Guía para los Cursos Propedéuticos y el Examen de Admisión (parte matemática) a la Licenciatura en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Luis Valero Elizondo

17 de Mayo del 2006

Contents

Introducción.

Esta es la Guía para la parte de Matemáticas del Examen de Admisión a la Licenciatura en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, y fue escrita por Luis Valero Elizondo. En mi página de internet pueden encontrar una versión en formato pdf con estas notas, así como un examen de práctica interactivo en dos versiones (formato usual de examen de opción múltiple o en forma de un juego de maratón). Mi dirección de internet es

`http://www.fismat.umich.mx/~valero/`

Esta guía presenta en forma muy resumida los prerrequisitos matemáticos para poder entrar a los cursos iniciales en la Licenciatura. Es el material que usualmente se cubre en los cursos de Algebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral del bachillerato en Ciencias Físico-Matemáticas. Se incluyen problemas resueltos, muchos de los cuáles han aparecido en el examen de admisión a la Licenciatura en la Facultad. Es posible que exámenes futuros incluyan preguntas diferentes; sin embargo, creemos que si un alumno aprende a resolver todos los problemas de esta guía, será capaz de aprobar el examen que le corresponda hacer.

Al final de la Guía aparece un índice analítico, donde las referencias indican el número de sección en que aparece la entrada: por ejemplo, la definición de **ángulo recto** está en la Sección 21. También se incluye una bibliografía mínima con los textos más usados para preparar estos temas.

Si usted descubre algún error en esta Guía (de cualquier tipo: matemático o tipográfico), le agradeceré me lo haga saber en un correo electrónico a `valero@fismat.umich.mx`. Espero que esta Guía le sea de utilidad para preparar su examen de admisión a la Licenciatura.

1 Aritmética real y entera.

Sección 1. Los **números naturales** son $1, 2, 3, 4, \ldots$. Decimos que un número natural a **divide** al número natural b (o bien, que b es un **múltiplo** de a, o que a es un **factor** de b) si existe un número natural c tal que $b = ac$. Un número natural es un **número par** si es divisible por 2, y es un **número impar** si no es divisible por 2.

Sección 2. Un número natural p mayor que uno es un **número primo** si sus únicos factores son uno y p. Todo número natural mayor que uno se factoriza de manera única como producto de números primos elevados a ciertas potencias.

Sección 3. El **máximo común divisor** de dos números naturales es el mayor de sus divisores comunes, y es el producto de los factores primos comunes a ambos números elevados a las menores potencias. El **mínimo común múltiplo** de dos números naturales es el menor de sus múltiplos comunes, y es el producto de sus factores primos comunes y no comunes, elevados a las mayores potencias.

Sección 4. Los **números enteros** son los naturales, sus negativos y el cero. Los **números racionales** son aquellos que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros. Todo número racional tiene una expansión decimal periódica. Los **números irracionales** son aquellos números que tienen expansiones decimales que no son periódicas. Los **números reales** constan de los números racionales y los números irracionales. Los **números positivos** son aquellos números que son mayores que cero, y los **números negativos** son aquellos números que son menores que cero. Decimos que a es **menor** que b (o equivalentemente, que b es **mayor** que a), si $b - a$ es positivo. Definimos el **valor absoluto** de un número real a, denotado $|a|$, de la siguiente forma: si a es positivo, entonces $|a| = a$; de lo contrario, definimos $|a| = -a$. Note que $|-a| = |a|$, y que $|0| = 0$. La **distancia** entre dos números reales a y b es $|a-b|$, es decir, el valor absoluto de su diferencia.

Sección 5. Los **axiomas de campo** de los números reales son los siguientes. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y denote el producto de reales a y b por $a \cdot b$.

1. La suma es **asociativa**, es decir, para cualesquiera a,b y c en $\mathbb{R}$ se tiene $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2. La suma es **conmutativa**, es decir, para cualesquiera a y b en $\mathbb{R}$ se tiene $a + b = b + a$.

3. La suma tiene un **elemento neutro** (llamado **cero**), es decir, existe $\mathit{0}$ en $\mathbb{R}$ único tal que para todo a en $\mathbb{R}$ se tiene $a + \mathit{0} = a$.

4. La suma tiene **inversos**, es decir, para todo a en $\mathbb{R}$ existe un único elemento b tal que $a + b = \mathit{0}$. A b se le llama el **inverso aditivo** de a, y se le denota $-a$.

5. El producto es asociativo, es decir, para cualesquiera a,b y c en $\mathbb{R}$ se tiene $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

6. El producto es conmutativo, es decir, para cualesquiera a y b en $\mathbb{R}$ se tiene $a \cdot b = b \cdot a$.

7. El producto tiene un elemento neutro (llamado **uno**), es decir, existe $\mathit{1}$ en $\mathbb{R}$ único tal que para todo a en $\mathbb{R}$ se tiene $a \cdot \mathit{1} = a$.

8. Los elementos distintos de $\mathit{0}$ tienen inversos multiplicativos, es decir, para todo a en $\mathbb{R}$ con $a \neq \mathit{0}$, existe un único elemento b tal que $a \cdot b = \mathit{1}$. A b se le llama el **inverso multiplicativo** de a, y se le denota a^{-1} o $1/a$.

9. El producto **distribuye** a la suma, es decir, para cualesquiera a,b y c en $\mathbb{R}$ se tiene $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Observe que normalmente escribimos ab en lugar de $a \cdot b$.

Sección 6. Los **axiomas de orden** de los números reales son los siguientes: para todos números reales a, b, c, d se tiene que

- (**tricotomía**) Para cada número real a, se da uno y sólo uno de los siguientes tres casos: $a = 0$; $a < 0$; $a > 0$.

- Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$ y $ab > 0$.

- Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ para cualquier c.

Sección 7. Hay un último axioma de los números reales, el llamado **axioma del supremo** o **axioma de completez**, que se estudia en los cursos de cálculo avanzado.

Sección 8. Las siguientes **propiedades de los números reales** se pueden demostrar a partir de los axiomas: para cualesquiera números reales a, b, c, d

- $a0 = 0$ para todo número real a.

- Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

- $a > b$ si y sólo si $a - b > 0$.

- Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$ (**transitividad del orden**).

- Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$.

- Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$.

- Si $a > b$ y $c > d$ entonces $a + c > b + d$.

Sección 9. Las siguientes propiedades se conocen como las **leyes de los signos**: para todos a y b números reales, se tiene que

- $(-a)b = -ab = a(-b)$

- $(-a)(-b) = ab$

Sección 10. Si a es un número real y n es un número natural, definimos la **exponenciación** a^n como el producto de a consigo mismo n veces. Por definición, $a^1 = a$ y $a^0 = 1$, pero 0^0 no está definido. Si a es diferente de cero, definimos a^{-n} como $1/a^n$. Note que si a es cero, $1/a$ no está bien definido, es decir, **no se puede dividir por cero.** Si a es un número real positivo y n es un número natural, definimos $a^{1/n}$ como la **raíz n-ésima** de a, es decir, como el número **positivo** que elevado a la n es igual a a. En particular, la **raíz cuadrada** de a es $a^{1/2}$, se denota $\sqrt{a}$, y es el único número positivo tal que $(\sqrt{a})^2 = a$; la **raíz cúbica** de a es $a^{1/3}$, se denota $\sqrt[3]{a}$, y es el único número positivo tal que $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. En general denotamos la raíz n-ésima de a como $\sqrt[n]{a}$. Si a es un número real positivo y n, m son números naturales, definimos $a^{n/m}$ como $\sqrt[m]{a^n}$, que es lo mismo que $(\sqrt[m]{a})^n$. También definimos $a^{-(n/m)}$ como $1/a^{n/m}$. Si a es negativo, sus raíces impares están bien definidas en los números reales, pero sus raíces pares no lo están. Por ejemplo, la raíz cúbica de -8 es -2 (pues $(-2)^3 = -8$), pero la raíz cuadrada de -1 no es un número real.

Sección 11. Las **reglas de exponenciación** son las siguientes, que se cumplen para cualesquiera números x, y reales positivos y a, b racionales:

- $x^{a+b} = (x^a)(x^b)$

- $x^{ab} = (x^a)^b$

- $(xy)^a = (x^a)(y^a)$

- $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

- $x^1 = x$
- $x^0 = 1$

Sección 12. Si a, b, c son números reales con a positivo, y tales que $a^b = c$, decimos que b es el **logaritmo** de c con **base** a, y lo denotamos $b = \log_a(c)$. El logaritmo de x con base e se llama **logaritmo natural**, y se denota $\ln x$. Al logaritmo de x con base 10 se le denota usualmente $\log(x)$. Los logaritmos cumplen las siguientes propiedades análogas a la exponenciación:

- $\log_x(ab) = \log_x(a) + \log_x(b)$
- $\log_x(a^b) = b \log_x(a)$
- $\log_x(x) = 1$
- $\log_x(1) = 0$

Ejercicios resueltos de Aritmética real y entera.

Ejercicio 1. Calcule el máximo común divisor de 36 y 90.
(a) 36 **(b)** 90 **(c)** 18 **(d)** 3 **(e)** 1

Solución: (c) Factorizando ambos números tenemos que $36 = 2^2 \cdot 3^2$ y $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Los primos comunes son 2 y 3; la menor potencia a la que aparece 2 es 1, y la menor potencia a la que aparece 3 es 2, por lo que el máximo común divisor de 36 y 90 es $2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$.

Ejercicio 2. Calcule el mínimo común múltiplo de 36 y 90.
(a) 36 **(b)** 90 **(c)** 3240 **(d)** 180 **(e)** 360

Solución: (d) Factorizando ambos números tenemos que $36 = 2^2 \cdot 3^2$ y $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Los primos comunes y no comunes son 2, 3, y 5; la mayor potencia a la que aparece 2 es 2, la mayor potencia a la que aparece 3 es 2, y la mayor potencia a la aparece 5 es 1, por lo que el mínimo común múltiplo de 36 y 90 es $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$.

Ejercicio 3. Ordene los siguientes números reales de menor a mayor: $0, 1$, $6/5$, $10/7$, $\sqrt{3}, 2, -\sqrt{17}, -4$. ¿Cuál ordenamiento es incorrecto?
(a) $1 < 6/5 < 2$ **(b)** $1 < 10/7 < 2$ **(c)** $6/5 < 10/7$ **(d)** $10/7 < \sqrt{3}$ **(e)** $-4 < -\sqrt{17}$

Solución: (e) Claramente tenemos $-4 < 0 < 1 < 2$. Falta ubicar a $6/5, 10/7$, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{17}$. Note que $6/5$ es una fracción porque 5 no divide a 6. Localizando a los múltiplos de 5 que rodean a 6 tenemos que $5 < 6 < 10$; dividiendo todo por 5 nos queda $1 < 6/5 < 2$. Análogamente tenemos que $1 < 10/7 < 2$, pero debemos poder comparar $6/5$ con $10/7$. Usando un común denominador de 35, tenemos que $6/5 = 42/35$, y que $10/7 = 50/35$; como $42 < 50$, se sigue que $6/5 < 10/7$. Para ver dónde ubicar a $\sqrt{3}$, elevamos los otros números al cuadrado: $1^1 = 1 < (6/5)^2 = 36/25 < (10/7)^2 = 100/49 < 2^2 = 4$. Es decir, ahora nos fijamos en $1 < 36/25 < 100/49 < 4$, y nos preguntamos dónde ubicar al cuadrado de $\sqrt{3}$, que es 3. Vemos que $3 = 147/49$, por lo que $100/49 < 3 < 4$, y sacando raíz cuadrada nos queda que $10/7 < \sqrt{3} < 2$. Para los negativos, primero vemos que $16 < 17$, y sacando raíz cuadrada queda que $4 < \sqrt{17}$. Multiplicando por -1 se cambia la dirección de la desigualdad y vemos que $-\sqrt{17} < -4$. La respuesta final es: $-\sqrt{17} < -4 < 0 < 1 < 6/5 < 10/7 < \sqrt{3} < 2$.

Ejercicio 4. Calcule el valor absoluto de $\sqrt{3} - 2$.

(a) $2 - \sqrt{3}$ **(b)** $\sqrt{3} - 2$ **(c)** 2 **(d)** $\sqrt{3}$ **(e)** 6

Solución: (a) Para calcular el valor absoluto, note primero que $\sqrt{3} < 2$, por lo que $\sqrt{3} - 2 < 0$, así que $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$.

Ejercicio 5. Simplifique $7^5 \cdot 7^4$

(a) 7^9 **(b)** 7^{20} **(c)** 140 **(d)** 7 **(e)** 7^{16}

Solución: (a) $7^5 \cdot 7^4 = 7^{5+4} = 7^9$.

Ejercicio 6. Simplifique $7^5/7^3$

(a) 7 **(b)** 7^8 **(c)** 7^2 **(d)** 7^{-2} **(e)** 15

Solución: (c) $7^5/7^3 = 7^5 \cdot 7^{-3} = 7^{5-3} = 7^2$.

Ejercicio 7. Simplifique $(7^5)^2$

(a) 7^3 **(b)** 7^7 **(c)** 7 **(d)** 7^{10} **(e)** 7^{-3}

Solución: (d) $(7^5)^2 = 7^{5 \cdot 2} = 7^{10}$

Ejercicio 8. Simplifique $\sqrt[3]{7^6}$

(a) 7^{18} **(b)** 7^9 **(c)** 7^5 **(d)** 18 **(e)** 7^2

Solución: (e) $\sqrt[3]{7^6} = (7^6)^{1/3} = 7^{6 \cdot (1/3)} = 7^2$.

Ejercicio 9. Simplifique $(\sqrt{7})^4$

(a) 7^2 **(b)** 7^4 **(c)** 7^3 **(d)** $\sqrt{7}$ **(e)** $1/7$

Solución: (a) $(\sqrt{7})^4 = (7^{1/2})^4 = 7^{(1/2)\cdot 4} = 7^2$.

Ejercicio 10. Simplifique 7^{-2}

(a) $1/49$ **(b)** $1/7$ **(c)** 49 **(d)** 14 **(e)** -14

Solución: (a) $7^{-2} = 1/(7^2) = 1/49$.

Ejercicio 11. Simplifique $\log_2(2)$

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 4 **(d)** $\log_2(1)$ **(e)** 0

Solución: (a) $\log_2(2) = 1$, pues $2^1 = 2$.

Ejercicio 12. Simplifique $\log_2(1)$

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 0 **(d)** 4 **(e)** 3

Solución: (c) $\log_2(1) = 0$, pues $2^0 = 1$.

Ejercicio 13. Simplifique $\log_2(8)$

(a) 4 **(b)** 2 **(c)** 16 **(d)** 8 **(e)** 3

Solución: (e) $\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$

Ejercicio 14. Simplifique $\log_2(5) + \log_2(7)$

(a) $\log_2(12)$ **(b)** $\log_2(35)$ **(c)** 35 **(d)** 12 **(e)** 24

Solución: (b) $\log_2(5) + \log_2(7) = \log -2(5 \cdot 7) = \log_2(35)$

Ejercicio 15. Simplifique $-\log_2(7)$

(a) $\log_2(1/7)$ **(b)** $\log_2(-7)$ **(c)** $\log_{-2}(7)$ **(d)** $\log_2 7$ **(e)** -14

Solución: (a) $-\log_2(7) = \log_2(7^{-1}) = \log_2(1/7)$

Ejercicio 16. Simplifique $\log_2(14) - \log_2(7)$

(a) 1 **(b)** $\log_2 7$ **(c)** 7 **(d)** 0 **(e)** 2

Solución: (a) $\log_2(14) - \log_2(7) = \log_2(14) + \log_2(1/7) = \log_2(14/7) = \log_2(2) = 1$

Ejercicio 17. Simplifique $\log_2(5^3) + \log_2(5^8)$

(a) $\log_2(5)$ **(b)** $\log_2(5^{24})$ **(c)** $\log_2(5^5)$ **(d)** 5^{11} **(e)** $\log_2(5^{11})$

Solución: (e) $\log_2(5^3) + \log_2(5^8) = \log_2(5^3 \cdot 5^8) = \log_2(5^{11})$

Ejercicio 18. Encuentre el Paso en el que se cometió un error en esta demostración incorrecta de que $2 = 1$:

1. Sean x, y números reales no cero tales que $x = y$;
2. Muliplique por x: $x^2 = xy$;
3. Reste y^2: $x^2 - y^2 = xy - y^2$;
4. Factorize: $(x - y)(x + y) = (x - y)y$;
5. Cancele $x - y$: $x + y = y$;
6. Sustituya $x = y$: $2y = y$;
7. Divida por y, que no es cero: $2 = 1$

(a) 2 **(b)** 3 **(c)** 4 **(d)** 5 **(e)** 7

Solución: (d) El Paso incorrecto fue cuando se canceló $x - y$, pues no se puede dividir por cero, y $x - y = 0$.

Ejercicio 19. Calcule la distancia entre $\log_2(14)$ y $\log_2(7)$.

(a) $\log_2(14)$ **(b)** $\log_2(7)$ **(c)** 7 **(d)** 0 **(e)** 1

Solución: (e) La distancia entre estos números es $|\log_2(14) - \log_2(7)| = |\log_2(14) + \log_2(1/7)| = |\log_2(14/7)| = |\log_2(2)| = |1| = 1$.

Ejercicio 20. Escriba $2\sqrt{3}$ como la raíz cuadrada de un número; $2\sqrt{3} =$

(a) $\sqrt{6}$ **(b)** $\sqrt{12}$ **(c)** $\sqrt{24}$ **(d)** $\sqrt{5}$ **(e)** $\sqrt{9}$

Solución: (b) $2\sqrt{3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$.

Ejercicio 21. Si a, b y c son enteros consecutivos, ¿cuál de los siguientes tiene que ser un número entero impar?

(a) $a + b + c$ **(b)** abc **(c)** $a + b + c + 1$ **(d)** $ab(c - 1)$ **(e)** $abc - 1$

Solución: (e) Por fuerza tiene que haber un par entre ellos, por lo que su producto es par, y $abc - 1$ es impar.

Ejercicio 22. ¿Cuál de las siguientes no es una propiedad que se cumple para cualesquiera números reales x, y?

(a) $(-x)y = -xy$ **(b)** $xy = yx$ **(c)** $x + y = y + x$ **(d)** $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ **(e)** $(-x)(-y) = xy$

Solución: (d) Por ejemplo, $(1 + 1)^2 = 2^2 = 4 \neq 2 = 1^2 + 1^2$.

2 Algebra elemental.

Sección 13. Los **productos notables** son las siguientes factorizaciones:

- **diferencia de cuadrados:** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- **cuadrado de un binomio:** $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- **diferencia de cubos:** $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- **suma de cubos:** $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- **producto de dos binomios:** $x + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

Sección 14. Sea n un número natural. El **factorial** de n, denotado $n!$, se define como el producto de todos los números naturales menores o iguales a n. Por ejemplo $1! = 1,\ 2! = 2 \cdot 1 = 2,\ 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5,\ 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,\ 5! = 4 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$. También es conveniente definir el factorial de 0, y por definición $0! = 1$.

Sección 15. Sean a, b números naturales, con $a \leq b$. Definimos las **combinaciones** de b en a, denotadas $\binom{b}{a}$, como $\binom{b}{a} = \frac{b!}{a!(b-a)!}$.

Sección 16. Sea n un número natural, y sean x, y expresiones. El **binomio de Newton** es la siguiente fórmula: $(x+y)^n = x^n + x^{n-1}y + 2x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{i}x^iy^{n-i} + \cdots + y^n$.

Ejercicios resueltos de Algebra elemental.

Ejercicio 23. Factorice la siguiente expresión: $4x^2 - 9y^4$
(a) $(2x+3y^2)(2x+3y^2)$ **(b)** $(2x-3y^2)(2x-3y^2)$ **(c)** $(2x-3y^2)(2x+3y^2)$ **(d)** $(2x+3y^2)$ **(e)** $(2x-3y^2)$

Solución: (c) Diferencia de cuadrados: $4x^2 - 9y^4 = (2x-3y^2)(2x+3y^2)$

Ejercicio 24. Factorice la siguiente expresión: $9x^2 + 12x + 4$
(a) $(3x-2)^2$ **(b)** $3x+2$ **(c)** $(3x+2)^3$ **(d)** $(3x+2)^2$ **(e)** $(2x+3)^2$

Solución: (d) Cuadrado de un binomio: $9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$

Ejercicio 25. Factorice la siguiente expresión: $x^2 + 2x - 15$
(a) $(x-3)(x+5)$**(b)** $(x+3)(x+5)$**(c)** $(x-1)(x+15)$**(d)** $(x-3)^2$**(e)** $(x+5)^3$

Solución: (a) Producto de dos binomios: $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$

Ejercicio 26. Factorice la siguiente expresión: x^3-8

(a) $(x+2)(x^2+2x+4)$ **(b)** $(x-2)(x^2+2x+4)$ **(c)** $(x-2)(x^2-2x+4)$ **(d)** $(x-2)(x^2-2x-4)$ **(e)** $(x-2)^3$

Solución: (b) Diferencia de cubos: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

Ejercicio 27. Factorice la siguiente expresión: x^3+8

(a) $(x-2)(x^2-2x+4)$ **(b)** $(x+2)(x^2-2x+4)$ **(c)** $(x-2)(x^2+2x-4)$ **(d)** $(x+2)^3$ **(e)** $(x-2)^3$

Solución: (b) Suma de cubos: $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

Ejercicio 28. Factorice la siguiente expresión: x^7-16x^3

(a) $x^3(x-2)^2(x^2+4)$ **(b)** $(x-2)^3(x+2)(x^2+4)$ **(c)** $x(x-2)^2(x+2)(x^2+4)$ **(d)** $x^3(x-2)(x+2)(x^2+4)$ **(e)** $x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$

Solución: (d) Primero factorizamos x^3 y luego usamos diferencia de cuadrados dos veces: $x^7-16x^3=x^3(x^4-16)=x^3(x^2-4)(x^2+4)=x^3(x-2)(x+2)(x^2+4)$

Ejercicio 29. Simplifique $(5x^3-3x^2+4x-7)-(5x^2-3x+2)$.

(a) $5x^3-8x^2+7x+9$ **(b)** $5x^3+8x^2+7x-9$ **(c)** $5x^3-8x^2+7x-9$ **(d)** $5x^3-8x^2-9$ **(e)** $5x^3-+7x-9$

Solución: (c) Desarrollando tenemos: $(5x^3-3x^2+4x-7)-(5x^2-3x+2)=5x^3-3x^2+4x-7-5x^2+3x-2=5x^3-8x^2+7x-9$.

Ejercicio 30. Simplifique $(3x^2+5x-4)(x-2)$.

(a) $x^3-x^2-14x+8$ **(b)** $x^3+x^2-14x+8$ **(c)** $3x^3-x^2-14x-8$ **(d)** $3x^3-14x^2+8$ **(e)** $3x^3-x^2-14x+8$

Solución: (e) Tenemos que: $(3x^2+5x-4)(x-2)=3x^3+5x^2-4x-6x^2-10x+8=3x^3-x^2-14x+8$.

Ejercicio 31. Calcule el coeficiente de x^3 en el polinomio $(x+1)^4$

(a) 3 **(b)** 4 **(c)** 1 **(d)** 0 **(e)** 2

Solución: (b) pues $\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!1!}=4$.

Ejercicio 32. Calcule el coeficiente de x^4 en $(x-y)^7$

(a) 2 **(b)** 4 **(c)** 4^7 **(d)** 35 **(e)** 56

Solución: (d) Las combinaciones de 7 en 4 son $\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}=35$.

3 Geometría elemental.

Sección 17. El **área** de un **rectángulo** de base b y altura h es bh. El área de un **cuadrado** de lado a es a^2. El área de un **triángulo** de base b y altura h es $bh/2$. El área de un **círculo** de **radio** r es πr^2, donde π es el número **pi**, que vale aproximadamente 3.141592.

Sección 18. El **perímetro** de un rectángulo de base b y altura h es $2b+2h$. El perímetro de un cuadrado de lado a es $4a$. El perímetro de un triángulo de lados a, b, c es $a+b+c$. El perímetro de un círculo de radio r es $2\pi r$.

Sección 19. El **volumen** de un **paralelepípedo** de ancho w, largo b y altura h es wbh. El volumen de un **cubo** de lado a es a^3. El volumen de un **prisma** de base b y altura h es bh. El volumen de una **pirámide** de base b y altura h es $bh/3$. El volumen de un **cilindro** de base con radio r y altura h es $\pi r^2 h$. El volumen de un **cono** de base con radio r y altura h es $\pi r^2 h/3$. El volumen de una **esfera** de radio r es $(4/3)\pi r^3$.

Ejercicios resueltos de Geometría Elemental.

Ejercicio 33. Si la longitud de un rectángulo disminuye por 10% y su altura disminuye por 20%, ¿cuánto disminuye su área?

(a) 30% **(b)** 28% **(c)** 25% **(d)** 23% **(e)** 15%

Solución: (b) Nueva area $= (0.9b)(0.8h) = 0.72bh$.

Ejercicio 34. Escriba el lado l de un triángulo rectángulo isósceles como función de su diagonal d

(a) $d/\sqrt{2}$ **(b)** $2d$ **(c)** d^2 **(d)** $\sqrt{d}$ **(e)** $\sqrt{2}d$

Solución: (a) Por el Teorema de Pitágoras tenemos que $l^2 + l^2 = d^2$, es decir, $2l = d$. Despejando l nos queda lo requerido.

Ejercicio 35. Un rectángulo tiene perímetro 10 y área 6. Calcule sus dimensiones.

(a) $2x2$ **(b)** $3x3$ **(c)** $2x3$ **(d)** $2x4$ **(e)** $3x4$

Solución: (c) Sean b la base y h la altura. Tenemos que $2b + 2h = 10$ y $bh = 6$. De la primera ecuación tenemos que $h = 5 - b$, y sustituyendo esto en la segunda ecuación nos queda $b(5 - b) = 6$, que se reduce a $0 =$

$b^2 - 5b + 6 = (b-3)(b-2)$, de donde las posibles soluciones son $b = 2$ y $b = 3$. Si $b = 2$ entonces $h = 3$, y si $b = 3$ entonces $h = 2$, por lo que las dimensiones del rectángulo son 2 por 3.

Ejercicio 36. El área de un círculo en metros cuadrados es igual a su circunferencia en metros. Calcule el radio del círculo en metros.

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** π **(d)** 2π **(e)** π^2

Solución: (b) Sea r el radio. El área es πr^2 y su circuferencia es $2\pi r$. Igualándolas y resolviendo la ecuación llegamos a que $r = 2$.

Ejercicio 37. El área de un cuadrado en metros cuadrados es igual a su perímetro en metros. Calcule la longitud de su lado en metros.

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** $\sqrt{2}$ **(d)** $3/\sqrt{2}$ **(e)** 4

Solución: (e) Sea l el lado del cuadrado. El área es l^2, y el perímetro es $4l$. Igualando estas cantidades y resolviendo la ecuación llegamos a que $l = 4$.

Ejercicio 38. El perímetro de un triángulo rectángulo isósceles es igual a su área. Calcule la base del triángulo.

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** $\sqrt{2}$ **(d)** $4 + 2\sqrt{2}$ **(e)** 4

Solución: (d) Sea a la base (y por ser isósceles, la altura también) del triángulo. El área es $a^2/2$. La hipotenusa es $\sqrt{a+a} = \sqrt{2}a$, por lo que el perímetro es $2a + \sqrt{2}a = a(2+\sqrt{2})$. Igualando estas cantidades y resolviendo la ecuación llegamos a que $a = 2(2+\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}$.

4 Trigonometría.

Sección 20. Dos triángulos son **semejantes** si tienen los mismos ángulos. Si dos triángulos son semejantes, existe una constante k tal que las longitudes de los lados de uno de los triángulos multiplicadas por k son iguales a las longitudes de los lados del otro triángulo.

Sección 21. Un **ángulo recto** es un ángulo de noventa grados. Un triángulo que tenga un ángulo recto se llama un **triángulo rectángulo**. En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama la **hipotenusa**, y los otros dos lados se llaman **catetos**. Dado un ángulo α menor de noventa grados en un triángulo rectángulo, su **cateto opuesto** es el lado opuesto al ángulo α, y el otro cateto se llama el **cateto adyacente** al ángulo α; se definen las **funciones trigonométricas** del ángulo α como sigue:

- El **seno** de α es igual al cateto opuesto entre la hipotenusa, y se denota $\text{sen}(\alpha)$.
- El **coseno** de α es igual al cateto adyacente entre la hipotenusa, y se denota $\cos(\alpha)$.
- La **tangente** de α es igual al cateto opuesto entre el cateto adyacente, y se denota $\tan(\alpha)$.
- La **cotangente** de α es igual al cateto adyacente entre el cateto opuesto, y se denota $\cot(\alpha)$.
- La **secante** de α es igual a la hipotenusa entre el cateto adyacente, y se denota $\sec(\alpha)$.
- La **cosecante** de α es igual a la hipotenusa entre el cateto opuesto, y se denota $\csc(\alpha)$.

Sección 22. Considere un triángulo rectángulo con catetos a, b e hipotenusa c. El **teorema de Pitágoras** establece que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sección 23. Las **identidades trigonométricas** más importantes son:

- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $\csc(x) = 1/\text{sen}(x); \qquad \sec(x) = 1/\cos(x); \qquad \cot(x) = 1/\tan(x)$
- $\tan(x) = \text{sen}(x)/\cos(x)$
- $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x); \qquad \cos(-x) = \cos(x)$
- $\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$

- $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$; $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}(x)$
- $\text{sen}(x) + \text{sen}(y) = 2\text{sen}(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$
- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$
- $\text{sen}(x)\text{sen}(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

Sección 24. Considere un triángulo con lados a, b, c y con ángulos opuestos A, B, C respectivamente. La **ley de los senos** establece que

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}$$

La **ley de los cosenos** establece que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

así como fórmulas análogas para b^2 y c^2.

Ejercicios resueltos de Trigonometría.

Ejercicio 39. Considere un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ cuyo cateto opuesto es de longitud 12. Si la tangente de θ vale 4, calcule la longitud del cateto adyacente a θ.
(a) 3 **(b)** 1/4 **(c)** 3/4 **(d)** 48 **(e)** 1/12

Solución: (a) $4 = \tan(\theta) = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{12}{adyacente}$.

Ejercicio 40. Considere un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C. Si $a = 2$, $\text{sen}(A) = 1/3$, y $\text{sen}(B) = 1/5$, entonces b es
(a) 1/15 **(b)** 5 **(c)** 2/3 **(d)** 6/5 **(e)** 3/2

Solución: (d) Ley de los senos: $\frac{\text{sen}(A)}{a} = \frac{\text{sen}(B)}{b}$.

Ejercicio 41. Sea θ un ángulo agudo cuyo seno es $1/7$. Entonces el coseno de θ es
(a) $6/7$ **(b)** $-6/7$ **(c)** $\sqrt{48}/7$ **(d)** $-1/7$ **(e)** $1/49$

Solución: (c) Use la identidad $\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ y que el seno y el coseno de un ángulo agudo son positivos.

Ejercicio 42. Determine cuáles de los siguientes son los lados de un triángulo rectángulo

(a) $1, 2, 3$ **(b)** $1, 1, 2$ **(c)** $3, 4, 5$ **(d)** $1, 2, 2$ **(e)** $2, 4, 6$

Solución: (c) Es la única terna que cumple $a^2 + b^2 = c^2$.

Ejercicio 43. Considere un triángulo rectángulo con hipotenusa 6 y un cateto 4. Calcule la longitud del otro cateto.

(a) $\sqrt{20}$ **(b)** $\sqrt{24}$ **(c)** $\sqrt{6}$ **(d)** 2 **(e)** 24

Solución: (a) Por el Teorema de Pitágoras, $6^2 = 4^2 + x^2$ donde x es la longitud del otro cateto. Despejando $x^2 = 36 - 16 = 20$.

Ejercicio 44. Considere un triángulo rectángulo con hipotenusa 6, y sea θ uno de los dos ángulos agudos. Suponga que el cateto opuesto a θ tiene longitud 4. Calcule $\cos(\theta)$.

(a) 1 **(b)** $\sqrt{20}/6$ **(c)** $2/3$ **(d)** 3 **(e)** $1/20$

Solución: (b) El cateto adyacente a θ mide $\sqrt{20}$ por el Teorema de Pitágoras, y el coseno es cateto adyacente entre hipotenusa.

Ejercicio 45. Sea θ un ángulo agudo tal que $\mathrm{sen}(\theta) = 2/7$. Calcule $\cos(\theta)$

(a) 1 **(b)** $-2/7$ **(c)** $\sqrt{45}/7$ **(d)** $-\sqrt{45}/7$ **(e)** 0

Solución: (d) Se sigue de la igualdad $1 = \mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)$, y que tanto el seno como el coseno de un ángulo agudo son positivos.

Ejercicio 46. Sea θ un ángulo entre 90 y 180 grados. Entonces se cumple forzosamente que

(a) el signo de $\cos(\theta)$ es negativo **(b)** el signo de $\cos(\theta)$ es positivo **(c)** el signo de $\sin(\theta)$ es nega

Solución: (a) El ángulo θ está en el cuadrante superior izquierdo; su coordenada x (que es el coseno) es negativa, y su coordenada y (que es el seno) es positiva.

Ejercicio 47. Considere un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C respectivamente. Si $a = 2$ $b = 3$ y $\cos(C) = 1/3$, calcule c.

(a) 2 **(b)** 3 **(c)** 4 **(d)** 5 **(e)** $\sqrt{13}$

Solución: (b) Por la Ley de los Cosenos, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$, que queda $c^2 = 4 + 9 - 12(1/3) = 9$.

5 Lógica y Problemas.

Sección 25. Para **plantear** un problema se siguen los siguientes pasos:

1. **¿Qué es lo que se sabe?** Después de leer cuidadosamente el enunciado del problema, hay que anotar la información que se nos proporciona. De ser apropiado, hay que hacer un dibujo sencillo que ilustre los datos que se conocen.

2. **¿Qué es lo que se quiere?** Si se pudo hacer un dibujo, hay que identificar lo que se desea encontrar en él.

3. **¿Cómo llegar de lo que se sabe a lo que se quiere?** Hay que recordar si hemos visto un problema similar antes, o si conocemos alguna fórmula que relacione lo que conocemos con lo que buscamos.

Sección 26. Considere dos cantidades x y y. Decimos que x y y varían en forma **directamente proporcional** (o que y **depende linealmente** de x) si existe una constante k tal que $y = kx$; decimos que x y y varían en forma **inversamente proporcional** si existe una constante k tal que $xy = k$. Si x y y son directamente proporcionales, al duplicarse una, se duplica la otra; si x y y son inversamente proporcionales, al duplicarse una, se reduce la otra a la mitad.

Sección 27. La **velocidad promedio** de un recorrido con distancia d y tiempo t es d/t.

Ejercicios resueltos de Lógica y Problemas.

Ejercicio 48. Marina es dos veces más grande que Luis y Lupita es 6 años más joven que Luis. Si Marina tiene a años, ¿cuántos años tiene Lupita?

(a) $a + 6$ **(b)** $a - 6$ **(c)** $(a - 12)/2$ **(d)** $(a + 12)/2$ **(e)** $2a - 6$

Solución: (c) Sean a la edad de Marina, l la edad de Luis, y g la edad de Lupita. Entonces $a = 2l$ y $g = l - 6$. Despeje g en términos de a.

Ejercicio 49. En una escuela, 3/5 de todos los alumnos son varones. De ellos, 1/4 juega basketball. Si el número de las muchachas de la escuela que juegan basketball es igual al número de los varones que lo juegan, ¿qué parte de las muchachas juega basketball?

(a) 1/10 **(b)** 3/20 **(c)** 1/4 **(d)** 1/3 **(e)** 3/8

Solución: (e) Sean e el número de los alumnos de la escuela, v el número de varones, m el número de mujeres, b el número de alumnos varones que juegan basketball (que es igual al número de mujeres que lo juega). Entonces $e = v + m$, $v = e(3/5)$, $v/4 = b = xm$. Poniendo todo en términos de e tenemos $e(3/5)(1/4) = e(2/5)x$. Cancelando obtenemos que $x = 3/8$.

Ejercicio 50. Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres por acomodar. Pone una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado, pero le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

(a) 3061 **(b)** 55 **(c)** 3025 **(d)** 2004 **(e)** 1025

Solución: (a) Sea n el número de hombres en la tropa. Si se ordenan los hombres en un cuadrado de lado a, tenemos que sobran 36, es decir, $n = a^2 + 36$. Si aumentamos el cuadrado en uno, faltan 75 hombres, o sea que $n = (a + 1)^2 - 75$. Juntando ambas ecuaciones obtenemos que $a^2 + 36 = a^2 + 2a + 1 - 75$; cancelando a^2 de ambos lados y pasando las constantes a la izquierda, obtenemos $110 = 36 + 75 - 1 = 2a$, de donde podemos concluir que $a = 55$, y $n = (55)^2 + 36 = 3061$.

Ejercicio 51. Cinco albañiles construyen una casa en 40 días. ¿Cuántos días tardarán 8 albañiles en construir esa casa?

(a) 200 **(b)** 25 **(c)** 20 **(d)** 30 **(e)** 24

Solución: (b) Un albañil tardaría $5 * 40 = 200$ días, pero ocho albañiles tardarían la octava parte de 200 días, que son 25 días.

Ejercicio 52. Edgar se tarda 10 minutos en encuadernar un libro, y Luis se tarda 15 minutos. ¿Cuánto tiempo se tardarán en encuadernar 30 libros juntos?

(a) 1 hora **(b)** 150 minutos **(c)** 2 horas **(d)** 5 horas **(e)** 3 horas

Solución: (e) En un minuto, Edgar encuaderna 1/10 de libro, y Luis encuaderna 1/15 de libro; juntos encuadernan $(1/10) + (1/15) = (3 + 2)/30 = 5/30 = 1/6$ de libro en un minuto; juntos se tardarían 6 minutos en encuadernar un libro, por lo que les llevaría $30*6 = 180$ minutos en encuadernar 30 libros, es decir, 3 horas.

Ejercicio 53. El boleto de entrada en un cine cuesta 5 pesos por niño y 10 pesos por adulto. Ayer 50 personas vieron la película y la taquilla del cine recibió 350 pesos. ¿Cuántos adultos había?

(a) 20 **(b)** 18 **(c)** 30 **(d)** 25 **(e)** 28

Solución: (a) Sea a el número de adultos y n el número de niños que vieron la película. Tenemos que $50 = a + n$ (pues en total eran 50 personas), y por otro lado $350 = 10a + 5n$ (pues fue el dinero recibido). Sustituyendo $n = 50 - a$ en la segunda ecuación queda $350 = 10a + 5(50 - a) = 10a + 250 - 5a$, de donde $100 = 5a$ y $a = 20$.

Ejercicio 54. Un tren sale del punto A en dirección al punto B con velocidad constante de 70 km por hora. En ese instante, un tren sale del punto B al punto A con velocidad constante. La distancia entre A y B es de 360 km, y los trenes se encontraron después de tres horas. Calcule la velocidad en km por hora del segundo tren.

(a) 120 **(b)** 60 **(c)** 70 **(d)** 100 **(e)** 50

Solución: (e) Los trenes recorrieron 360 km en 3 horas, por lo que su velocidad combinada fue de 120 km por hora. De esos, el primero aportó una velocidad de 70 km por hora, o sea que el segundo contribuyó con la velocidad restante, que fue de $120 - 70 = 50$ km por hora.

Ejercicio 55. Miguel salió corriendo de su casa al zoológico a 12 km por hora, y regresó caminando a 4 km por hora. Su velocidad promedio en todo el recorrido en km por hora fue

(a) 5 **(b)** 6 **(c)** 7 **(d)** 8 **(e)** 10

Solución: (b) Sean d la distancia en km de la casa de Miguel al zoológico, t_1 su tiempo de ida y t_2 su tiempo de vuelta. Tenemos que $12 = d/t_1$, y que $4 = d/t_2$. Su velocidad promedio es distancia total entre tiempo total, es decir, su velocidad promedio es de $\frac{2d}{t_1+t_2}$ km por hora. Pero despejando a los tiempos tenemos que $t_1 = d/12$, y $t_2 = d/4$, por lo que la velocidad promedio queda como $\frac{2d}{t_1+t_2} = \frac{2d}{(d/12)+(d/4)} = \frac{2d}{d[(1/12)+(1/4)]} = \frac{2}{4/12} = 2 * 3 = 6$ km por hora.

Ejercicio 56. En un torneo de tenis, después de cada partido el perdedor queda eliminado y el ganador avanza a la siguiente ronda. Se jugaron 120 partidos en total en el torneo. El número inicial de jugadores es

(a) 60 **(b)** 64 **(c)** 121 **(d)** 240 **(e)** 360

Solución: (c) Cada partido se eliminó a un jugador; como se jugaron 120 partidos, se eliminaron 120 jugadores, más el ganador del torneo (que nunca fue eliminado) da un total de 121 jugadores al inicio del torneo.

6 Funciones y Gráficas.

Sección 28. Una **función** f del conjunto A en el conjunto B asigna a cada elemento x de A un elemento $f(x)$ de B. Decimos que $f(x)$ se obtuvo **evaluando** la función f en x. Si f es una función de A en B, escribimos $f : A \longrightarrow B$. Si A y B son subconjuntos del conjunto $\mathbb{R}$ de números reales, definimos la **gráfica** de la función f como el conjunto de todos los puntos del plano de la forma $(x, f(x))$.

Sección 29. A continuación listamos algunas funciones conocidas y sus gráficas:

- La gráfica de la función $f(x) = mx+b$ es una línea recta con **pendiente** m que pasa por el punto $(0, b)$.
- La gráfica de la función $f(x) = x^2$ es una parábola que abre hacia arriba y pasa por el origen.
- La gráfica de la función $f(x) = 1/x$ es una hipérbola.

Sección 30. Si f y g son funciones definidas en los números reales, definimos la **composición** de f **seguida de** g, denotada $g \circ f$, como la función que evaluada en x es $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para los x en que dicha expresión esté bien definida.

Sección 31. Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos del plano, que puede o no ser la gráfica de una función. La **distancia entre dos puntos del plano** (x, y) y (a, b) es $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. El lugar geométrico de los puntos (x, y) que cumplen $x^2 + y^2 = 1$ es un círculo de radio uno centrado en el origen. En general, la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ describe a los puntos (x, y) en un círculo con centro (a, b) y radio r.

Sección 32. Considere una función $f : A \longrightarrow B$, donde A y B son subconjuntos de los reales, y sea a un número real positivo. Las siguientes operaciones se pueden realizar a la función f, y se explica el efecto que tienen en la gráfica de f:

- $f(x+a)$ se traslada la gráfica de f horizontalmente a unidades a la izquierda.
- $f(x-a)$ se traslada la gráfica de f horizontalmente a unidades a la derecha.

- $f(x) + a$ se traslada la gráfica de f verticalmente a unidades hacia arriba.
- $f(x) - a$ se traslada la gráfica de f verticalmente a unidades hacia abajo.
- $f(-x)$ se refleja la gráfica de f con respecto al eje vertical (de las y).
- $-f(x)$ se refleja la gráfica de f con respecto al eje horizontal (de las x).
- $f(ax)$ se encoge la gráfica de f horizontalmente hacia el origen por un factor de a (por ejemplo, la gráfica de $f(2x)$ se encoge a la mitad horizontalmente).
- $af(x)$ se expande la gráfica de f verticalmente desde el origen por un factor de a (por ejemplo, la gráfica de $2f(x)$ se expande al doble verticalmente).

Ejercicios resueltos de Funciones y Gráficas.

Ejercicio 57. Calcule la distancia de (2,3) a (4,6)
(a) 0 **(b)** $\sqrt{13}$ **(c)** $\sqrt{5}$ **(d)** 5 **(e)** 13

Solución: (b) La fórmula da $\sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2}$.

Ejercicio 58. La pendiente de la recta $2x + 3y = 4$ es
(a) 3 **(b)** $2/3$ **(c)** $-3/2$ **(d)** $-2/3$ **(e)** $3/2$

Solución: (d) Despejando a la y queda $y = -(2/3)x + 4/3$.

Ejercicio 59. Determine la función cuya gráfica se obtiene moviendo la gráfica de $f(x)$ 3 unidades a la derecha
(a) $f(x+3)$ **(b)** $f(3-x)$ **(c)** $f(x)+3$ **(d)** $f(x)-3$ **(e)** $f(x-3)$

Solución: (e) El moviento es horizontal, así que afecta a la x.

Ejercicio 60. El lugar geométrico dado por la ecuación $(x-3)^2+(y-4)^2 = 9$ es un círculo con centro y radio dados respectivamente por
(a) (3,4) y 9 **(b)** (3,4) y 3 **(c)** (0,0) y 1 **(d)** $(\sqrt{3}, 2)$ y 3 **(e)** $(\sqrt{3}, 2)$ y 9

Solución: (b) Es inmediato de la expresión $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Ejercicio 61. Calcule el punto en que se intersectan las rectas dadas por las ecuaciones $2x + 3y = 4$ y $5x + 7y = 6$.

(a) $(-10, 10)$ **(b)** $(8, -10)$ **(c)** $(-10, 8)$ **(d)** $(0, 0)$ **(e)** $(4, 6)$

Solución: (c) Despejando a y en la primera recta da $y = (4 - 2x)/3$; despejando a y en la segunda recta da $y = (6 - 5x)/7$. En el punto de intersección, ambas son expresiones válidas para y, por lo que las podemos igualar para obtener la ecuación $(4 - 2x)/3 = (6 - 5x)/7$. Despejando obtenemos que $28 - 14x = 18 - 15x$, lo que nos lleva a que $x = -10$. Evaluando esto en la primera ecuación tenemos que $y = (4 + 20)/3 = 8$, por lo que el punto de intersección es (-10,8).

7 Ecuaciones.

Sección 33. Una **ecuación** es una igualdad en donde aparecen una o más **incógnitas**. A las incógnitas también se les llama **variables** o **indeterminadas**. La letra más común para denotar una incógnita es la letra x. El **grado** de una ecuación en una variable es la mayor potencia a la que aparece dicha variable. Una ecuación de primer grado es de la forma $ax+b = 0$ donde a y b son números reales y $a \neq 0$ (por ejemplo, $5x + 7 = 0$ es una ecuación de primer grado). A una ecuación de primer grado también se le llama una **ecuación lineal**. La solución de la ecuación $ax + b = 0$ es $x = -b/a$. Una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a,b y c son números reales y $a \neq 0$ (por ejemplo, $3x^2 - 6x - 3 = 0$ es una ecuación de segundo grado). A una ecuación de segundo grado también se le llama una **ecuación cuadrática**. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos posibles soluciones, dadas por $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución; si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales; si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. La expresión $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se conoce como la **fórmula general** para resolver las ecuaciones cuadráticas.

Sección 34. Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de varias ecuaciones. Un sistema de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas es de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

donde a, b, c, d son números reales. Este tipo de sistema de ecuaciones se puede resolver primero despejando a la y en términos de x en la primera ecuación, y sustituyendo este valor en la segunda ecuación, para tener una ecuación en la variable x; se resuelve esta ecuación para encontrar el valor de x, y se usa este valor para encontrar el valor de y. Esta técnica se llama **sustitución**, y se puede aplicar a sistemas con más ecuaciones e incógnitas.

Ejercicios resueltos de Ecuaciones.

Ejercicio 62. Encuentre la solución de la ecuación $\frac{x+1}{x-2} = 2$; $x =$

(a) 6 **(b)** 5 **(c)** 1 **(d)** 2 **(e)** 0

Solución: (b) Despejando queda $x + 1 = 2(x - 2) = 2x - 4$, por lo que $x = 5$ (y cumple $x - 2 \neq 0$, para que tenga sentido la fracción original).

Ejercicio 63. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $5x^2 = 10 - 5x$; $x =$

(a) $1, 2$ **(b)** $1, -2$ **(c)** $2, -2$ **(d)** $1, -1, 2, -2$ **(e)** no tiene soluciones reales

Solución: (b) Cancelando 5 y despejando queda $x^2 + x - 2 = 0$. Use la fórmula general para obtener las dos soluciones.

Ejercicio 64. Encuentre las soluciones de la ecuación $x^2 + 9 = 6x$; $x =$

(a) 3 **(b)** $3, 9$ **(c)** $0, 3$ **(d)** 9 **(e)** no tiene soluciones reales

Solución: (a) Despeje para obtener $x^2 - 6x + 9 = 0$ y use la fórmula general para obtener la única raíz $x = 3$.

Ejercicio 65. Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación $x^2 + 1 = 0$; $x =$

(a) 1 **(b)** -1 **(c)** $1, -1$ **(d)** 0 **(e)** no tiene soluciones reales

Solución: (e) Al usar la fórmula queda una raíz cuadrada de un número negativo, que no tiene solución en los números reales.

Ejercicio 66. Encuentre la solución del sistema de ecuaciones $4x + y = 5$; $2x - y = 7$

(a) $x = -2, y = -3$ **(b)** $x = -2, y = 3$ **(c)** $x = 4, y = -6$ **(d)** $x = 5, y = 7$ **(e)** $x = 2, y = -3$

Solución: (e) Despejando en la primera ecuación da $y = 5 - 4x$; sustituyendo esto en la segunda nos queda $2x - (5 - 4x) = 7$, es decir, $2x - 5 + 4x = 7$, por lo que $6x = 12$ y $x = 2$. De $y = 5 - 4x$ nos queda $y = 5 - 4(2) = 5 - 8 = -3$.

Ejercicio 67. Encuentre el valor de x a partir de $2x + 7 = 13$.
(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 3 **(d)** 7 **(e)** 26

Solución: (c) Reste 7 para obtener $2x = 6$; divida entre 2 y obtiene $x = 3$.

Ejercicio 68. Resuelva
$$\frac{5x+4}{2x+3} = 2$$
(a) 2 **(b)** $-2/5$ **(c)** $-1/2$ **(d)** $5/2$ **(e)** $4/3$

Solución: (a) Multiplicando por el denominador obtenemos $5x + 4 = 2(2x + 3) = 4x + 6$. Reste $4x$ para llegar a $x + 4 = 6$; reste 4 para obtener $x = 2$.

Ejercicio 69. Encuentre todas las soluciones de
$$\frac{x^2 + x - 12}{2x - 6} = 1$$
(a) 2 **(b)** -2 **(c)** -2 y 3 **(d)** 3 **(e)** ninguna

Solución: (b) Multiplicando por el denominador nos da $x^2 + x - 12 = 2x - 6$; restando $2x - 6$ tenemos $0 = x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, cuyas soluciones son $x = 3$ y $x = -2$. Sin embargo, vemos que la única solución que funciona en la ecuación original es $x = -2$, pues la expresión no está bien definida cuando $x = 3$ (el denominador se hace cero).

8 Desigualdades.

Sección 35. Una **desigualdad** es una ecuación en la que el símbolo de igualdad se cambió por $<, >, \leq$ o $\geq$. Para resolver una desigualdad, primero se encuentran los valores de x donde hay o bien igualdad o una expresión que no está bien definida; esto nos dividirá a la recta real en varios intervalos. Después se escoge un número real cualquiera en cada uno de estos intervalos, y si satisface la desigualdad, todo el intervalo donde está también la satisface; de lo contrario, desechamos dicho intervalo. Si se desean resolver varias desigualdades simultáneamente, se resuelve cada una por separado y se encuentran las soluciones comunes a todas.

Sección 36. Un **intervalo abierto** con extremos a y b es el conjunto de todas las $x \in \mathbb{R}$ con $a < x < b$, y se denota (a, b). Un **intervalo cerrado** con extremos a y b es el conjunto de todas las $x \in \mathbb{R}$ con $a \leq x \leq b$, y se denota $[a, b]$. El intervalo $[a, b)$ consta de las $x \in \mathbb{R}$ que cumplen $a \leq x < b$; el intervalo $(a, b]$ consta de las $x \in \mathbb{R}$ que cumplen $a < x \leq b$. El intervalo $(a, +\infty)$ consta de las $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x$; el intervalo $(-\infty, b)$ consta de las $x \in \mathbb{R}$ tales que $x < b$. Análogamente se definen $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$.

Ejercicios resueltos de Desigualdades.

Ejercicio 70. Calcule el conjunto de puntos que cumplen $3x - 4 > 2$.
(a) $(2, 3)$ **(b)** $(2, +\infty)$ **(c)** $(3, 4)$ **(d)** $(-\infty, 2)$ **(e)** $(-2, 2)$

Solución: (b) Manipulando la desigualdad llegamos a que $3x > 6$, y luego que $x > 2$.

Ejercicio 71. Calcule el conjunto de puntos x que cumplen $|2x - 1| < 3$
(a) $(-2, 4)$ **(b)** $(-1, 2)$ **(c)** $(0, 1)$ **(d)** $(2, 3)$ **(e)** $(-1, 3)$

Solución: (b) La desigualdad equivale a resolver $0 \leq 2x - 1 < 3$ y $0 \leq -(2x - 1) < 3$; la última desigualdad es equivalente a $-3 < 2x - 1 \leq 0$ (multiplicar por negativo cambia la desigualdad), y nos queda la desigualdad compuesta $-3 < 2x - 1 < 3$. Sumando 1 a todo da $-2 < 2x < 4$; dividiendo entre 2 tenemos $-1 < x < 2$.

Ejercicio 72. Calcule el conjunto de puntos que cumplen $x^2 - 3 < 1$.
(a) $(-1, 1)$ **(b)** $(-2, 2)$ **(c)** $(-\infty, -2)$ **(d)** $(2, +\infty)$ **(e)** $(-\infty, -2), (2, +\infty)$

Solución: (b) Resolvemos primero la igualdad $x^2 - 3 = 1$ y vemos que las soluciones son $x = -2$ y $x = 2$. Notamos además que no hay puntos donde la expresión esté sin definir (denominadores, por ejemplo). Esto divide la recta real en tres regiones: $(infty, -2), (-2, 2)$ y $(2, +\infty)$. Escogemos un punto en cada región para ver si la región completa cumple la desigualdad: $-3, 0, 3$. Vemos que el único de estos tres puntos que cumple la desigualdad es 0, por lo que la única región con soluciones es $(-2, 2)$.

9 Límites y Continuidad.

Sección 37. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, y sean c un elemento del intervalo (a, b) y λ un número real. Decimos que la función f tiene **límite** λ en el punto c (o también que $f(x)$ **tiende** a λ cuando x tiende a c), si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - \lambda| < \epsilon$. Este hecho se denota

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

Decimos que f es **continua** en el punto c si f tiene límite $f(c)$ en c. Decimos que f es una función continua si es continua en todo punto donde está definida.

Sección 38. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, y sean c un elemento del intervalo (a, b) y λ un número real. Decimos que la función f tiene **límite derecho** λ en el punto c (o también que $f(x)$ tiende a λ cuando x tiende a c por la derecha), si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x - c < \delta$ entonces $|f(x) - \lambda| < \epsilon$. Este hecho se denota

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lambda$$

Decimos que la función f tiene **límite izquierdo** λ en el punto c (o también que $f(x)$ tiende a λ cuando x tiende a c por la izquierda), si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < c - x < \delta$ entonces $|f(x) - \lambda| < \epsilon$. Este hecho se denota

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lambda$$

Sección 39. Los siguientes son ejemplos de funciones continuas:

- Las funciones constantes.
- Los polinomios: x, x^2, $10x^3 - 3x^2 + 7x - 20$, etc.
- Las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen}(x), \cos(x), \tan(x)$ etc.
- La función exponencial e^x.
- El logaritmo: $\ln x$.

Sección 40. Sumas, restas, productos, y composiciones de funciones continuas vuelven a ser funciones continuas. El cociente de dos funciones continuas es una función continua donde el denominador no es cero; dicho cociente puede o no tener límite en donde se anula el denominador (vea los ejemplos resueltos).

Ejercicios resueltos de Límites y Continuidad.

Ejercicio 73. Calcule $\lim_{x \to -2} 3x^2 - 5x + 8$

(a) no existe **(b)** 2 **(c)** 30 **(d)** -2 **(e)** 0

Solución: (c) Como la función es un polinomio, que es continua, el límite se obtiene simplemente evaluado: $3(-2)^2 - 5(-2) + 8 = 12 + 10 + 8 = 30$.

Ejercicio 74. Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

(a) no existe **(b)** 2 **(c)** 0 **(d)** -2 **(e)** 4

Solución: (e) Evaluando tendríamos 0 entre 0, que no nos dice nada. Notamos que el numerador se factoriza como $(x-2)(x+2)$; cancelando un $x-2$ con el denominador, nos queda $x+2$, que tiende a 4 cuando x tiende a 2.

10 Derivadas e Integrales.

Sección 41. Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, y sea c un elemento del intervalo (a,b). Decimos que la función f es **diferenciable** en el punto c si el límite

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existe. Dicho límite se llama la **derivada** de f en c, y se denota $f'(c)$. Decimos que f es una función diferenciable si es diferenciable en todo punto donde está definida; en este caso, la derivada de la función f es una función que está definida en el dominio de f, y se denota f'. Note que toda función diferenciable es continua. Es posible definir derivada por la derecha y por la izquierda usando límites por dichos lados.

Sección 42. Ejemplos de derivadas:

- La derivada de cualquier función constante es 0.

- La derivada de la función $f(x) = x$ es la constante 1.
- La derivada de la función $f(x) = x^n$ es nx^{n-1}.
- La derivada de $\text{sen}(x)$ es $\cos(x)$.
- La derivada de $\cos(x)$ es $-\text{sen}(x)$.
- La derivada de e^x es e^x.
- La derivada de $\ln x$ es $1/x$.

Sección 43. Sea f una función diferenciable en el intervalo (a, b), y sea c un punto en dicho intervalo. El valor $f'(c)$ (es decir, la derivada de f en c) es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es una función **estrictamente creciente**, es decir, para cualesquiera c, d con $a < c < d < b$ se tiene $f(c) < f(d)$. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es una función **estrictamente decreciente**, es decir, para cualesquiera c, d con $a < c < d < b$ se tiene $f(c) > f(d)$. Si $f'(x) = 0$ para todo x en el intervalo (a, b), entonces f es constante en ese intervalo.

Sección 44. La direnciación cumple las siguientes reglas. Si f y g son funciones diferenciables, entonces:

- $f + g$ es diferenciable y $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
- fg (el producto) es diferenciable y $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- f^n (una potencia no cero de f) es diferenciable y $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)$;
- Si además $g(x) \neq 0$, entonces f/g (el cociente de f entre g) es diferenciable y $(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$;
- $f \circ g$ (la composición de g seguida de f) es diferenciable y $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ (ésta es la **regla de la cadena**).
- Si k es una constante real, entonces kf es diferenciable y $(kf)'(x) = kf(x)$.

Sección 45. El siguiente resultado se conoce como la **regla de L'Hôpital**: Sean f, g funciones diferenciables definidas en un intervalo abierto, y sea c un elemento de ese intervalo. Si

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 = \lim_{x \to c} g(x)$$

y además

$$\lim x \to c \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe, entonces también existe el límite

$$\lim x \to c \frac{f(x)}{g(x)}$$

y es igual al límite anterior. Un resultado análogo se tiene si tanto $f(x)$ como $g(x)$ tienden a infinito cuando x tiende a c.

Sección 46. Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Una **antiderivada** (o también llamada una **integral indefinida**) de f es una función diferenciable F con dominio $[a, b]$ y tal que $F'(x) = f(x)$ para toda x en $[a, b]$. Dos antiderivadas cualesquiera de f difieren por una constante aditiva. Si F es una antiderivada de f, esto se denota a veces como

$$F(x) = \int f(t)dt$$

aunque esta notación es peligrosa, puesto que las antiderivadas no son únicas. Si f tiene una antiderivada en el intervalo $[a, b]$, decimos que f es **integrable** en el intervalo $[a, b]$; en este caso, la **integral definida** de f en el intervalo $[a, b]$ se define como

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$.

Sección 47. Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es el **área** comprendida entre la gráfica de f y el eje de las x sobre el intervalo $[a, b]$. Si $f(x) \leq 0$ para toda x en $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de las x sobre el intervalo $[a, b]$ pero con signo negativo. Si $f(x)$ es arbitraria, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es el resultado de cancelar áreas positivas (arriba del eje de las x) con áreas negativas (debajo del eje de las x).

Sección 48. Ejemplos de funciones integrables: Si f es continua, entonces f es integrable. En particular, son integrables las constantes, los polinomios, las funciones trigonométricas (en los intervalos en que estén bien definidas), la función exponencial e^x, y el logaritmo natural $\ln x$ (en cualquier intervalo $[a, b]$ con $0 < a < b$).

Sección 49. La integración cumple las siguientes reglas para cualesquiera funciones integrables f y g y constante k:

- $\int [f(t) + g(t)]dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt$
- $\int kf(t)dt = k \int f(t)dt$
- $\int [f'(t)g(t) + f(t)g'(t)]dt = f(x)g(x)$
- $\int f'(g(t))g'(t)dt = f(g(x))$
- $\int t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ donde n es un número distinto de -1, y C es una constante arbitraria.

Ejercicios resueltos de Derivadas e Integrales.

Ejercicio 75. Calcule la derivada de $\mathrm{sen}(x)\cos(x)$.
(a) $\mathrm{sen}'(x)\cos'(x)$ **(b)** $\mathrm{sen}'(\cos'(x))$ **(c)** $\mathrm{sen}'(x)\cos(x) + \mathrm{sen}(x)\cos'(x)$ **(d)** $2\mathrm{sen}'(x)\cos(x)$ **(e)** $2\mathrm{sen}(x)\cos'(x)$

Solución: (c) Use la fórmula para la derivada de un producto.

Ejercicio 76. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$
(a) 0 **(b)** no existe **(c)** 1 **(d)** ∞ **(e)** -1

Solución: (c) Use la regla de L'Hôpital para obtener que el límite es igual al límite de $\frac{\cos(x)}{1}$ cuando x tiende a 0, que es 1.

Ejercicio 77. La derivada de una función $f(x)$ definida en el intervalo cerrado [0,1] es $\mathrm{sen}(x)^4 + (2x - 5)^2$. ¿Cuál de las siguientes condiciones es forzosamente falsa?
(a) $f(0) > 0$ **(b)** $f(0) < 0$ **(c)** $f(0) > f(1)$ **(d)** $f(0) < f(1)$ **(e)** f es continua en $[0, 1]$

Solución: (c) La derivada es positiva, por lo que la función f es estrictamente creciente en el intervalo [0,1].

Ejercicio 78. Calcule la derivada de la función $f(x) = 10x^5 - 7x^2 + 3x - 5$
(a) $10x^4 - 7x + 3$ **(b)** $5x^4 - 2x + x$ **(c)** $x^5 - x^2 + x$ **(d)** $50x^4 - 14x + 3$ **(e)** $(10/6)x^6 - (7/3)x^3 + (3/2)x^2 - 5x$

Solución: (d) Use las fórmulas para derivadas de x^n, de $af(x)$ y de una suma.

Ejercicio 79. Calcule la derivada de $f(x) = e^x + \ln(x)$
(a) $e^x + 1/x$ **(b)** $e^x + \ln(x)$ **(c)** $1/e^x + 1/\ln(x)$ **(d)** $e^{x-1} + 1/x$ **(e)** $e^{x-1} - 1/x^2$

Solución: (a) Es la suma de las derivadas.

Ejercicio 80. Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3\text{sen}(x)$ en el punto (0,0)
(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 1/3 **(d)** 3 **(e)** -3

Solución: (d) La derivada de f es $f'(x) = 3\cos(x)$, y evaluada en $x = 0$ da 3.

Ejercicio 81. Calcule $\int_1^2 3x^2 - 4x + 3dx$
(a) 2 **(b)** 7 **(c)** 4 **(d)** 1 **(e)** 6

Solución: (c) Una antiderivada para $3x^2 - 4x + 3$ es $x^3 - 2x^2 + 3x$; la evaluamos en 2 y obtenemos 6, la evaluamos en 1 y obtenemos 2, por lo que la resta es $6 - 2 = 4$.

Index

References

Aquí damos una pequeña bibliografía con los libros más importantes que les pueden servir para preparar la parte matemática de su examen de admisión a la Licenciatura.

La parte de Algebra está plenamente cubierta en el [?]. La parte de Trigonometría y Geometría Analítica se puede encontrar en el [?]. Para la parte de cálculo, el [?] es suficiente.