cero.
2) El rango de T es igual a cero.
3) La dimensión de V es igual a la nulidad de T.

Ejercicio 342. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V de dimensión finita. Si la nulidad de T es cero, entonces el rango de T es igual a la dimensión de V.

Ejercicio 343. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V de dimensión finita. Si el rango de T es igual a la dimensión de V, entonces la nulidad de T es cero.

Ejercicio 344. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V de dimensión finita impar. Entonces la nulidad de T es distinta al rango de T.

Demostraciones.

Ejercicio 345. Sea $T\colon V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Demuestre que T es inyectiva si y sólo si $\ker(T) = \{\mathit{0}\}$.

Ejercicio 346. Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales. Demuestre que la composición $U \circ T$ es cero si y sólo si la imagen de T está contenida en el núcleo de U.

3.3. Algebra de las transformaciones lineales.

Definición 347. Sean $T, U : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales. Definimos $T + U$ como la función de V en W dada por $(T + U)(v) = T(v) + U(v)$. Análogamente, si a es un escalar, definimos aT como la función de V en W dada por $(aT)(v) = aT(v)$. El conjunto de todas las transformaciones lineales sobre K de V en W se denota $Hom_k(V, W)$.

Proposición 348. *Sean $T, U : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales. Entonces $T + U$ es una transformación lineal. Si a es un escalar, entonces aT es una transformación lineal. El conjunto $Hom_k(V, W)$ con las operaciones de suma y multiplicación escalar definidas anteriormente es un espacio vectorial sobre K.*

Demostración: Primero veamos que $T + U$ es una transformación lineal. $T+U$ abre sumas: sean $v, u \in V$. Tenemos que $(T+U)(v+u) = T(v+u) + U(v + u) = [T(v) + T(u)] + [U(v) + U(u)] = T(v) + U(v) + T(u) + U(u) = (T + U)(v) + (T + U)(u)$.

$T + U$ saca escalares: $(T + U)(av) = T(av) + U(av) = aT(v) + aU(v) = a[T(v) + U(v)] = a[(T + U)(v)]$; por lo tanto, $T + U$ es una transformación lineal.

Hagamos lo mismo con aT. aT abre sumas: sean $v, u \in V$. Tenemos que $(aT)(v + u) = a[T(v + u)] = a[T(v) + T(u)] = aT(v) + aT(u) = (aT)(v) + (aT)(u)$.

aT saca escalares: $(aT)(bv) = a[T(bv)] = a[bT(v)] = [ab]T(v) = [ba]T(v) = b[aT(v)] = b[(aT)(v)]$; por lo tanto, aT es una transformación lineal.

Finalmente, el hecho de que con estas operaciones de suma y multiplicación por escalares $Hom_k(V, W)$ sea un K-espacio vectorial, se sigue de que las propiedades necesarias para $Hom_k(V, W)$ se heredan de V y W. Por ejemplo, $T + U = U + T$ porque $T(v) + U(v) = U(v) + T(v)$. $\square$

Definición 349. Sea V un K-espacio vectorial. Un **operador lineal** sobre V es una transformación lineal de V en V.

Ejemplo 350. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$ es un operador lineal en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 351. *Sean $T V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales. Entonces la composición $UT = U \circ T : V \longrightarrow Z$ es una transformación lineal.*

Demostración: Tenemos que $(UT)(v + u) = U(T(v + u)) = U[T(v) + T(u)] = U(T(v)) + U(T(u)) = (UT)(v) + (UT)(u) = (UT)(v + u)$. Además, $(UT)(av) = U(T(av)) = U[aT(v)] = aU[T(v)] = a[(UT)(v)]$. $\square$

Definición 352. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Decimos que T es **singular** si T no es inyectiva. Tenemos entonces que T es no singular si y sólo si T es inyectiva.

Ejemplo 353. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$ singular, pues $T(0, 1) = (0, 0) = T(0, 0)$.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 354. Sean $T, U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $T(x, y) = (x, 0)$, $U(x, y) = (2y - x, y)$. Calcule:
a) $3T$
b) $-2U$
c) $5T + 2U$
d) UT
e) TU

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 355. Sean $T, U : V \longrightarrow W$ funciones. Si $T + U$ es una transformación lineal, entonces T y U son transformaciones lineales.

Ejercicio 356. Sea $T : V \longrightarrow W$ una función, y sea a un escalar no nulo. Si aT es una transformación lineal, entonces T es una transformación lineal.

Ejercicio 357. Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ funciones. Si la composición UT es una transformación lineal, entonces T y U son transformaciones lineales.

Ejercicio 358. Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ funciones. Si la composición UT es una transformación lineal, y T es una transformación lineal suprayectiva, entonces U es una transformación lineal.

Ejercicio 359. Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ funciones. Si la composición UT es una transformación lineal, y U es una transformación lineal inyectiva, entonces T es una transformación lineal.

Demostraciones.

Ejercicio 360. Sean $T, U : V \longrightarrow V$ funciones biyectivas tales que UT es la identidad y U es una transformación lineal. Demuestre que T es una transformación lineal.

Ejercicio 361. Sea $T\colon V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Demuestre que son equivalentes:

1) T es inyectiva.

2) Para cualquier subconjunto linealmente independiente C de V, se tiene que su imagen $T(C)$ (definida como $\{T(v) \mid v \in C\}$) es linealmente independiente.

3.4. Isomorfismos.

Definición 362. Sea $T\colon V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Decimos que T es un **isomorfismo** (o **invertible**, o **inversible**) si T es biyectiva, es decir, T es inyectiva y suprayectiva.

Ejemplos 363.

- Sea $T : V \longrightarrow V$ la identidad. Entonces T es un isomorfismo.
- Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$. Entonces T es un isomorfismo.

Teorema 364. *Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y de igual dimensión, y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Son equivalentes:*

1) T es inyectiva.

2) T es suprayectiva.

3) T es un isomorfismo.

Demostración: Note que por el Ejercicio 345, T es inyectiva si y sólo si su núcleo es el subespacio nulo, es decir, T es inyectiva si y sólo si su nulidad es cero. Por otro lado, T es suprayectiva si y sólo si su imagen es W, lo cual ocurre si y sólo si el rango de T es igual a la dimensión de W. El resto se sigue de la regla de la dimensión (Teorema 335). □

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 365. Para cada $T_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, diga si es o no un isomorfismo:

a) $T_1(x, y) = (x, 0)$

b) $T_2(x, y) = (0, y)$

c) $T_3(x, y) = (y, 0)$

d) $T_4(x, y) = (y, x)$

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 366. Sean $T, U : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales. Si $T + U$ es un isomorfismo, entonces T y U son isomorfismos.

Ejercicio 367. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, y sea a un escalar no nulo. Si aT es un isomorfismo, entonces T es un isomorfismo.

Ejercicio 368. Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales. Si la composición UT es un isomorfismo, entonces T y U son isomorfismos.

Ejercicio 369. Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ funciones. Si la composición UT es un isomorfismo, y T es un isomorfismo, entonces U es un isomorfismo.

Ejercicio 370. Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ funciones. Si la composición UT es un isomorfismo, y U es un isomorfismo, entonces T es un isomorfismo.

Demostraciones.

Ejercicio 371. Sean $T, U : V \longrightarrow V$ funciones biyectivas tales que UT es la identidad y U es un isomorfismo. Demuestre que T es un isomorfismo.

Ejercicio 372. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Demuestre que si T es un isomorfismo y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ es una base de V, entonces $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ es una base de W, donde $\gamma_i = T(\beta_i)$. Concluya que si V y W son isomorfos, entonces tienen la misma dimensión.

Ejercicio 373. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n. Demuestre que V es isomorfo a K^n.

3.5. Matriz asociada a una transformación lineal.

Definición 374. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita, y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ bases de V y W respectivamente. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. La **matriz asociada** a la transformación lineal T con respecto a las bases β y γ es la matriz de m por n cuya columna i-ésima es el vector coordenada de $T(\beta_i)$ con respecto a la base γ. Denotamos esta matriz ${}_\gamma[T]_\beta$. Si $V = W$ y $\beta = \gamma$, denotamos esta matriz simplemente $[T]_\beta$.

Ejemplo 375. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2y - z, 3x + 5y + 7z)$. Considere las bases canónicas $\beta = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ y $\gamma = (1, 0), (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$. La matriz asociada a T con respecto a estas bases es

$$ {}_\gamma[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} $$

Teorema 376. *Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m respectivamente. Sea $Hom_k(V, W)$ el conjunto de transformaciones lineales de V en W, y sean $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ y $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ bases de V y W respectivamente. Para cada $T \in Hom_k(V, W)$, sea ${}_\gamma[T]_\beta$ la matriz asociada a T con respecto a las bases β y γ. Tenemos lo siguiente:*

1. *T es la función constante cero si y sólo si ${}_\gamma[T]_\beta$ es la matriz cero.*
2. *${}_\gamma[T]_\beta[v]_\beta = [T(v)]_\gamma$ y ${}_\gamma[T]_\beta$ es la única matriz con esta propiedad.*

3. *T es un isomorfismo si y sólo si ${}_{\gamma}[T]_{\beta}$ es una matriz invertible.*

4. *La asignación $T \mapsto {}_{\gamma}[T]_{\beta}$ es un isomorfismo de $Hom_k(V, W)$ en $M_{m\times n}(K)$.*

5. *Si además $V = W$ y $\beta = \gamma$, entonces T es la función identidad si y sólo si $[T]_{\beta}$ es la matriz identidad.*

Demostración: Sea $A = {}_{\gamma}[T]_{\beta}$. Note que T es la función constante cero si y sólo si $T(\beta_i)$ es cero para toda i, que es equivalente a que A sea la matriz cero.

Note que la afirmación es clara para los elementos de la base β; el resultado del Teorema se sigue tomando combinaciones lineales arbitrarias de dichos vectores básicos.

Supongamos ahora que T es un isomorfismo. Por el Ejercicio 372, V y W tienen la misma dimensión, y A es una matriz cuadrada. Además, el sistema $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial, pues si $v \in V$ y $X = [v]_{\beta}$, entonces $AX = [T(v)]_{\gamma}$, que es cero si y sólo si $T(v)$ es cero, que sólo pasa si v es cero, por lo que A es invertible. El mismo argumento a la inversa demuestra que si A es cuadrada, entonces V y W tienen la misma dimensión, y si A es invertible, entonces T es inyectiva, y por el Teorema 364, T es un isomorfismo.

La asignación $T \mapsto {}_{\gamma}[T]_{\beta}$ es una transformación lineal porque los vectores coordenadas con respecto a una base preservan combinaciones lineales. Es inyectiva por la primera parte de este resultado. Es suprayectiva porque toda matriz A se puede ver como la matriz asociada una transformación lineal T, donde T está definida en la base β por $T(\beta_i) = \sum_{j=1}^{m} A_{j,i}\gamma_j$. Por lo tanto, esta asignación $T \mapsto {}_{\gamma}[T]_{\beta}$ es un isomorfismo de $Hom_k(V, W)$ en $M_{m\times n}(K)$.

Finalmente, si $V = W$ y $\beta = \gamma$, tenemos que T es la función identidad si y sólo si $T(\beta_i) = \beta_i$ para toda i, lo cual ocurre si y sólo si A es la matriz identidad. $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 377. Sean $K = \mathbb{R}$ y V el espacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3. Sea $T : V \longrightarrow V$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$ (la derivada del polinomio $p(x)$). Demuestre que $1, x, x^2, x^3$ forman una base de V, y calcule la matriz de T con respecto a esta base.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 378. Dos K-espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

Ejercicio 379. Todo K-espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a K^n.

Ejercicio 380. K^n es isomorfo a K^m si y sólo si $n = m$.

Demostraciones.

Ejercicio 381. Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales. Sean β una base de V, γ una base de W, y δ una base de Z, todas finitas. Demuestre que ${}_\delta[UT]_\beta = {}_\delta[U]_{\gamma\gamma}[T]_\beta$.

3.6. Semejanza de matrices.

Definición 382. Sean A y B dos matrices de n por n con entradas en un campo K. Decimos que A y B son **semejantes** (o **conjugadas**) si existe una matriz invertible P tal que $B = PAP^{-1}$.

Ejemplo 383. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A y B son semejantes, pues $B = PAP^{-1}$.

Proposición 384. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, sean $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ y $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bases de V, y sea T una transformación lineal de V en V. Entonces $[T]_\beta$ y $[T]_\gamma$ son matrices semejantes.*

Demostración: Sea A la matriz de cambio de base de β a γ. Entonces tenemos que $A^{-1}[T]_\gamma A = [T]_\beta$. Para ver esto, analicemos lo que le pasa a un vector coordenada según beta con ambas expresiones. La expresión de la izquierda primero convierte a las coordenas de un vector con respecto a beta en coordenadas con respecto a gama (la A), luego lo manda a las coordenadas de $T(v)$ con respecto a gama (la $[T]_\gamma$), y finalmente lo convierte a las coordenadas de $T(v)$ con respecto a beta (la A^{-1}). Esto mismo hace la expresión de la derecha, de forma más directa. $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 385. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, 3x - 7y)$. Sean β la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y γ la base (1,1),(2,0). Calcule $[T]_\beta$ y $[T]_\gamma$. Encuentre una matriz A tal que $A^{-1}[T]_\beta A = [T]_\gamma$.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 386. Sea A una matriz cuadrada. Si la única matriz semejante a A es A misma, entonces A es la matriz cero o la matriz identidad.

Ejercicio 387. Dos matrices cuadradas cualesquiera son conjugadas si y sólo si tienen las mismas dimensiones.

Demostraciones.

Ejercicio 388. Demuestre que la relación "ser semejantes" es una relación de equivalencia en el conjunto de matrices de n por n con entradas en un campo K, es decir:

1) Toda matriz A es semejante a sí misma.
2) Si A y B son semejantes, entonces B y A son semejantes.
3) Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

3.7. Funcionales lineales, espacio dual y bases duales.

Definición 389. Sea V un K-espacio vectorial. Un **funcional lineal** en V es una transformación lineal de V en el campo K. El **espacio dual** de V, denotado V^*, es el conjunto de todos los funcionales lineales en V.

Ejemplo 390. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Un funcional lineal en V es la función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = 2x - 5y$.

Definición 391. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sea $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ una base de V. La **base dual** de β, denotada β^*, es la sucesión $\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*$, donde β_i^* es el funcional lineal en V dado por $\beta_i^*(a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n) = a_i$.

Ejemplo 392. Sea $V = \mathbb{R}^2$, y sea β la base canónica. Entonces $\beta_1^*(x, y) = x$, y $\beta_2^*(x, y) = y$.

Teorema 393. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, y sea $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$ una base de V. Entonces la base dual de β es una base de V^*.*

Demostración: Sabemos que $V^* = Hom_K(V, K)$ y que su dimensión es el producto de la dimensión de V por la dimensión de k, que es n por uno igual a n. Así, basta demostrar que la base dual $\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*$ genera a V^*. Sea $T \in V^*$. Defina $a_i = T(\beta_i)$. Entonces es claro que $T = a_1\beta_1^* + \cdots + a_n\beta_n^*$, pues en cada básico β_i vemos que ambos funcionales lineales valen a_i. $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 394. Sea $V = \mathbb{R}^2$, y sea β la base canónica. Sea $T(x, y) = 5x - 6y$. Escriba a T como combinación lineal de la base dual de β.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 395. Sea v un vector no nulo cualquiera en V. Entonces v^* está bien definido, pues el conjunto $\{v\}$ se puede extender a una base de V, y a esta base se le puede sacar su base dual.

Ejercicio 396. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Entonces toda base de V^* es la dual de alguna base de V.

Demostraciones.

Ejercicio 397. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. El **doble dual** de V, denotado V^{**}, es el dual de V^*.

1) Para cada $v \in V$, sea $e_v : V^* \longrightarrow K$ dada por $e_v(T) = T(v)$. Demuestre que $e_v \in V^{**}$.

2) Sea $E : V \longrightarrow V^{**}$ dada por $E(v) = e_v$. Demuestre que E es un isomorfismo, llamado el **isomorfismo natural** entre V y su doble dual.

3.8. Transpuesta de una transformación lineal.

Definición 398. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. La **matriz transpuesta** de A, denotada A^t, es la matriz de m por n cuyas entradas están dadas por $A^t_{i,j} = A_{j,i}$. Es decir, los renglones de A^t son las columnas de A, y las columnas de A^t son los renglones de A.

Ejemplo 399. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Definición 400. Sean V y W K-espacios vectoriales, y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces la función $T^* : W^* \longrightarrow V^*$ tal que $T^*(g) = g \circ T$ para toda g en W^*, se llama la **transpuesta** (o **adjunta**) de T. Algunos autores la denotan T^t es lugar de T^*.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 401. Sean $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, y sea $T : V \longrightarrow W$ la transformación lineal $T(x, y, z) = (2y - z, x + 2y)$. Sean β y γ las bases canónicas de V y W respectivamente. Calcule la matriz asociada a T con respecto a las bases β y γ, y la matriz asociada a T^* con respecto a las base γ^* y β^*.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 402. Toda matriz de n por m es la transpuesta de alguna matriz de m por n.

Ejercicio 403. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^t = A$, entonces A es la identidad o la matriz cero.

Ejercicio 404. Sean A y B matrices tales que $A^t = B^t$. Entonces $A = B$.

Demostraciones.

Ejercicio 405. Sea A una matriz de n por m con entradas en un campo K. Demuestre que $(A^t)^t = A$.

Ejercicio 406. Sean A y B matrices tales que AB está bien definido. Demuestre que B^tA^t está bien definido y que $B^tA^t = (AB)^t$. Dé un ejemplo de A y B matrices tales que AB esté bien definido pero A^tB^t no esté definido. Dé otro ejemplo de matrices A y B tales que AB y A^tB^t estén bien definidos, pero sean diferentes.

Capítulo 4

Determinantes.

4.1. Anillos conmutativos, funciones multilineales y funciones determinantes.

Definición 407. Sea R un conjunto con dos operaciones binarias, llamadas **suma** (o **adición**) y **producto** (o **multiplicación**), denotadas $+$ y $\cdot$ respectivamente. Decimos que R es un **anillo** si cumple las siguientes propiedades, llamadas los **axiomas de anillo**:

1. La suma es **asociativa**, es decir, para cualesquiera a,b y c en R se tiene $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2. La suma es **conmutativa**, es decir, para cualesquiera a y b en R se tiene $a + b = b + a$.

3. La suma tiene un **elemento neutro** (llamado **cero** o **neutro aditivo**), es decir, existe 0 en R único tal que para todo a en R se tiene $a+0 = a$.

4. La suma tiene **inversos**, es decir, para todo a en R existe un único elemento b tal que $a + b = 0$. A b se le llama el **inverso aditivo** de a, y se le denota $-a$.

5. El producto es asociativo, es decir, para cualesquiera a,b y c en R se tiene $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

6. El producto tiene un elemento neutro (llamado **uno** o **neutro multiplicativo**), es decir, existe 1 en R único tal que para todo a en R se tiene $a \cdot 1 = a$.

7. El producto **distribuye** a la suma, es decir, para cualesquiera a,b y c en R se tiene $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ y también que $(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$.

Si aparte se cumple que el producto es conmutativo, decimos que R es un **anillo conmutativo**. Algunos autores dicen "anillo con uno" y "anillo conmutativo con uno" para lo que nosotros llamamos "anillo" y "anillo conmutativo".

Ejemplos 408.

- Todo campo es un anillo conmutativo.
- Los enteros son un anillo conmutativo que no son campo.
- Las matrices cuadradas con entradas en un campo forman un anillo no conmutativo.

Definición 409. Sea R un anillo conmutativo, y sea n un entero positivo. Sea D una función que asigna a cada matriz A de n por n con entradas en D un escalar $D(A)$ en R. Se dice que D es **n-lineal** si para cada i entre 1 y n, D es una función lineal del i-ésimo renglón cuando los otros $(n-1)$ renglones se dejan fijos. Si además D cumple que $D(A) = 0$ cuando dos renglones de A son iguales, decimos que D es una función **alternante** (o **alternada**). Si D es una función n-lineal, alternante, y tal que $D(I) = 1$ (donde I es la matriz identidad), decimos que D es una **función determinante**.

Ejemplos 410.

- La única función determinante 1-lineal es $D(a) = a$ para toda a en R.
- La función D definida en matrices dos por dos como $D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A21$ es una función determinante.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 411. Calcule los determinantes de las siguientes matrices de dos por dos (según la fórmula del Ejemplo anterior):

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 412. Si D es una función determinante, entonces D es una transformación lineal.

Ejercicio 413. Si D es una función determinante, entonces $D(0) = 0$.

Demostraciones.

Ejercicio 414. Sea D una función determinante, y sean A y B matrices en el dominio de D que se obtienen una de la otra intercambiando dos renglones diferentes. Demuestre que $D(A) = -D(B)$.

4.2. Permutaciones, unicidad de los determinantes y Teorema del producto para determinantes.

Definición 415. Sea n un entero positivo. Una **permutación** de n (o simplemente una permutación) es una biyección del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en sí mismo. El conjunto de todas las permutaciones de n se denota S_n, y se llama el **grupo simétrico de grado** n. Una **transposición** es una permutación σ tal que existen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con

$$\sigma(k) = \begin{cases} i & \text{si } k = j; \\ j & \text{si } k = i; \\ k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A la anterior transposición se le denota usualmente (i, j).

Ejemplo 416. El grupo simétrico S_3 consta de seis permutaciones, tres de las cuales son tranposiciones.

Notación 417. Sea n un entero mayor que uno, y sea A una matriz de n por n con entradas en un anillo conmutativo R. Designemos por $A(i|j)$ a la matriz de $n-1$ por $n-1$ que se obtiene eliminando el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A.

Proposición 418. *Sea n un entero positivo, y sea D una función $(n-1)$-lineal alternante de las matrices $n-1$ por $n-1$. Para cualquier j entre 1 y n, la función D_j definida para todas las matrices A de n por n con entradas en R por la fórmula*

$$D_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i,j} D[A(i|j)]$$

es una función n-lineal alternada de las matrices de n por n con entradas en R. Si D es una función determinante, también lo es D_j.

Demostración: Cada una de las partes de D_j es una función n-lineal de A, por lo que D_j es n-lineal. Si A tiene dos renglones iguales, todas las $D[A(i|j)]$ serán cero menos dos, que se anulan mutuamente. Si $D(I_{n-1})$ es uno, también lo es $D_j(I_n)$. □

Corolario 419. *Para cualquier entero positivo n existe una función determinante en el conjunto de matrices n por n con entradas en un anillo conmutativo R.*

Demostración: Para n igual a uno es claro. Las siguientes se construyen recursivamente usando el resultado anterior. □

Lema 420. *Sea σ una permutación de n, y sea I_σ la matriz que se obtiene permutando los renglones de la matriz identidad de n por n según σ. Sea D una función determinante en las matrices n por n con entradas en un anillo conmutativo R. Entonces $D(I_\sigma)$ es igual a 1 o -1; dicho valor se llama el **signo** de la permutación σ, y se denota $sgn(\sigma)$. Además, tenemos que el signo de σ es uno si y sólo si σ puede escribirse como un producto de un número par de transposiciones.*

Demostración: Se sigue de que se pueden ir intercambiando los renglones de I_σ para llevarla a la matriz identidad. Con cada cambio de renglones, el signo de $D(A)$ cambia. □

Lema 421. *Sea σ una permutación de n, y sea I_σ la matriz que se obtiene permutando los renglones de la matriz identidad de n por n según σ. Sea D una función n-lineal alternante en las matrices n por n con entradas en un anillo conmutativo R. Entonces*

$$D(I_\sigma) = [sgn(\sigma)]D(I)$$

Demostración: Es análoga a la demostración del Lema anterior, con la salvedad de que al llegar a la identidad, $D(I)$ puede no ser uno. $\square$

Lema 422. *Sea R un anillo conmuntativo y sea n un entero positivo. Sea D una función alternante n-lineal sobre las matrices n por n con entradas en R. Entonces para cualquier matriz A de n por n con entradas en R tenemos que*

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} [sgn(\sigma)] A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)} D(I)$$

Demostración: Sean $e_1, \dots, e_n$ los renglones de la matriz identidad (es decir, e_i es el i-ésimo básico canónico de R^n), y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ los renglones de la matriz A. Note que

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} e_j$$

Sustituyendo esto primero en el primer renglón de A tenemos

$$D(A) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = D(\sum_{j=1}^{n} A_{1,j} e_j, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} A_{1,j} D(e_j, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Repitiendo este proceso para todos los demás renglones de A, llegamos a una expresión del tipo

$$D(A) = \sum_{k_1, \dots, K_n} A_{1,k_1} \dots A_{n,k_n} D(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})$$

donde la suma se toma sobre todas las posibles sucesiones de enteros positivos $k_1, \dots, K_n$ menores o iguales a n. Note que hasta el momento, solamente hemos usado que D sea n-lineal. Como D es alternante, tenemos que si en la sucesión anterior $k_1, \dots, k_n$ hay al menos una repetición, entonces $D(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})$ es la matriz cero. Por lo tanto, en la fórmula anterior, podemos pedir que los $k_1, \dots, k_n$ sean todos diferentes. Para cada una de estas sucesiones, sea σ la permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$ dada por $\sigma(i) = k_i$. Podemos re-escribir la fórmula anterior como

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)} D(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Finalmente, por el Lema 421, nos queda

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)} [\mathrm{sgn}(\sigma)] D(I).$$

□

Teorema 423. *Sea R un anillo conmuntativo y sea n un entero positivo. Existe exactamente una función determinante* det *sobre el conjunto de las matrices n por n sobre R, y está definida por*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} [sgn(\sigma)] A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)}$$

Demostración: Se sigue del Lema 422 y de que la función determinante debe valer uno en la matriz identidad. □

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 424. Calcule el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 425. Decimos que una matriz cuadrada A es **triangular superior** si $A_{ij} = 0$ para toda $j < i$. Si una matriz A es triangular superior, entonces su determinante es el producto de las entradas en su diagonal.

Demostraciones.

Ejercicio 426. Sea R un anillo conmutativo y sea n un entero positivo. Sea D una función alternante n-lineal en las matrices de n por n. Demuestre que $D(A) = [\det(A)]D(I)$ para cualquier matriz A de n por n.

Ejercicio 427. (Teorema del producto para determinantes) Sea R un anillo conmutativo y sea n un entero positivo.

1) Sea B una matriz de n por n con entradas en R. Demuestre que la función D_B definida en la matriz A por $D_B(A) = \det(AB)$ es una función alternante n-lineal.

2) Calcule $D_B(I)$.

3) Concluya que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

4.3. Matriz adjunta y Regla de Cramer.

Definición 428. Sean R un anillo conmutativo y n un entero mayor que uno. Sea A una matriz de n por n con entradas en R, y sean i, j enteros entre 1 y n. El **cofactor** (i, j) de A se define como el número $(-1)^{i+j} \det(A(i|j))$. La **matriz de cofactores** de A es la matriz cuya entrada (i, j) es el cofactor (i, j) de A. La **matriz adjunta** de A, denotada $adj(A)$, es la transpuesta de la matriz de cofactores de A.

Ejemplo 429. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ -4 & 5 & -1 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

El cofactor (2,3) de A es $(-1)^5[(2)(3) - (-8)(6)] = -54$.

Teorema 430. *(Regla de Cramer) Sea A una matriz de n por n con entradas en un campo K y tal que $\det(A) \neq 0$. Sean $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. Considere el sistema lineal no homogéneo*

$$AX = Y$$

La única solución $(x_1, \ldots, x_n)$ de este sistema está dada por

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}$$

donde B_j es la matriz de n por n que se obtiene de A remplazando la columna j de A por Y.

Demostración: Se sigue del hecho de que $X = A^{-1}Y$ y del Ejercicio 436. $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 431. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ -4 & 5 & -1 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Calcule los cofactores (2,2), (1,3) y (2,1) de A.

Ejercicio 432. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz adjunta de A.

Ejercicio 433. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ -4 & 5 & -1 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz adjunta de A.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 434. Sea A una matriz de n por n con entradas en un anillo conmutativo. Entonces A es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero.

Ejercicio 435. Sea A una matriz de n por n con entradas en un anillo conmutativo. Entonces A es invertible si y sólo si su determinante es uno.

Demostraciones.

Ejercicio 436. Sea A una matriz de n por n con entradas en un anillo conmutativo.

1) Demuestre que $A(adj(A)) = \det(A)I = (adj(A))A$.

2) Demuestre que A es invertible si y sólo si $\det(A)$ es invertible en R, en cuyo caso la inversa de A es $(\det(A))^{-1}adj(A)$.

3) Concluya que si R es un campo, A es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero.

Índice alfabético

Bibliografía

[1] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. *Algebra lineal.* Publicaciones Cultural, 1982.

[2] Paul R. Halmos. *Teoría intuitiva de los conjuntos.* Editorial CECSA, 1965.

[3] Kenneth Hoffman, Ray Kunze. *Álgebra lineal.* Prentice Hall, 1973.

[4] I. Proskuriakov. *Problemas de álgebra lineal.* Editorial Mir, Moscú, 1986.

Aquí damos una pequeña bibliografía con los libros más importantes que les pueden servir en este curso.

Los dos libros más usados como textos son [3] y [1]. Yo en lo personal prefiero el Hoffman, pues me parece más completo. Por otro lado, muchos alumnos encuentran al Friedberg más fácil de entender.

Si desean un libro con muchos ejercicios les recomiendo el [4].

El [2] es un libro accesible de teoría de conjuntos, donde pueden consultar el Lema de Zorn y otras herramientas que se usan en espacios vectoriales de dimensión infinita.